משוואות דיפרנציאליות רגילות 104131 - תקציר

משוואות דיפרנציאליות ליניאריות מסדר ראשון

צורה נורמלית: $y' + a(x)y = b(x)$

תנאים: $a(x)$, $b(x)$ פונקציות רציפות בקטע (α, β).

גורם אינטגרציה: $\mu(x) = e^{\int a(x)\, dx}$

פיתרון כללי: $y(x) = \frac{1}{\mu(x)}\left[\int \mu(x)b(x)\, dx + C\right]$

משפט 1: **(משפט הקיום והיחידות עבור משוואה ליניארית מסדר ראשון)**
נתונה משוואה ליניארית מסדר ראשון עם תנאי התחלה

$$\begin{cases} y' + a(x)y = b(x), & (\alpha < x < \beta) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

כאשר

א. $a(x)$, $b(x)$ פונקציות רציפות בקטע (α, β)

ב. $\alpha < x_0 < \beta$

אזי קיימת פונקציה **אחת ויחידה** $y(x)$ שפותרת את המשוואה בתחום (α, β) ובנוסף $y(x_0) = y_0$.

משוואות דיפרנציאליות לא-ליניאריות מסדר ראשון

משוואות פרידות

הגדרה 1: משוואה דיפרנציאליות מסדר ראשון $y' = f(x, y)$ נקראת משוואה **פרידה (separable)** אם ניתן לפרק את $f(x, y)$ למכפלת פונקציה של x עם פונקציה של y

$$\frac{dy}{dx} = a(x)b(y)$$

או באופן שקול

$$A(x)dx = B(y)dy$$

שיטת פיתרון: בצע אינטגרציה על שני האגפים

$$\int A(x)dx = \int B(y)dy$$

לרוב מתקבל פיתרון כללי בצורה סתומה. בחלק מהמקרים יש לחפש גם פיתרונות סינגולריים (פיתרונות מעטפת).

שיטות הצבה

משוואות מטיפוס הומוגני (Homogeneous differential equation):

צורה נורמלית: $y' = F\left(\frac{y}{x}\right)$

שיטת פיתרון: ההצבה $v = \frac{y}{x}$ תהפוך את המשוואה לפרידה

משוואת ברנולי: $y' + p(x)y = q(x)y^n$

תנאים: $p(x)$, $q(x)$ פונקציות רציפות בקטע פתוח (α, β)

שיטת פיתרון:

א. אם $n = 0$ אז זו משוואה ליניארית מסדר ראשון: $y' + p(x)y = q(x)$

ב. אם $n = 1$ אז זו משוואה ליניארית הומוגנית (פרידה): $y' + [p(x) - q(x)]y = 0$

ג. אם $n \neq 0, 1$ אז ההצבה $v(x) = y(x)^{1-n}$ (או $y(x) = v(x)^{\frac{1}{1-n}}$) תהפוך אותה לליניארית

מנת קווים ישרים: $y' = \dfrac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}$

שיטת פיתרון:

א. אם $c_1 = c_2 = 0$ מקבלים משוואה מטיפוס הומוגני (לכן ההצבה $v = \frac{y}{x}$ פותרת את הבעייה).

ב. אם הישרים אינם מקבילים (כלומר $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$) אז למערכת הבאה

$$\begin{aligned} a_1\alpha + b_1\beta &= c_1 \\ a_2\alpha + b_2\beta &= c_2 \end{aligned}$$

יש פיתרון עבור α, β, ואז ההצבה

$$\begin{cases} \hat{x} = x + \alpha \\ \hat{y} = y + \beta \end{cases}$$

תהפוך את המשוואה להומוגנית במשתנים $\hat{x}$, $\hat{y}$.

ג. אם הישרים מקבילים ($a_1b_2 - a_2b_1 = 0$) אז ההצבה $v = a_1x + b_1y + c_1$ (או $v = a_2x + b_2y + c_2$)
תהפוך את המשוואה המקורית למשוואה לפרידה.

