משוואות דיפרנציאליות רגילות

חוברת תרגילים

גירסה: 14.01.2018 (alpha)

- התרגילים קובצו ממקורות שונים ברשת האינטרנט, חוברות תרגילים ישנות, אוספים ישנים וחדשים (חלקם מקורסים מלפני 20 או 25 שנה), ומבחנים שונים שניתנו במוסדות להשכלה גבוהה בארץ ובחו"ל. נעשה מאמץ מיוחד בכדי לקבץ יחד מגוון רחב ככל האפשר של סוגי משוואות ובעיות, ונאספו מעל 340 תרגילים שונים. לכן פיתרון מלא של כל התרגילים בחוברת כהכנה לבחינה סופית בקורס אינו מעשי. במקום זאת מומלץ לעבור על כל מרבית התרגילים ולזהות שם את סוג המשוואה או סוג הבעייה או את סוג המתווה לפיתרון, ולבחור מתוכם מדגם מייצג לפיתרון מלא.
- למשל ברוב המקרים יספיק לזהות משוואה מסוימת כמשוואה הומוגנית, או משוואת ברנולי, או משוואת אוילר, וכדומה. בחלק מהמקרים מומלץ לנסות להתחיל את הפיתרון ולקבל תחושה שבמידת הצורך זה ניתן לביצוע בזמן סביר. למשל, להגיע לשלב החישוב של האינטגרלים במקרה של משוואה מדויקת ולוודא שהתלמיד מכיר ויודע כיצד לבצע את האינטגרל.
- זוהי הגירסה הראשונה של החוברת וככל הנראה היא עשויה להכיל טעויות סופר, תרגילים שהועתקו באופן שגוי, וגם תרגילים שלא נבדקו היטב ושעשויים לא להתאים לחומר שנלמד בקורס. נודה מאוד לכל מי שיטרח לשלוח תיקונים, רעיונות, והצעות שיפור לכתובת הדואר האלקטרוני: samyz@technion.ac.il.
- במידה וזה ייסתייע, הגירסאות הבאות של החוברת ייכללו גם תשובות סופיות למרבית התרגילים.

מושגי יסוד

1. מהו הסדר של כל אחת מהמשוואות הדיפרנציאליות הבאות?

א. $f''(x) - [f'(x)]^3 + x^2 = 5f(x)$

ב. $f''(x)^4 + f'(x)^2 + 1 = 0$

ג. $y''' + 5xy' - y\sin x = 3e^x$

ד. $t^3y'''(t) - t^2y''(t) + ty'(t) - 2y(t) = 1 + \ln t$

ה. $\dfrac{y'}{1+yy''} = xy^3$

2. לגבי כל משוואה דיפרנציאלית, קבע האם היא ליניארית?

א. $y''' + 2x = y$

ב. $y'' + 2y = \frac{1}{y} + \pi$

ג. $(x+y')^2 = (x-y')^2 + 1$

ד. $\sqrt{x}y'' - (1+x)y' + y\sin x = e^x$

3. הוכח כי $y(x) = \sqrt{x^2+C}$ פיתרון של המשוואה הדיפרנציאלית $yy' = x$ על כל הישר הממשי

4. הוכח כי $y(x) = xe^{-x}$ פיתרון של המשוואה הדיפרנציאלית $y'' + 2y' + y = 0$. האם יש פיתרונות נוספים? (נסה לכפול את הפיתרון הקודם).

5. מצא פיתרון כללי של המשוואות הדיפרנציאליות הבאות

א. $y' = 5$

ב. $y' = 6x^2 + 1$, $-\infty < x < \infty$

ג. $\dfrac{y'}{x} = \dfrac{2}{x^2+1}$, $0 < x < \infty$

ד. $(y')^2 = 8y' - 15$

ה. $\dfrac{y'}{\sqrt{1-x^2}} = 2x$, $-1 < x < 1$

ו. $y'' = 1 + \sqrt{y''}$

6. פתור בעיית התחלה

א. $\begin{cases} y' = 6x^2 + 1 \\ y(3) = 1 \end{cases}$

ב. $\begin{cases} y'' = 6x + 12 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 3 \end{cases}$

ג. $\begin{cases} (y')^2 = 8y' - 15 \\ y(2) = 10 \end{cases}$

בסעיף האחרון, וודא שקיבלת שני פיתרונות שונים!

משוואות דיפרנציאליות ליניאריות מסדר ראשון

7. מצא פיתרון כללי

א. $xy' - y = -x$

ב. $y' + y = e^{-x}$

ג. $xy' + y = \sin x$

ד. $y' - y\cot(x) = \cot(x)$

ה. $x^2y - 2xy = 3$

ו. $xy' - xy = (1+x^2)e^x$

ז. $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$

ח. $xy' - ny = e^x x^{n+1}$

ט. $y' - \dfrac{y}{\sin x} = \dfrac{\tan x}{2}, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$

י. $y' + 2xy = 2x^3$

יא. $y' - y\sin x = \sin(x)\cos(x)$

יב. $xy' - 2y = 2x^4$

יג. $(2x+1)y' = 4x + 2y$

יד. $y' + y\tan(x) = \sec(x)$

טו. $(xy + e^x)dx - xdy = 0$

טז. $x^2y' + xy + 1 = 0$

יז. $y = x(y' - x\cos(x))$

יח. $(2x+y)dy = ydx + 4\ln y\, dy$

יט. $2x(x^2+y)dx = dy$

כ. $(xy' - 1)\ln x = 2y$

כא. $(x+y^2)dy = ydx$

כב. $(2e^y - x)y' = 1$

כג. $\left(\sin^2 y + x\cot y\right) y' = 1$

כד. $y' = \dfrac{y}{3x - y^2}$

משוואות דיפרנציאליות לא-ליניאריות מסדר ראשון

הפרדת משתנים, הומוגנית, ליניארית

8. מצא פיתרון כללי

א. $xy' - y = y^3$

ב. $xyy' = 1 - x^2$

ג. $y'\tan x = y$

ד. $y' - xy^2 = 2xy$

ה. $e^{-s}\left(1 + \frac{ds}{dt}\right) = 1$

ו. $y' = 10^{x+y}$

ז. $(x+1)dx+(y-1)dy=0$

ח. $\cos\sqrt{x}\,dx-\sqrt{x}\,dy=0$

ט. $\sqrt{1-x^2}dy-\sqrt{1-y^2}dx=0$

י. $e^x(1+e^y)dx+e^y(1+e^x)dy=0$

יא. $xy^3y'=x^4+y^4$

9. פתור את בעיות ההתחלה הבאות

א. $\begin{cases}(x^2-1)y'+2xy^2=0\\ y(0)=1\end{cases}$

ב. $\begin{cases}y'=3\sqrt[3]{y^2}\\ y(2)=0\end{cases}$

ג. $\begin{cases}(xy^2+x)dx+(x^2y-y)dy=0\\ y(0)=1\end{cases}$

ד. $\begin{cases}y'\sin x+y\ln y=0\\ y(\frac{\pi}{2})=1\end{cases}$

ה. $\begin{cases}2xyy'+x^2-y^2=0\\ y(1)=0\end{cases}$

ו. $\begin{cases}xy'+y-e^x=0\\ y(a)=b\end{cases}$

ז. $\begin{cases}y'-\frac{y}{1-x^2}-1-x=0\\ y(0)=0\end{cases}$

ח. $\begin{cases}y'-2y=-x^2\\ y(0)=\frac{1}{4}\end{cases}$

ט. $\begin{cases}xy'+y=2x+1, \quad x>0\\ y(1)=1\end{cases}$

י. $\begin{cases}(x-2)dx+(y-1)dy=0\\ y(2)=1\end{cases}$

יא. $\begin{cases}(1+x^2)dy-2x(y+3)dx=0\\ y(0)=-1\end{cases}$

יב. $\begin{cases}y'\sqrt{x}=\sqrt{y-x}+\sqrt{x}\\ y(4)=4\end{cases}$

יג. $\begin{cases}y'\sqrt{1-x^2}=x\\ y(1)=0\end{cases}$

יד. $\begin{cases}y'\tan x=1+y\\ y(\frac{\pi}{6})=-0.5\end{cases}$

10. מצא פיתרון כללי

א. $y'=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$

ב. $xy'-y=x\tan\frac{y}{x}$

ג. $xy'-y=(x+y)\ln\frac{x+y}{x}$

ד. $\left(x-y\cos\frac{y}{x}\right)dx+x\cos\frac{y}{x}\,dy=0$

ה. $y'-\dfrac{y}{x}=x$

ו. $x(y'-y)=e^x$

ז. $xy'+(x+1)y=3x^2e^{-x}$

ח. $xy'-2y=x^3+x$

ט. $y'\sin x-y\cos x=1$

י. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2y-x+5}{2x-y-4}$

יא. $(2x+y-3)dx+(x+y-1)dy=0$

משוואות מסדר ראשון: ברנולי, מדויקת, גורם אינטגרציה

11. מצא פיתרון כללי

א. $xy^2y'=x^2+y^2$

ב. $xy\,dy=(y^2+x)dx$

ג. $x^2y'=y(x+y)$

ד. $y'+y=xy^3$

ה. $y'+x^3\sqrt{y}=3y$

ו. $y'+\frac{y}{x}=x^2y^2$

ז. $(2-9xy^2)xdx+(4y^2-6x^3)ydy=0$

ח. $2(1+\sqrt{x^2-y})xdx-\sqrt{x^2-y}dy=0$

ט. $(1+y^2\sin 2x)dx-2y\cos^2 x\,dy=0$

י. $\dfrac{2xdx}{y^3}+\dfrac{y^2-3x^2}{y^4}dy=0$

יא. $xdx+ydy=\dfrac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$

יב. $\left(y+\dfrac{1}{1+x^2}\right)dx+\left(x-\dfrac{1}{1+y^2}\right)dy=0$

יג. $xy'-2x^2\sqrt{y}=4y$

יד. $xy^2y'=x^2+y^3$

טו. $(x+1)(yy'-1)=y^2$

12. מצא פיתרון כללי למשוואות הבאות על ידי מציאת גורם אינטגרציה מהצורה $\mu=\mu(x)$ או מהצורה $\mu=\mu(y)$.

א. $(x+y^2)dx-2xydy=0$

ב. $(x^2+y^2+x)dx+ydy=0$

ג. $y(1+xy)dx-xdy=0$

ד. $(x^2y-1)dx+(x^3+x^2\cos y)dy=0$

ה. $(2xy\ln y+y^2\cos x)dx+(x^2+y\sin x)dy=0$

13. פתור את המשוואה הבאה באמצעות גורם אינטגרציה מהצורה $\mu(x,y)=f(xy)$

$$\left(\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2y}\right)dx+\left(\frac{2}{y}+\frac{2}{xy^2}+\frac{1}{x}\right)dy=0$$

משוואות מסדר ראשון - בעיות כלליות

14. מצא פיתרון כללי

א. $(x+y)y' = y$

ב. $(x-2)y' = y^2$

ג. $y' = 2xy + x$

ד. $(x^2 + 2xy^3)dx + (y^2 + 3x^2y^2)dy = 0$

ה. $y' + y\cos x = \sin x \cos x$

ו. $(2e^x + y^4)dy - ye^x dx = 0$

ז. $\tan x \cdot \frac{dy}{dx} - y = a$

ח. $(3x^2 + 2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy - 3y^2)dy = 0$

ט. $\frac{y}{x}dx + (y^3 + \ln x)dy = 0$, $\quad 0 < x < \infty$

י. $x(y^4 - x^2)dy + y(y^4 + x^2)dx = 0$

יא. $(3x^2y + 2xy + y^3)dx + (x^2 + y^2)dy = 0$

יב. $\frac{ydx}{x} + (y^3 + \ln x)dy = 0, \quad 0 < x < \infty$

יג. $y' = \frac{3x^2 - 2xy}{x^2 - 4y^3}$

יד. $y' = \sqrt{4x + 2y - 1}$

טו. $\frac{dx}{dy} = \cos(y - x)$

טז. $2x(1 + \sqrt{x^2 - y})dx - \sqrt{x^2 - y}dy = 0$

יז. $3x^2(1 + \ln y)dx = (2y - \frac{x^3}{y})dy$

יח. $\left(y - \frac{1}{x}\right)dx - \frac{dy}{y} = 0$

יט. $y^2dx - (xy + x^3)dy = 0$

כ. $y^2dx + (xy + \tan(xy))dy = 0$

כא. $\frac{2}{3}xyy' = \sqrt{x^6 - y^4} + y^2$

כב. $x^3dy - y(x^2+y^2)dx = 0$

כג. $xy' - y = \sqrt{x^2+y^2}$

כד. $(y + \sqrt{xy})dx = xdy$

כה. $xy' = \sqrt{x^2-y^2} + y$

כו. $(2x-4y+6)dx + (x+y-3)dy = 0$

כז. $(2x+y+1)dx - (4x+2y-3)dy = 0$

כח. $x - y - 1 + (y-x+2)y' = 0$

כט. $(y+2)dx = (2x+y-4)dy$

ל. $y' = 2\left(\dfrac{y+2}{x+y-1}\right)^2$

לא. $y' = \dfrac{y+2}{x+1} + \tan\dfrac{y-2x}{x+1}$

לב. $2xy' + y = y^2\sqrt{x-x^2y^2}$

לג. $2y' + x = 4\sqrt{y}$

לד. $y + y'\ln^2 y = (x + 2\ln y)y'$

לה. $y' = \dfrac{1}{x-y^2}$

לו. $x - \dfrac{y}{y'} = \dfrac{2}{y}$

לז. $(x+y)^2y' = 1$

לח. $2x^3yy' + 3x^2y^2 + 7 = 0$

לט. $\frac{dx}{x} = \left(\frac{1}{y} - 2x\right)dy$

מ. $xy' = e^y + 2y'$

מא. $dy + (xy - xy^3)dx = 0$

מב. $\dfrac{y-xy'}{x+yy'} = 2$

מג. $(xy^4 - x)dx + (y + yx)dy = 0$

מד. $(y + \sin x)dy + (y\cos x - x^2)dx = 0$

מה. $yy' + y^2 \cot x = \cos x$

מו. $(e^y + 2xy)dx + (e^y + x)xdy = 0$

מז. $y' + x\sqrt[3]{y} = 3y$

מח. $y'\sqrt{x} = \sqrt{y-x} + \sqrt{x}$

מט. $(x\cos y + \sin 2y)y' = 1$

נ. $(4xy - 3)y' + y^2 = 1$

נא. $(2x - 2y - 1)dx - (y - x - 1)dy = 0$

נב. $y' = \dfrac{1}{x\tan(y) + e^{5\sin y}}$

נג. $(x^4 - x^4 y + x)y' = 3$, $0 < x < \infty$

15. פתור את בעיות ההתחלה הבאות

א. $\begin{cases} y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy} \\ y(2) = -2 \end{cases}$

ב. $\begin{cases} y' = 2 + \sqrt{9 - (y - 2x - 1)^2} \\ y(0) = 4 \end{cases}$

ג. $\begin{cases} (1 + x^2)y' - xy = 2x \\ y(0) = 0 \end{cases}$

ד. $\begin{cases} xy' - 3y = x^4 e^x \\ y(1) = e \end{cases}$

ה. $\begin{cases} y'\sin x - y\cos x = 1 \\ y(\pi) = 1 \end{cases}$

ו. $\begin{cases} xy' - 2y = x^3 e^x \\ y(1) = 0 \end{cases}$

ז. $\begin{cases} y' - y\tan x = \sec x \\ y(0) = 0 \end{cases}$

ח. $\begin{cases} xy' - 4y = x^2\sqrt{y} \\ y(1) = 1 \end{cases}$

ט. $\begin{cases} y' - y\tan x = y^4 \cos x \\ y(\pi) = -1 \end{cases}$

י. $\begin{cases} (2x - 1)dy = (y + 1)dx \\ y(5) = 0 \end{cases}$

יא. $\begin{cases} \frac{dy}{\sqrt{y}} + dx = \frac{dx}{\sqrt{x}} \\ y(0) = 1 \end{cases}$

יב. $\begin{cases} xy + y^2 - (2x^2 + xy)y' = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases}$

16. האם הפיתרון של בעיית ההתחלה

$$\begin{cases} y' = \sin x(y - 1) \\ y(2) = 1 \end{cases}$$

חותך את ציר־x? נמק.

רמז: נסה לנחש פיתרון קבוע למשוואה.

17. נתונה בעיית ההתחלה הבאה

$$\begin{cases} y' = \sin xy(y-2) \\ y(5) = 1 \end{cases}$$

א. הוכח כי הפיתרון של הבעייה חיובי בכל תחום ההגדרה שלו

ב. הוכח כי הפיתרון של הבעייה חסום על ידי $M = 2$ בכל תחום ההגדרה שלו

רמז: נחש שני פיתרונות קבועים לבעייה

18. נתונה משפחת העקומים $\cos y = ke^{x^2}$.

מצא משפחה אורתוגונלית למשפחה הנתונה.

19. נתונה משפחת העקומים $y^3 = -3\ln(kx)$.

מצא משפחה אורתוגונלית למשפחה הנתונה.

20. נתונה משפחת העקומים $y^2 = ke^x + x + 1$.

מצא משפחה אורתוגונלית למשפחה הנתונה.

21. נתונה משפחת העקומים $x^2 + y^2 = ky$, $-\infty < k < \infty$

א. מצא משפחה אורתוגונלית למשפחה הנתונה.

ב. מצא את העקומים משתי המשפחות שנחתכים בנקודה $(1, 2)$.

22. נתונה משפחת העקומים $x^2 + (y+k)^2 = k^2 - 1$, $|k| > 1$

א. מצא משפחה אורתוגונלית למשפחה הנתונה.

ב. מצא את המשפחה האורתוגונלית למשפחה: $x^2 + y^2 = Cy$, $-\infty < C < \infty$

ג. מצא את העקומים משתי המשפחות האורתוגונליות שנחתכים בנקודה $(1, 2)$.

23. במשפחה האורתוגונלית למשפחת העקומים

$$x^2 + y^2 = 18\ln|y| + k$$

קיים מעגל אחד ויחיד. מצא את משוואתו והסבר את דרך הפיתרון.