משוואת פונקציית ישר: $y' = F(ax + by + c)$

שיטת פיתרון: ההצבה $v = ax + by + c$ תהפוך את המשוואה לפרידה

משוואות מדויקות

צורה נורמלית: $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$

תנאי: קיימת פונקציית פוטנציאל $F(x, y)$ כך ש: $F_x = M(x, y)$, $F_y = N(x, y)$

פיתרון כללי: $F(x, y) = C$

קריטריון בדיקה:

> **משפט 2:** יהיו $M(x, y)$, $N(x, y)$ שתי פונקציות גזירות ברציפות בתחום פשוט קשר $\mathscr{D}$ (על פי שני המשתנים).
> אזי המשוואה $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ מדויקת אם ורק אם $M_y = N_x$.

שיטת פיתרון:

א. חשב את האינטגרל $\int M(x, y)\,dx$ וקבל ביטוי $F(x, y) + h(y)$

ב. את $h(y)$ נמצא על ידי גזירת הביטוי $F(x, y) + h(y)$ לפי y, והשוואה ל־$N(x, y)$:

$$F_y + h'(y) = N(x, y)$$

גורמי אינטגרציה עבור משוואות מדויקות

פונקציה $\mu(x, y)$ נקראת גורם אינטגרציה של המשוואה $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$

אם $\mu(x, y)M(x, y)dx + \mu(x, y)N(x, y)dy = 0$

היא משוואה מדויקת.

גורם אינטגרציה μ חייב לקיים את השוויון: $(\mu M)_y = (\mu N)_x$

תנאי לקיום גורם אינטגרציה מהצורה $\mu = \mu(x)$: הביטוי $\frac{M_y - B_x}{N}$ תלוי ב־ x בלבד

תנאי לקיום גורם אינטגרציה מהצורה $\mu = \mu(y)$: הביטוי $\frac{N_x - M_y}{M}$ תלוי ב־ y בלבד

תנאי לקיום גורם אינטגרציה מהצורה $\mu(x, y) = f(xy)$: הביטוי $\frac{N_x - M_y}{xM - yN}$ הוא פונקציה של xy

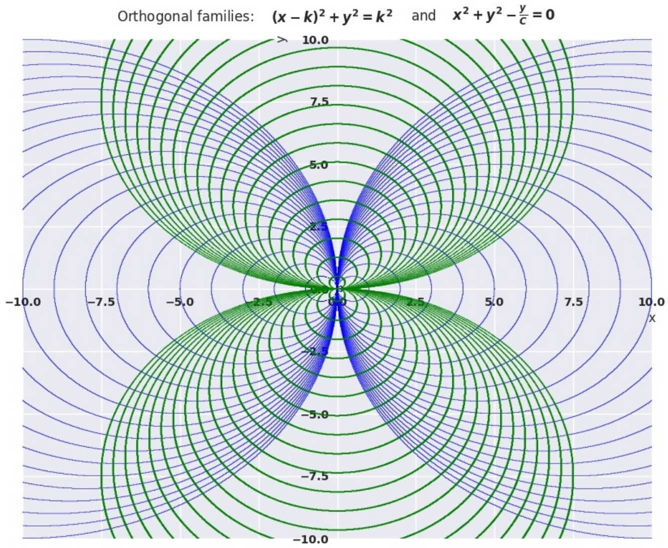
תנאי לקיום גורם אינטגרציה מהצורה $\mu(x, y) = x^m y^n$:

קיימים קבועים m, n, אשר עבורם מתקיים $\frac{nM}{y} + M_y = \frac{mN}{x} + N_x$

תנאי לקיום גורם אינטגרציה מהצורה $\mu(x, y) = f(x^2 + y^2)$: הביטוי $\frac{M_y - N_x}{2xN - 2yM}$ הוא פונקציה של $x^2 + y^2$.

הערה חשובה: לאחר תוצאה חיובית של כל אחת מהבדיקות הנ"ל יש להציב את הצורה המבוקשת של μ במשוואה $(\mu M)_y = (\mu N)_x$ ולקבל משוואה דיפרנציאלית בנעלם μ! יש למצוא פיתרון פרטי בלבד עבור המשוואה ולכפול את המשוואה המקורית שלנו ב־ μ. יש לוודא שהמשוואה החדשה מדויקת לפני שפותרים אותה.