24. מצא עקום מישורי העובר דרך הנקודה $(1,1)$ וניצב לכל העקומים במשפחה

$$(x+k)y+kx-1=0, \quad -\infty<k<\infty$$

25. נתונה משפחת האליפסות הקנוניות

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

אשר רוחבן (בכיוון x) גדול פי שלושה מגובהן (בכיוון y). מצא את משוואת העקום האורתוגונלי למשפחה זו ועובר דרך הנקודה $(2,1)$.

26. פתור את בעיית ההתחלה

$$\begin{cases} y'+\dfrac{\ln^2 x}{\sin^2 x}=0 \\ y(4)=0 \end{cases}$$

מהו תחום ההגדרה של הפיתרון שמצאת?

27. נתונה בעיית ההתחלה

$$\begin{cases} y'=\dfrac{y^2-1}{y}\cdot\sin(x^3) \\ y(0)=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

א. הוכח כי הפיתרון שמצאת חסום מעל תחום ההגדרה שלו

ב. מהם תחומי העליה והירידה של הפיתרון?

הדרכה: שים לב כי $y=-1$ וגם $y=1$ הם שני פיתרונות של המשוואה. העזר בתכונת הזרות של משפחת הפיתרונות (תחת תנאי משפט הקיום והיחידות כמובן).

28. נתונה בעיית ההתחלה

$$\begin{cases} y'-2x=\sqrt[3]{(y-x^2-2)^2} \\ y(1)=3 \end{cases}$$

א. מצא שני פיתרונות שונים לבעייה

ב. הסבר מדוע תוצאה זו אינה סותרת את משפט הקיום והיחידות?

הדרכה: השתמש בהצבה $v(x)=y(x)-x^2-2$. בדוק פיתרונות סינגולריים.

29. נתונה בעיית ההתחלה

$$\begin{cases} y'+y(4y-8)e^{4xy}=7x^5\sin(\pi y) \\ y(1)=1 \end{cases}$$

הוכח כי הפיתרון $y(x)$ של הבעייה חסום (מלמעלה ומלמטה) מעל כל תחום ההגדרה שלו.

הדרכה: מצא שני פיתרונות קבועים למשוואה.

30. נתונה המשוואה הדיפרנציאלית

$$y' = \frac{x}{y} + \ln\left[1 + (y-x)^2\right] \cdot \ln\left[1 + \left(y - \sqrt{x^2+3}\right)^2\right]$$

מבלי לפתור את המשוואה, ענה על שתי השאלות הבאות

א. נחש שני פיתרונות שונים $y_1(x)$, $y_2(x)$ למשוואה

ב. יהי $\phi(x)$ פיתרון של המשוואה בקרן $(0,\infty)$ המקיים $\phi(1) = \frac{3}{2}$. הוכח כי

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\phi(x)}{x} = 1$$

הדרכה: בדוק מתי פונקציית $\ln$ מתאפסת?

31. נתונה בעיית ההתחלה

$$\begin{cases} y' = (2 - \sin^2 x)(y^2 - y^5) \\ y(0) = 0.25 \end{cases}$$

א. האם קיים פיתרון לבעייה? אם כן, האם הוא יחיד?

ב. אם יש פיתרון, האם קיים עבורו $\lim\limits_{x\to\infty} y(x)$?

32. נתונה המשוואה הדיפרנציאלית הבאה בצירוף תנאי התחלה

$$\begin{cases} (16 - y^2)\cos(y)dx + (y^2 + 5y - 15)dy = 0 \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

הוכח כי פיתרונה חסום על כל תחום ההגדרה שלו.

הדרכה: נסה לנחש שני פיתרונות קבועים. השתמש במשפט הקיום והיחידות.

33. נתונה המשוואה הדיפרנציאלית $y' = (x^3 + y^3)(2\cos y - 1)$.

הוכח שכל פיתרון שלה מתכנס לגבול סופי כאשר x שואף לאינסוף.

הדרכה: נסה לנחש אינסוף פיתרונות קבועים ...

34. יהי $y(x)$ פיתרון של בעיית ההתחלה

$$\begin{cases} y' = \left(y - \sqrt{2x^2+1}\right)^2 \left(y - \sqrt{2x^2+5}\right)^2 + \dfrac{2x}{y} \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

חשב את הגבול $\lim_{x\to\infty} \frac{y(x)}{x}$.

הדרכה: יש להשתמש במשפט הקיום והיחידות. בדוק פיתרונות סינגולריים.

35. נתונה המשוואה $y' = 2\sqrt{y-2x-1}\cdot e^{-\sqrt{y-2x-1}} + 2$.
מצא שני פיתרונות מפורשים (כלומר בצורה $y = f(x)$) של המשוואה המקיימים את תנאי ההתחלה $y(3) = 7$, והסבר מדוע זה לא סותר את משפט הקיום והיחידות?

36. נתונה המשוואה הדיפרנציאלית

$$y' = \frac{\sqrt{1-y^2}}{x}, \qquad 0 < x < \infty$$

מצא שני פיתרונות של המשוואה המקיימים $y(1) = 1$ והסבר מדוע זה לא סותר את משפט הקיום והיחידות?

37. יהי $y(x)$ פיתרון של בעיית ההתחלה

$$\begin{cases} y' = \dfrac{x}{4y} + \left(2y - \sqrt{x^2+1}\right)(2y - x) \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

ידוע כי $0 < \alpha < \frac{1}{2}$. חשב את הגבול $\lim_{x\to\infty} \frac{y(x)}{x}$.

38. מצא למשוואה $ydx - (x^2+y^2+x)dy = 0$ גורם אינטגרציה מהצורה $f(x^2+y^2)$. פתור את המשוואה ובטא את הפיתרון שמצאת בצורה $x = x(y)$.

39. מצא למשוואה $xdx + (y + 4y^3x^2 + 4y^5)dy = 0$ גורם אינטגרציה מהצורה $f(x^2+y^2)$.
מצא את פיתרונה הכללי.

40. נתונה המשוואה הדיפרנציאלית

$$xdy + ydx - 3x^3y^2dy = 0$$

ידוע כי למשוואה יש גורם אינטגרציה מהצורה $\mu(x,y) = x^\alpha y^\beta$.
מצא את גורם האינטגרציה.

41. נתונה המשוואה הדיפרנציאלית

$$x^3y^3(2ydx + xdy) - (5ydx + 7xdy) = 0$$

ידוע כי למשוואה יש גורם אינטגרציה מהצורה $\mu(x,y)=x^{\alpha}y^{\beta}$.
מצא את α, β, ומצא פיתרון פרטי העובר דרך הנקודה $(1,1)$.

42. נתונה המשוואה הדיפרנציאלית

$$(y^4-2x^3y)dx+(x^4-2xy^3)dy=0$$

ידוע כי למשוואה יש גורם אינטגרציה מהצורה $\mu(x,y)=x^{\alpha}y^{\beta}$.
מצא את α, β.

43. נתונה המשוואה הדיפרנציאלית

$$(-x+y-2)dx+(-5x-3y-6)dy=0$$

ידוע כי למשוואה יש גורם אינטגרציה מהצורה $\mu(x,y)=\mu(x+3y)$.
מצא את גורם האינטגרציה.

44. יהיו $y_1(x)$, $y_2(x)$, שני פיתרונות של המשוואה הדיפרנציאלית

$$y'=F(x,y)$$

בקטע (α,β), כאשר $F(x,y)$ וגם $F_y(x,y)$ מוגדרות ורציפות על כל המישור. הוכח שאם קיימת נקודה x_0 בקטע (α,β) שעבורה $y_1(x_0)<y_2(x_0)$ אז $y_1(x)<y_2(x)$ לכל נקודה x בקטע.

45. בלון אוויר שרדיוסו ההתחלתי R מאבד אוויר בקצב של $-3V(t)$ סמ"ק לשנייה, כאשר $V(t)$ הוא נפח הבלון בזמן t. לאחר כמה שניות נפח הבלון יגיע לשמינית מנפחו ההתחלתי?

46. במיכל מיים בגודל של 500 ליטרים מיים הומסו 2 ק"ג מלח באופן אחיד. לתוך המיכל מוזרמים מיים מלוחים בריכוז של 0.1 ק"ג מלח לליטר בקצב של 25 ליטרים לדקה, ובאותו הזמן אותה כמות נוזל מנוקזת מחוץ למיכל (דרך פתח אחר). חשב את ריכוז המלח לאחר 10 דקות.

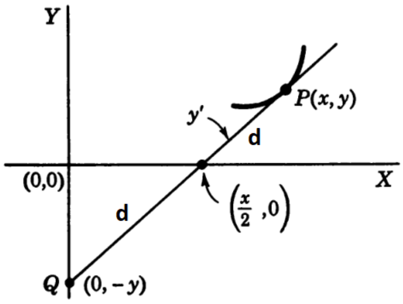
47. קצב הגידול של אוכלוסיית העולם בשנים 1975-2015 הוא $r=0.02$ לשנה. ידוע כי בשנת 1980 אוכלוסיית העולם מנתה 4 מיליארד בני אדם. מה היה גודל האוכלוסיה בשנת 2010? במידה וקצב הגידול הזה יישאר נכון גם בעתיד, מה תהיה אוכלוסיית העולם

בשנת 2050?

48. מצא את משוואת העקום המישורי אשר הנורמל שלו בכל נקודה עובר גם דרך הנקודה $(1,1)$.

49. טיפת גשם נופלת מענן שנמצא במצב מנוחה, בגובה 2 קילומטרים מעל פני הים. על טיפת הגשם פועלים שני כוחות בלבד: כוח הכבידה של כדור הארץ, חיכוך אווירי בניגוד לכיוון הנפילה שגודלו kv^2, כאשר k הוא קבוע החיכוך, $v(t)$ מהירות טיפת הגשם בזמן t שניות מאז רגע הנפילה. מצא את נוסחת המהירות של טיפת הגשם, ומתי היא תגיע לפני הים?

50. מצא את משפחת העקומים המישוריים $F(x,y)=0$, $x>0$, כך שכל משיק לעקום נחצה על ידי ציר־x בין נקודת ההשקה P ונקודת החיתוך עם ציר־y.



איור 1: כל משיק לעקום נחצה על ידי ציר־x בין נקודת ההשקה P ונקודת החיתוך עם ציר־y

51. מצא את משפחת העקומים המישוריים $F(x,y)=0$, כך שעבור כל משיק לעקום, המרחק d בין נקודת ההשקה ונקודת החיתוך עם ציר־x הוא קבוע.

52. לתוך מיכל מיים של 100 ליטר מיים מומסים 30 ק"ג מלח בטעות במקום 20 ק"ג. בכדי לתקן את הטעות, מנקזים מהמיכל 3 ליטרים של נוזל לדקה דרך פתח תחתון, בקצב קבוע. באותו זמן מזרימים לתוך המיכל 3 ליטרים מיים טהורים לדקה. בהנחה שריכוז המלח במיכל נשאר אחיד לאורך כל התהליך (על ידי עירבוב קבוע), כמה זמן יידרש בכדי להגיע לריכוז הרצוי?

53. מדחום שהיה מאוחסן בטמפרטורה של T_0 מעלות צלזיוס מוכנס לתוך אמבט מיים חמים בטמפרטורה קבועה של T מעלות בזמן $t=0$.

א. רשום משוואה דיפרנציאלית עבור פונקציית הטמפרטורה $y(t)$ של המדחום כפונקציה של הזמן t (בדקות).

ב. מצא נוסחה מפורשת עבור $y(t)$ אם ידוע שלאחר t_1 דקות המדחום הראה את הטמפרטורה T_1. יש לבטא את $y(t)$ באמצעות T, T_0, T_1, t_1, t.

54. מצא משוואה דיפרנציאלית מסדר ראשון שפיתרונה הכללי הוא $y = (x^2 + C)^3 + 1$

55. מצא את כל הפונקציות $q(x)$ אשר עבורן למשוואה

$$(x^2 + y)dx + q(x)dy = 0$$

יש גורם אינטגרציה $\mu(x) = x$.

משוואות דיפרנציאליות לינאריות מסדר $n > 1$

משוואות ליניאריות לא־הומוגניות, מקדמים קבועים

56. מצא פיתרון כללי

א. $y'' - 25y = 0$

ב. $y'' - 2y' + 2y = 0$

ג. $y'' - 5y' + 6y = 0$

ד. $y''' - y = 0$

ה. $y^{(4)} - y = 0$

ו. $y^{(4)} + 4y'' + 3y = 0$

ז. $y''' - 2y'' - 3y' = 0$

ח. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$

ט. $y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0$

57. פתור את בעיות ההתחלה הבאות

א. $\begin{cases} y'' - 5y' + 4y = 0 \\ y(0) = 5 \\ y'(0) = 8 \end{cases}$

ב. $\begin{cases} y'' + 4y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$

ג. $\begin{cases} y''' + y'' - 5y' + 3y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \\ y''(0) = -2 \end{cases}$

58. מצא פיתרון כללי

א. $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$

ב. $y'' - 5y' + 4y = 4x^2e^{2x}$

ג. $y'' - y = -x^2$

ד. $y'' + 3y' - 4y' = xe^{-x}$

ה. $y'' - y' + y = x^3 + 6$

ו. $y'' - 8y' + 7y = 14$

ז. $y'' + y' - 2y = 3xe^x$

ח. $y'' - y = 2e^x$

ט. $y^{(4)} - 2y''' + y'' = e^x$

י. $y'' - 4y' + 3y = 2 - \cos(2x) + 35\sin(2x)$

יא. $y'' + y' - 2y == 11\cos\frac{x}{2} - 7\sin\frac{x}{2}$

יב. $y'' + 5y' + 6y = -50\sin 4x$

יג. $y'' - 3y' + 2y = 2e^x\cos\frac{x}{2}$

יד. $y'' - 3y' + 2y = 2\sin x$

טו. $y'' + 4y = 12\cos 2x$

טז. $y'' + 9y = -18\cos 3x$

יז. $y'' - 4y' + 4y = x^2 + e^2x + \sin 2x$

יח. $y'' - 2y' - 8y = e^x - 8\cos 2x$

יט. $y'' - y = 2x - 1 - 3e^x$

כ. $y''' + y'' = 3xe^x + x^2 + 1$

כא. $y'' - 8y' + 20y = 5xe^{4x}\sin 2x$

כב. $y'' - 9y = e^{-3x}(x^2 + \sin 3x)$

כג. $y'' + 3y - 4y = e^{-4x} + xe^{-x}$

59. נתונה משוואה משוואה דיפרנציאלית לינארית לא הומוגנית בעלת מקדמים קבועים

$$L[y] = q(x)$$

נתון כי שורשי הפולינום האופייני של המשוואה הם

$$r_1 = -2,\ \ r_2 = -2,\ \ r_3 = -2,\ \ r_4 = 0,\ \ r_5 = 3,$$
$$r_6 = 3,\ \ r_7 = 5i,\ \ r_8 = -5i,\ \ r_9 = 6i,\ \ r_{10} = -6i$$

רשום את צורת הפיתרון הפרטי עבור כל אחד מהמקרים הבאים

א. $q(x) = x^2e^{3x}$

ב. $q(x) = 7xe^{-2x}$

ג. $q(x) = 11$

ד. $q(x) = 2\cos 4x - \sin 4x$

ה. $q(x) = \sin 5x$

ו. $q(x) = 4e^{3x} - x + \cos 6x + e^{-x}$

60. בנה משוואה דיפרנציאלית לינארית הומוגנית בעלת מקדמים קבועים שפיתרונה הכללי הוא

$$y(x) = c_1x + c_2e^{-x} + c_3e^{2x}$$

61. פתור את בעיות ההתחלה הבאות

א. $$\begin{cases} y'' - 2y' = e^{2x} + x^2 - 1 \\ y(0) = \frac{1}{8} \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

ב. $$\begin{cases} y'' + y = e^{2x} + x^2 - 1 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

ג. $$\begin{cases} y''' - y' = 3(2 - x^2) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \\ y''(0) = 1 \end{cases}$$

ד. $$\begin{cases} y'' - 2y' + y = x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

ה. $$\begin{cases} y'' - 6y' + 9y = 50\sin x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \\ y''(0) = -2 \end{cases}$$

ו. $$\begin{cases} y'' - 2y' + y = xe^x + 4 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

ז. $$\begin{cases} y'' + 2y' + y = xe^{-x} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

62. נתון כי $y_1(x)$, $y_2(x)$, פיתרונות פרטיים של המשוואה

$$y'' + 4y' + 8y = q(x)$$

כאשר $q(x)$ פונקציה רציפה על כל הישר הממשי $\mathbb{R}$.

א. הוכח כי $\lim_{x\to\infty} y_1(x) = \lim_{x\to\infty} y_2(x)$.

ב. נתון כי $y_1(0) = y_2(0)$. הוכח כי $y_1(\frac{\pi}{2}) = y_2(\frac{\pi}{2})$.

63. נתון ששלושת הפונקציות

$$y_1(x) = e^x, \quad y_2(x) = 2x, \quad y_3(x) = 3$$

הן פיתרונות של המשוואה

$$y''' + a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0$$

מהו הפיתרון הכללי של המשוואה?

64. נתונה המשוואה

$$y^{(4)} + a_3y''' + a_2y'' + a_1y' + a_0y = 3e^{\alpha x}$$

וידוע ששורשי הפולינום האופייני הם

$$r_1 = 1, \quad r_2 = 1, \quad r_3 = 1, \quad r_4 = -3$$

מצא את צורת הפיתרון הפרטי.

65. נתונה המשוואה $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$. מצא את הפיתרון המקיים $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$.

66. נתונה המשוואה $y'' + 4y = 0$. מצא את הפיתרון המקיים $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

שיטת הוריאציה של הפרמטרים, משוואת אוילר

67. מצא את הפיתרון הכללי של כל אחת מהמשוואות הבאות

א. $x^2y'' + xy' + 4y = 10x$

ב. $x^2y'' - 3xy' + 5y = 3x^2$

ג. $x^2y'' - 6y = 5x^3 + 8x^2$

ד. $x^2y'' - 2y = \sin(\ln x)$

ה. $(1+x)^2y'' - 3(1+x)y' + 4y = (1+x)^3$

ו. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$

ז. $y''+y=\dfrac{1}{\sin x}$

ח. $y''+2y'+5y=e^{-x}(\cos^2 x+\tan x)$

ט. $y'''+y'=\sin x+x\cos x$

י. $y^{(5)}+4y'=x+1+\cos 2x$

68. פתור את בעיות ההתחלה הבאות

א. $\begin{cases} x^2y''-xy'+y=2x \\ y(1)=0 \\ y'(1)=1 \end{cases}$

ב. $\begin{cases} x^2y''-3xy'+13y=0 \\ y(1)=1 \\ y'(1)=-1 \end{cases}$

69. מצא את הפיתרון הכללי של כל אחת מהמשוואות הבאות

א. $y''+y=\cot x$

ב. $y''+2y'+y=\dfrac{e^{-x}}{x}$

ג. $y''+5y'+6y=\dfrac{1}{e^{2x}+1}$

ד. $y''-4y'+5y=\dfrac{e^{2x}}{\cos x}$

ה. $y'''+y=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$

ו. $y'''+4y=\dfrac{1}{\cos 2x}$

ז. $x^2y''-xy'-3y=0$

ח. $x^2y''-2xy'+2y=x^3\sin x$

ט. $x^2y''-xy'+y=\dfrac{\ln x}{x}+\dfrac{x}{\ln x}$

י. $x^2y''-4xy'+6y=0$

יא. $(x-2)^2y''-3(x-2)y'+4y=x$

יב. $x^3y'''+xy'-y=0$

יג. $x^3y''-2xy=6\ln x$

יד. $x^2y''-2y=\sin\ln x$

70. ידוע שלמשוואה הבאה יש פיתרון פרטי בצורת פולינום ממשי ממעלה 1. מצא את הפיתרון הכללי

$$x^2y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 0$$

71. נתון שהפונקציה $y(x) = x^4 + x^4 \ln x$ היא פיתרון פרטי של המשוואה הדיפרנציאלית

$$x^2y'' + a_1xy' + a_0y = 0$$

מצא את המקדמים a_0, a_1.

72. נתונים שני פיתרונות $y_1(x)$, $y_2(x)$ של המשוואה

$$y'' - y' + ye^{2x} = 0$$

ידוע שהורונסקיאן שלהם מקיים $W(0) = 1$. מצא את $W(x)$.

73. ידוע ששלושת הפונקציות

$$\begin{cases} y_1(x) &= (x+4)\sin x \\ y_2(x) &= (x+5)\sin x \\ y_3(x) &= x\sin x + 3\cos x \end{cases}$$

הן פיתרונות של המשוואה

$$y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = q(x)$$

כאשר $p_0(x)$, $p_1(x)$, $q(x)$, רציפות על כל הישר הממשי $\mathbb{R}$. מצא פיתרון $y(x)$ של המשוואה המקיים

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

והסבר מדוע פיתרון זה יחיד על כל הישר.

74. נתונה המשוואה הדיפרנציאלית הליניארית והומוגנית

$$y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$$

כאשר $p_0(x)$, $p_1(x)$, פונקציות רציפות בקרן $[0,\infty)$. יהיו $y_1(x)$, $y_2(x)$ שני פיתרונות של המשוואה, כך ש־ $y_1(x) > 0$ בכל התחום, ו־ $y_1(0) = y_2(0)$. הוכח או הפרך את כל אחת מהטענות הבאות

א. אם $y_1(3) = y_2(3)$, אז $y_1(x) < y_2(x)$ בכל הקרן $(0,\infty)$

ב. אם $y_1(3) < y_2(3)$, אז $y_1(x) < y_2(x)$ בכל הקרן $(0,\infty)$

ג. אם $y_1(3) > y_2(3)$, אז $y_1(x) > y_2(x)$ בכל הקרן $(0,\infty)$

הדרכה: חקור את הפונקציה $h(x) = \frac{y_2(x)}{y_1(x)}$. העזר בורונסקיאן ובמשפט ערך הביניים של רול.

75. נתונה המשוואה הדיפרנציאלית ליניארית הומוגנית ממעלה 3

$$y''' + p_2(x)y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$$

כאשר $p_0(x)$, $p_1(x)$, $p_2(x)$, פונקציות רציפות בקטע (α,β), ונתונים שלושה פיתרונות של המשוואה

$$y_1(x) = xe^x, \quad y_2(x) = (x+1)e^x, \quad y_3(x) = x - 3$$

בקטע (α,β).

א. איזה נקודה מבין הנקודות הבאות <u>אינה</u> שייכת לקטע (α,β)?

$$x = 1, \quad x = 2, \quad x = 3, \quad x = 4, \quad x = 5$$

ב. ידוע שהפונקציה $p_2(x)$ מתאפסת בנקודה $x = x_0$, $\alpha < x_0 < \beta$.
מצא את הנקודה x_0.

הדרכה: השתדל להקדיש לבעייה לפחות 10 דקות מחשבה בכיוון הורונסקיאן לפני קריאת ההדרכה ...

א. בדוק באיזה נקודות הורונסקיאן של שלושת הפיתרונות מתאפס? הורונסקיאן של שלושת הפונקציות צריך לצאת $W(x) = (5-x)e^{2x}$

ב. לאחר חישוב מפורש של הורונסקיאן $W(x)$, יש להשתמש בנוסחה

$$\frac{W'(x)}{W(x)} = -p_{n-1}(x)$$

בכדי לחשב את x_0. $p_{n-1}(x)$ הוא המקדם של $y^{(n-1)}$.

76. נתונה המשוואה

$$x(x+1)y'' - 2y' - 2y = 0$$

א. הראה שהפונקציה $y_1(x) = \frac{1}{x-1}$ היא פיתרון של המשוואה.

ב. מצא פיתרון $y_2(x)$ של המשוואה המקיים $y_2'(1) = \frac{3}{2}$.

77. נתונה המשוואה

$$y^{(4)} + ay''' + by'' + cy' + ky = 0$$

כאשר a, b, c, k, קבועים ממשיים. נתון ש־$y_1(x) = 5x + 3\sin x$ הוא פיתרון של המשוואה. הוכח או הפרך את הטענות הבאות

א. $c = 0$, $k = 1$

ב. $c = 1$, $k = 1$

ג. $c = 0$, $k = 0$

ד. $k = a + b + c$

ה. $c = a + b$

78. הסבר מדוע הורונסקיאן של המשוואה

$$y''' - (e^{3x} + \cos 5x)y' + x^7 y = 0$$

הוא קבוע?

79. נתון כי $y(x)$ הוא הפיתרון של בעיית ההתחלה

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = \dfrac{1}{1+e^{-x}} \\ y(0) = \ln(4) \\ y'(0) = \ln(8) \end{cases}$$

חשב את $y(1)$.

משוואות ליניאריות כלליות

80. נתונה משוואה ליניארית בתוספת פיתרון פרטי ידוע $y_1(x)$. מצא את הפיתרון הכללי.

$(x^2+1)y'' - 2xy' + 2y = 0$, $\quad y_1(x) = x$

$x^2(x+1)y'' - 2y = 0$, $\quad y_1(x) = 1 + \frac{1}{x}$

$xy'' + 2y' - xy = 0$, $\quad y_1(x) = \frac{e^x}{x}$

$y'' - 2(1+\tan^2 x)y = 0$, $\quad y_1(x) = \tan x$

$x^2(2x-1)y''' + (4x-3)xy'' - 2xy' + 2y = 0$, $\quad y_1(x) = x$, $\quad y_2(x) = \frac{1}{x}$

$xy'' - y' + 4x^3 y = 0$, $\quad y_1(x) = \sin(x^2)$

$y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0$, $\quad y_1(x) = \frac{\sin x}{x}$

81. ידוע כי $y_1(x) = e^x$ הוא פיתרון של המשוואה $(x-1)y'' - xy' + y = 0$. עשה שימוש בפיתרון זה ובנוסחת Abel בכדי למצוא פיתרון שני שאינו תלוי ב־$y_1(x)$.

82. ידוע כי $\sin x$ הוא פיתרון של המשוואה הדיפרנציאלית

$$y^{(4)} - 2y''' + 3y'' - 2y' + 2y = 0$$

מצא את הפיתרון הכללי שלה.

83. למשוואה $6x^3y''' - 24x^2y'' + 48xy' - 48y = 0$ ידועים שני פיתרונות פרטיים

$$y_1(x) = x^2, \qquad y_2(x) = x, \qquad 0 < x < \infty$$

מצא את הפיתרון הכללי.

84. למשוואה

$$x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 0, \qquad 0 < x < \infty$$

ידוע הפיתרון $y_1(x) = x$. מצא את הפיתרון הכללי.

85. למשוואה $xy''' - y'' - xy' + y = 0$ ידועים שני פיתרונות פרטיים

$$y_1(x) = x, \qquad y_2(x) = e^x$$

מצא את הפיתרון הכללי.

הדרכה: מלבד שיטת ההצבה ($y_3(x) = v(x)y_1(x)$) להורדת סדר, ניתן להשתמש בורונסקיאן ובנוסחת אבל למציאת פיתרון שלישי בלתי תלוי.

86. נתונה המשוואה: $x^2y'' - 2y = 21\sqrt{x}$. ידוע שלמשוואה ההומוגנית המתאימה יש את הפיתרון $y(x) = x^2$. מצא את הפיתרון הכללי של המשוואה.

87. נתונה המשוואה: $x^2y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 2x^3$. ידוע שלמשוואה ההומוגנית המתאימה יש את הפיתרון $y_1(x) = x$. מצא את הפיתרון הכללי של המשוואה.

88. נתונה המשוואה הדיפרנציאלית

$$y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = q(x), \qquad -\infty < x < \infty$$

כאשר $p_0(x)$, $p_1(x)$, רציפות על כל הישר. ידוע כי

$$y_1(x) = (x+3)\cos x, \qquad y_2(x) = x\cos x, \qquad y_3(x) = 3\sin x$$

הן שלושה פיתרונות של המשוואה.

א. מצא את הפיתרון הכללי למשוואה.

ב. חשב את $p_1(x)$.

89. ידוע שהפונקציה $y(x)$ היא הפיתרון של בעיית ההתחלה

$$\begin{cases} x^2y'' + 2xy' = x\cos x, \quad 0 < x < \infty \\ y(\frac{\pi}{2}) = 0 \\ y'(\frac{\pi}{2}) = \frac{2}{\pi} \end{cases}$$

חשב את הערך של $y(\pi)$.

90. יהיו $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$, $y_4(x)$, ארבעה פיתרונות של המשוואה הדיפרנציאלית

$$y^{(4)} + \frac{1}{x}y''' + \frac{1}{x^2}y'' + \frac{1}{x^3}y' + \frac{1}{x^4}y = 0$$

ידוע כי $W[y_1, y_2, y_3, y_4](1) = 8$. חשב את $W[y_1, y_2, y_3, y_4](2)$.

הדרכה: השתמש בנוסחה $W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} p_{n-1}(t)dt}$.

הבחירה של הנקודות x_0, x, לא קשה ...

91. בדוק האם קיים פיתרון $y(x)$ עבור המשוואה הדיפרנציאלית

$$y^{(6)} + y^{(5)} - y^{(4)} - y''' = 3e^{-x}$$

המקיים $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$?

92. פתור את בעיית ההתחלה

$$\begin{cases} x^2y'' - 2y = x^2 \\ y(1) = 1 \\ y'(1) = 1 \end{cases}$$

מהו תחום ההגדרה של הפיתרון?

93. פתור את בעיית ההתחלה

$$\begin{cases} x^2y'' + xy' + 9y = 12\sin(3\ln x) \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = 0 \end{cases}$$

מהו תחום ההגדרה של הפיתרון שמצאת?

94. רשום את צורת הפיתרון הפרטי על פי שיטת השוואת המקדמים (אין צורך למצוא קבועים) עבור המשוואה

$$y''' - 4y' = 3x + 10\cos(x)$$

95. למשוואה דיפרנציאלית ליניארית הומוגנית בעלת מקדמים קבועים $L[y] = 0$ יש את הפולינום האופייני

$$P(r) = r^2(r^2+4)^2(r^2+3r-4)$$

מצא את צורת הפיתרון הפרטי עבור המשוואה הלא־הומוגנית

$$L[y] = \sin 2x + xe^x + 2e^{-4x} + 5$$

96. יהי $y(x)$ פיתרון של בעיית ההתחלה

$$\begin{cases} y'' - xy' + 3y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 6 \end{cases}$$

מצא את $y'''(6)$.

97. נתון שהפונקציה $y(x) = 3xe^x\sin(2x)$ היא פיתרון של המשוואה

$$y^{(4)} + a_3y''' + a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0$$

כאשר a_0, a_1, a_2, a_3, הם מקדמים ממשיים קבועים. חשב את a_1, a_2.

98. ידוע שהפונקציות $y_1(x) = \dfrac{\sqrt{\pi} + 3\cos x}{\sqrt{x}}$, $y_2(x) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{x}}$ הן שני פיתרונות של המשוואה

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \tfrac{1}{4})y = q(x), \quad 0 < x < \infty$$

כאשר $q(x)$ פונקציה רציפה בקרן $(0, \infty)$. מצא את הפיתרון הפרטי עבור בעיית

ההתחלה

$$\begin{cases} x^2y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = q(x), & 0 < x < \infty \\ y(\pi) = 0 \\ y'(\pi) = 1 \end{cases}$$

99. רשום צורה כללית של פיתרון פרטי עבור המשוואה

$$x^3y''' + xy' - y = (x + \sqrt{x}) \ln x$$

100. באמצעות שיטת הוריאציה של הפרמטרים, מצא נוסחה לפיתרון הכללי של המשוואה

$$y'' + y = q(x)$$

כאשר $q(x)$ היא פונקציה רציפה כלשהי בקטע נתון.

101. נתונה המשוואה הדיפרנציאלית הליניארית ההומוגנית

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

כאשר $p(x)$, $q(x)$, פונקציות רציפות על כל הישר הממשי. יהיו $y_1(x)$, $y_2(x)$, שני פיתרונות בלתי תלויים ליניארית של המשוואה. לגבי כל טענה, אם היא נכונה הוכח אותה, ואם לא, הפרך אותה על ידי דוגמא מתאימה

א. הגרפים של $y_1(x)$, $y_2(x)$, אף פעם אינם נחתכים

ב. הגרפים של $y_1(x)$, $y_2(x)$, עשויים להיחתך, אך אינם יכולים להשיק זה לזה

ג. אם $y_1(x) > 0$ לכל x ממשי, אז הגרפים של שני הפיתרונות נחתכים לכל היותר פעם אחת

ד. הגרפים של $y_1(x)$, $y_2(x)$, עשויים להיחתך אינסוף פעמים

פיתרון משוואות באמצעות טורי חזקות

102. מצא פיתרון בצורת טור חזקות עבור כל אחת מהבעיות הבאות

א. $(1 + x^2)y'' + x^3y = 0$

ב.
$$\begin{cases} y'' - 2x^2y' + 4xy = x^2 + 2x + 2 \\ y(0) = 3 \\ y'(0) = 12 \end{cases}$$

ג. $$\begin{cases} (1-x^2)y''-2xy'+2y=0 \\ y(0)=1 \\ y'(0)=0 \end{cases}$$

ד. $(x^2+4)y''+xy=x+2$

ה. $$\begin{cases} y''+xy'+(2x-1)y=0 \\ y(-1)=2 \\ y'(-1)=-2 \end{cases}$$

ו. $$\begin{cases} y''-2xy'+8y=1 \\ y(0)=1 \\ y'(0)=0 \end{cases}$$

ז. $$\begin{cases} (1-x^2)y''+12y=0 \\ y(0)=0 \\ y'(0)=1 \end{cases}$$

ח. $$\begin{cases} y''-(x-1)y'-y=0 \\ y(1)=1 \\ y'(1)=0 \end{cases}$$

103. נתונה המשוואה הדיפרנציאלית $y''-xy'+5y=x+1$

א. מצא פיתרון כללי בצורת טור חזקות.
רשום את כל איברי הטור עד החזקה השישית (x^6).

ב. מצא פיתרון פרטי מלא המקיים $y(0)=0$, $y'(0)=3$.

ג. מהו סכום המקדמים a_3+a_5 כאשר $y(0)=0$, $y'(0)=3$?

104. יהי $y(x)$ הפיתרון של בעיית ההתחלה

$$\begin{cases} y''-2xy'+10y=0 \\ y(0)=0 \\ y'(0)=3 \end{cases}$$

חשב את $y(\frac{1}{2})$.

105. יהי $y(x)$ הפיתרון של בעיית ההתחלה

$$\begin{cases} y'' - xy' - y = 0 \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = 1 \end{cases}$$

חשב את פיתרון טור החזקות $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$ עד החזקה השביעית $(x-1)^7$.

106. יהי $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ הפיתרון של בעיית ההתחלה

$$\begin{cases} y'' + x^4 y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

בדוק את נכונות או אי־נכונות הטענות הבאות

א. $a_1 = 0$

ב. $a_n = \frac{(-1)^n}{n! 6^n}$

ג. רדיוס ההתכנסות של הטור הוא $R = 1$

ד. $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 0$

ה. $a_6 = \frac{1}{30}$

ו. $a_7 = \frac{1}{210}$

ז. $y(x) - 1$ היא פונקציה אי־זוגית

107. יהי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ טור חזקות שהוא פיתרון לבעיית ההתחלה

$$\begin{cases} y'' - 2(x^2+1)y' - 6xy = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

מצא את נוסחת הנסיגה של הטור, ומצא את ארבעת האיברים הראשונים של הטור שאינם אפס.

.108 יהי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ טור חזקות שהוא פיתרון לבעיית ההתחלה

$$\begin{cases} (10-x^3)y'' + 5xy = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

חשב את המקדמים a_3, a_4, a_5.

.109 יהי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$ טור חזקות שהוא פיתרון לבעיית ההתחלה

$$\begin{cases} (x^2-2x)y'' - 2y = 0 \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = -1 \end{cases}$$

מצא את נוסחת הנסיגה של המקדם a_{n+2}.

.110 יהי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ טור חזקות שהוא פיתרון לבעיית ההתחלה

$$\begin{cases} y'' - 2xy' + my = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

מצא עבור אילו ערכים של m הפיתרון של המשוואה יוצא פולינום ממעלה סופית, ומהי מעלת הפולינום המתאים לכל ערך m כזה?

.111 בנה פיתרון בצורת טור חזקות סביב הנקודה $x=-2$ עבור המשוואה $y'' + xy = 0$.
רשום את הפיתרונות עבור תנאי ההתחלה הבאים עד החזקה הרביעית

א. $y(-2) = 0$, $y'(-2) = 1$

ב. $y(-2) = 1$, $y'(-2) = 0$

.112 נתון כי הפונקציה $y(x) = x^2\sin(3x)$ היא פיתרון של המשוואה הדיפרנציאלית הליניארית

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = 0$$

כאשר כל המקדמים a_i הם קבועים ממשיים.

א. מצא מהו הערך המינימלי של n?

ב. מצא בסיס למרחב הפיתרונות של המשוואה עבור הערך של n שמצאת בסעיף הקודם

ג. מצא את כל המקדמים של המשוואה

התמרת לפלס

הגדרה ושימוש בסיסי

113. האם קיימת התמרת לפלס עבור הפונקציה $f(t) = e^{t^2}$? אם היא קיימת, מצא אותה, ומצא היכן היא מוגדרת. אם לא, נמק מדוע היא אינה קיימת.

114. מצא את ההתמרת לפלס של $f(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 \le t \le 2\pi \\ 0, & 2\pi < t \end{cases}$.

115. הוכח שאם $f : [0,\infty) \to \mathbb{C}$ רציפה למקוטעין ומחזורית p ($p > 0$), אזי

$$\mathscr{L}\left[f\right](s) = \frac{1}{1 - e^{-ps}} \int_0^p e^{-st} f(t)\, dt$$

116. תהי $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ פונקציה מחזורית 4 כך ש־

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le 2 \\ -1, & 2 < t \le 4 \end{cases}$$

הוכח כי

$$\mathscr{L}\left[f\right](s) = \frac{\tanh s}{s}$$

117. חשב את התמרת לפלס של כל אחת מן הפונקציות הבאות:

א. $e^{-t}\cos 2t$ **ב.** $e^{-4t}\cosh 2t$

ג. $(t^2+1)^2$ **ד.** $3\cosh t - 4\sinh 5t$

ה. $t^n \sin t$ **ו.** $\dfrac{1}{(t-a)(t-b)}$

ז. $\dfrac{3}{2t-1}$ **ח.** $\dfrac{5}{(t+2)^2+9}$

118. הבע כל פונקציה ע"י פונקציות מסוג הביסייד ומצא אחר כך את התמרות לפלס של:

א. $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 1 \\ 0, & 1 \le t < 2 \\ 1, & 2 \le t < 3 \\ 0, & 3 \le t < \infty \end{cases}$ **ב.** $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 2 \\ (t-2)^2, & 2 \le t < \infty \end{cases}$

ג. $f(t)=\begin{cases}1, & 0\le t<1\\ t^2-2t+2, & 1\le t<\infty\end{cases}$ **ד.** $f(t)=\begin{cases}0, & 0\le t<\pi\\ t-\pi, & \pi\le t<2\pi\\ 1, & 2\pi\le t<\infty\end{cases}$

ה. $f(t)=\begin{cases}1, & 0\le t<1\\ 0, & 1\le t<\infty\end{cases}$ **ו.** $f(t)=\begin{cases}1, & 0\le t<2\\ t-3, & 2\le t<3\\ -1, & 3\le t<\infty\end{cases}$

119. חשב את התמרת לפלס של $f(t)=\dfrac{\sin t}{t}$. (רמז: חשב את $\frac{d}{ds}\mathscr{L}[f](s)$.)

120. חשב את f אם ידוע כי $\mathscr{L}[f](s)=\dfrac{d^n}{ds^n}\left[\dfrac{1}{s^2-a^2}\right]$, $a>0$.

121. הוכח את כל אחת מן הנוסחאות הבאות:

א. $\mathscr{L}\left[\sin^2 t\right](s)=\dfrac{2}{s(s^2+4)}$

ב. $\mathscr{L}\left[A\cos(\omega t+\theta)\right](s)=\dfrac{A(s\cos\theta-\omega\sin\theta)}{s^2+\omega^2}$

ג. $\mathscr{L}\left[\cos at\cosh at\right](s)=\dfrac{s^3}{s^4+4a^4}$

ד. $\mathscr{L}\left[(t^2-5t+6)e^{2t}\right]=\dfrac{6s^2-29s+36}{(s-2)^3}$

122. על ידי שימוש בהגדרה והתכונות של התמרת לפלס, חשב את כל אחד מן האינטגרלים הבאים:

א. $\displaystyle\int_0^\infty te^{-2t}\cos t\,dt$ **ב.** $\displaystyle\int_0^\infty t^3e^{-t}\sin t\,dt$

ג. $\displaystyle\int_0^\infty x^4e^{-x}dx$ **ד.** $\displaystyle\int_0^\infty x^6e^{-3x}dx$

123. לכל $t\ge 0$, תהי $f(t)=\displaystyle\int_0^t\frac{\sin u}{u}\,du$. הוכח כי

$$\mathscr{L}[f](s)=\frac{1}{s}\arctan\frac{1}{s}$$

124. לכל $t\ge 0$, תהי $f(t)=\displaystyle\int_t^\infty\frac{\cos u}{u}\,du$. הוכח כי

$$\mathscr{L}[f](s)=\frac{\ln(1+s^2)}{2s}$$

125. לכל $t \geq 0$, תהי $f(t) = \int_t^\infty \frac{e^{-u}}{u}\, du$. הוכח כי

$$\mathscr{L}[f](s) = \frac{\ln(1+s)}{s}$$

126. לכל $t \geq 0$, תהי $f(t) = \int_0^t \frac{1-e^{-u}}{u}\, du$. הוכח כי

$$\mathscr{L}[f](s) = \frac{1}{s}\ln\left(1+\frac{1}{s}\right)$$

127. חשב את התמרת לפלס ההפוכה של כל אחת מן הפונקציות הבאות:

א. $\dfrac{3s-14}{s^2-4s+18}$ **ב.** $\dfrac{1}{s^2(s^2+1)}$

ג. $\dfrac{1}{s^2-3s+2}$ **ד.** $\dfrac{s^2}{(s^2+4)^2}$

ה. $\dfrac{s}{(s^2+4)^2}$ **ו.** $\ln\left(1+\dfrac{1}{s^2}\right)$

ז. $\dfrac{1}{(s^2+4)^2}$ **ח.** $\dfrac{s^3}{s^4-16}$

ט. $\dfrac{1}{s^4+1}$ **י.** $\dfrac{2s^2+s-10}{(s-4)(s^2+2s+2)}$

שימושים למשוואות דיפרנציאליות

128. לכל אחת מהמשוואות הדיפרנציאליות הבאות, מצא פתרון פרטי בקטע $[0,\infty)$ המקיים את תנאי ההתחלה המצורפים.

א. $y'' + 3y' - 4y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = -2$

ב. $y'' - y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$

ג. $y'' + 4y' + 4y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

ד. $y'' + 4y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1$

ה. $y'' + 4y' + 7y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$

ו. $ty''(t) + 2y'(t) + ty(t) = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

129. חשב את התמרת לפלס של כל אחת מן הפונקציות הבאות:

א. $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq T \\ 0, & t > T \end{cases}$

ב. $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq 1 \\ (t-1)^2, & t > 1 \end{cases}$

ג. $f(t)=\begin{cases} t^2, & 0\le t<2 \\ 4t, & t\ge 2 \end{cases}$

ד. $f(t)=\begin{cases} t, & 0\le t\le 7 \\ 3-t, & 7<t<8 \\ 1, & 8\le t \end{cases}$

ה. $f(t)=\begin{cases} 5, & a\le t<b \\ 0, & t<a \text{ or } t\ge b \end{cases}$

ו. $f(t)=\begin{cases} 1, & 1\le t<4 \\ 4, & t\ge 4 \end{cases}$

ז. $f(t)=\begin{cases} t-1, & 1\le t<3 \\ 8-2t, & 3\le t<4 \end{cases}$

ח. $u_1(t)+3u_5(t)$

ט. $f(t)=\begin{cases} 0, & t<1 \\ 2, & 1\le t<2 \\ 0, & 2\le t<\infty \end{cases}$

י. $f(t)=\begin{cases} \cos 2t, & 0\le t<\pi \\ 0, & \pi\le t<\infty \end{cases}$

130. חשב את ההתמרת לפלס ההפוכה של כל אחת מן הפונקציות הבאות.

א. $\dfrac{e^{-s}(1-e^{-s})}{s(s^2+1)}$ ב. $\dfrac{e^{-16s}}{s(s^2+2s+4)}$

131. לכל אחת מהמשוואות הדיפרנציאליות הבאות, מצא פתרון פרטי בקטע $[0,\infty)$ המקיים את תנאי ההתחלה המצורפים.

$$y''(t)+4y'(t)+7y(t)=u_1(t), \qquad y(0)=1, \quad y'(0)=0$$

$$y''(t)-2y'(t)+y(t)=(-1)^{[t]}, \qquad y(0)=0, \quad y'(0)=0$$

$$y'''(t)-y(t)=h(t), \qquad y(0)=y'(0)=0, \quad y''(0)=1$$

כאשר

$$h(t)=\begin{cases} 1, & \pi\le t\le 2\pi \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

קונבולוציה

132. חשב את ההתמרת לפלס של הפונקציה

$$f(t)=\int_0^t (u^2-u+e^{-u})\,du$$

133. לכל אחת מהמשוואות הדיפרנציאליות הבאות, מצא פתרון פרטי בקטע $[0,\infty)$ המקיים את תנאי ההתחלה המצורפים.

א. $y''(t)+y(t)=g(t), \qquad y(0)=0, \quad y'(0)=0$

כאשר

$$g(t)=\begin{cases} t, & 0\le t<1 \\ 1, & 1\le t \end{cases}$$

ב. $y''(t)+2y'(t)-3y(t)=f(t), \qquad y(0)=1, \quad y'(0)=0$

כאשר

$$f(t)=\begin{cases} 0, & 0\le t\le 2\pi \\ \sin t, & t>2\pi \end{cases}$$

ג. $y'''(t)-y''(t)+4y'(t)-4y(t)=68e^{x}\sin 2x$,

$y(0)=1, \quad y'(0)=-19, \quad y''(0)=-37$

ד. $y''(t)+9y(t)=f_c(t), \qquad y(0)=a, \quad y'(0)=b$

כאשר עבור $c>0$,

$$f_c(t)=\begin{cases} 0, & 0\le t\le c \\ t-c, & c<t \end{cases}$$

ה. $y''-2y'+2y=\cos t$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$

134. פתור את בעיות ההתחלה הבאות באמצעות התמרת לפלס

א.
$$\begin{cases} y''+2y'+y=4e^{t} \\ y(0)=2 \\ y'(0)=-1 \end{cases}$$

ב.
$$\begin{cases} y''+y=u_{3\pi}(t) \\ y(0)=1 \\ y'(0)=0 \end{cases}$$

ג.
$$\begin{cases} y''+4y=\sin t-u_{2\pi}(t)\sin(t-2\pi) \\ y(0)=1 \\ y'(0)=0 \end{cases}$$

ד.
$$\begin{cases} y''+y'+\frac{5}{4}y=t-u_{\frac{\pi}{2}}(t)(t-\frac{\pi}{2}) \\ y(0)=1 \\ y'(0)=0 \end{cases}$$

ה.

$$\begin{cases} y'' + y = \begin{cases} 1, & 0 \le t < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} \le t < \infty \end{cases} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

ו.

$$\begin{cases} y'' - 6y' + 15y = 2\sin 3t \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = -4 \end{cases}$$

ז.

$$\begin{cases} y'' - y' - 2y = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 1 \\ 0, & 1 \le t \end{cases} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

ח.

$$\begin{cases} y'' - y = \begin{cases} 0, & 0 \le t < \frac{\pi}{2} \\ \sin t, & \frac{\pi}{2} \le t \end{cases} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

ט.

$$\begin{cases} y'' + 3y' + 2y = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 10 \\ 0, & 10 \le t \end{cases} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

י.

$$\begin{cases} y^{(4)} - y = u_1(t) - u_2(t) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \\ y''(0) = 0 \\ y'''(0) = 0 \end{cases}$$

135. תהי $y_1(t)$ פתרון של הבעייה

$$y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = f_1(t), \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1, \quad (t \ge 0)$$

ותהי $y_2(t)$ פתרון של הבעייה

$$y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = f_2(t), \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1, \quad (t \ge 0)$$

כאשר נתון ש־ $f_1(t) \le f_2(t)$, לכל $t \ge 0$, ושהפונקציות f_1 ו־ f_2 רציפות וחסומות בקטע $[0,\infty)$. הוכח כי $y_1(t) \le y_2(t)$ עבור כל $t \ge 0$.

התמרה הפוכה

136. על ידי שימוש בנוסחת ההתמרה ההפוכה, חשב את

א. $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{\cosh a\sqrt{s}}{s\cosh\sqrt{s}}\right]$, $0 < a < 1$

ב. $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{(1+s^2)^2}\right]$

ג. $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^3(1+s^2)}\right]$

ד. $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{s}{(1+s^2)^3}\right]$

ה. $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s\sqrt{1+s}}\right]$

ו. $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{\sqrt{s}}{s-1}\right]$

ז. $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s(e^s+1)}\right]$

ח. $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{(s+2)^2(s^2+4)}\right]$

מערכות של משוואות ליניאריות

137. מצא פיתרון כללי עבור כל מערכת משוואות

א. $\begin{cases} x'(t) = x(t) - 3y(t) \\ y'(t) = 3x(t) + y(t) \end{cases}$

ב. $\begin{cases} x'(t) + x(t) + 5y(t) = 0 \\ y'(t) - x(t) - y(t) = 0 \end{cases}$

ג. $\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + y(t) \\ y'(t) = 3x(t) + 4y(t) \end{cases}$

ד. $\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) - 3x_2(t) \\ x_2'(t) = 3x_1(t) + x_2(t) \end{cases}$

ה. $\begin{cases} x_1'(t) = 7x_1(t) + 3x_2(t) \\ x_2'(t) = 6x_1(t) + 4x_2(t) \end{cases}$

ו. $\begin{cases} x_1'(t) = 5x_1(t) - 2x_2(t) \\ x_2'(t) = 4x_1(t) - x_2(t) \end{cases}$

ז. $\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$

ח. $\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -5 & -3 \end{pmatrix} \vec{x}(t)$

ט. $\begin{cases} x'(t) = y(t) - 5\cos t \\ y'(t) = 2x(t) + y(t) \end{cases}$

י. $\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + y(t) + \cos t \\ y'(t) = -x(t) + 2\sin t \end{cases}$

יא. $\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x}(t) + \begin{pmatrix} e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

יב. $\begin{cases} x'(t) = x(t) - y(t) + z(t) \\ y'(t) = x(t) + y(t) - z(t) \\ z'(t) = 2x(t) - y(t) \end{cases}$

יג. $\vec{x}'(t)=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}\vec{x}(t)$

יד. $\vec{x}'(t)=\begin{pmatrix}1&-2&-1\\-1&1&1\\1&0&-1\end{pmatrix}\vec{x}(t)$

טו. $\vec{x}'(t)=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&1\\4&-1&4\end{pmatrix}\vec{x}(t)$

טז. $\begin{cases}x'(t)=2x(t)+y(t)\\y'(t)=x(t)+3y(t)-z(t)\\z'(t)=2y(t)+3y(t)-x(t)\end{cases}$

יז. $\vec{x}'(t)=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&1&0\\3&0&1\end{pmatrix}\vec{x}(t)$

יח. $\begin{cases}x'(t)=x(t)-2y(t)-z(t)\\y'(t)=y(t)-x(t)+z(t)\\z'(t)=x(t)-z(t)\end{cases}$

יט. $\begin{cases}x'(t)=2x(t)-y(t)+z(t)\\y'(t)=x(t)+2y(t)-z(t)\\z'(t)=x(t)-y(t)+2z(t)\end{cases}$

כ. $\begin{cases}x'(t)=x(t)+2y(t)+16te^t\\y'(t)=2x(t)-2y(t)\end{cases}$

כא. $\vec{x}'(t)=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\vec{x}(t)+\begin{pmatrix}te^t\\te^{2t}\\e^{3t}\end{pmatrix}$

כב. $\vec{x}'(t)=\begin{pmatrix}2&2&2\\2&2&2\\2&2&2\end{pmatrix}\vec{x}(t)+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

138. פתור את בעיות ההתחלה הבאות

א. $\begin{cases}x'(t)=2x(t)+y(t)\\y'(t)=x(t)+2y(t)\end{cases}\quad\Bigg|\quad\begin{matrix}x(0)=1\\y(0)=3\end{matrix}$

ב. $\begin{cases}x'(t)=y(t)+t\\y'(t)=x(t)+e^t\end{cases}\quad\Bigg|\quad\begin{matrix}x(0)=1\\y(0)=0\end{matrix}$

ג. $\vec{x}'(t)=\begin{pmatrix}3&-1\\4&-1\end{pmatrix}\vec{x}(t)$, $\quad\vec{x}(0)=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

ד. $\begin{cases}x'(t)-x(t)-5y(t)=1\\y'(t)+2x(t)+y(t)=e^t\end{cases}\quad\Bigg|\quad\begin{matrix}x(0)=0\\y(0)=0\end{matrix}$

ה. $\begin{cases}x'(t)=y(t)-5\cos t\\y'(t)=2x(t)+y(t)\end{cases}\quad\Bigg|\quad\begin{matrix}x(0)=0\\y(0)=0\end{matrix}$

ו. $\begin{cases}x'(t)=y(t)+t\\y'(t)=x(t)+e^t\end{cases}\quad\Bigg|\quad\begin{matrix}x(0)=1\\y(0)=0\end{matrix}$

139. נתונה המערכת

$$\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} c & 1 & c \\ 1 & c & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \vec{x}(t)$$

מצא את כל הערכים של c עבורם כל פיתרון $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$ של המערכת חסום על כל הקרן $(0,\infty)$.