משפחות אורתוגונליות של עקומים



איור 1: משפחת המעגלים $x^2 + (y - c)^2 = c^2$ אורתוגונלית למשפחת המעגלים $(x - k)^2 + y^2 = k^2$

א. שני עקומים הנחתכים בנקודה (x_0, y_0) נקראים **אורתוגונליים בנקודה** (x_0, y_0) (ניצבים) אם הם נחתכים בנקודה (x_0, y_0) והישרים המשיקים לשני העקומים בנקודה (x_0, y_0) ניצבים אחד לשני.

ב. שני עקומים נקראים **אורתוגונליים** אם הם אורתוגונליים בכל נקודות החיתוך שלהם.

טענה: העקומים $y = f(x)$, $y = g(x)$ אורתוגונליים בנקודה (x_0, y_0) אם ורק אם $y_0 = f(x_0)$, $y_0 = g(x_0)$, $f'(x_0)g'(x_0) = -1$

הגדרה: משפחת עקומים $G(x, y, c) = 0$ נקראת משפחה אורתוגונלית למשפחת עקומים נתונה $F(x, y, k) = 0$ אם כל עקום מהמשפחה G אורתוגונלי לכל עקום מהמשפחה F.

שיטת פיתרון:

א. **חילוץ אינדקס:** בטא את k באמצעות x, y (האינדקס של העקום במשפחה F העובר דרך הנקודה (x, y))

ב. בצע גזירה סתומה של $F(x, y, k) = 0$ ובטא את השיפוע y' באמצעות x, y, k.

ג. החלף את k בביטוי שקיבלת בסעיף א' וקבל מד"ר $y' = H(x, y)$

ד. המשפחה האורתוגונלית היא הפיתרון הכללי של $y' = -\frac{1}{H(x,y)}$

הערה: לדוגמאות והסברים של "המרשם" הנ"ל מומלץ להסתכל על פרק 3 של חוברת ההרצאות:

משפט הקיום והיחידות עבור משוואות מסדר ראשון

משפט 3: נתונה בעיית התחלה מסדר ראשון

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{1}$$

אם הפונקציות $f(x,y)$, $f_y(x,y)$ רציפות בתוך מלבן נתון במישור:

$$\alpha < x < \beta, \quad \gamma < y < \delta$$

שמכיל את הנקודה (x_0,y_0) , אזי קיים תת־קטע (x_0-h,x_0+h) של הקטע (α,β) שבו קיים פיתרון $\phi(x)$ **אחד ויחיד** של בעיית ההתחלה שלנו.
כלומר,

$$\begin{cases} \phi'(x) = f(x,\phi(x)), \quad (x_0-h<x<x_0+h) \\ \phi(x_0) = y_0 \end{cases}$$

הגירסה השנייה של משפט הקיום והיחידות מספקת מידע חשוב לגבי הגודל האפשרי של הקטע שעליו קיים הפיתרון היחיד

משפט 4: **(משפט הקיום והיחידות מורחב)**
נתונה בעיית התחלה מסדר ראשון

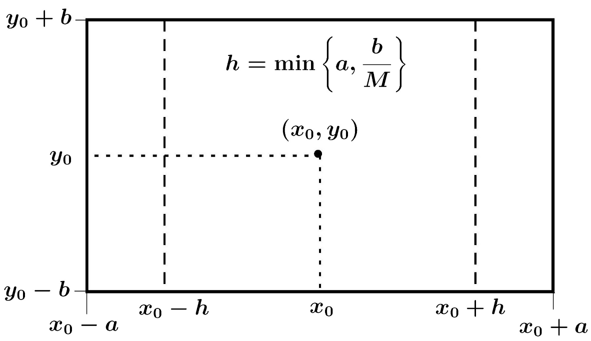
$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

אם הפונקציות $f(x,y)$, $f_y(x,y)$ רציפות בתוך מלבן סימטרי סביב הנקודה (x_0,y_0) :

$$\begin{cases} x_0-a < x < x_0+a \\ y_0-b < y < y_0+b \end{cases}$$

ובנוסף לכך קיים קבוע ממשי M כך ש־ $|f(x,y)| \le M$ בכל המלבן, אזי קיים פיתרון **אחד ויחיד** בתת־קטע (x_0-h,x_0+h) , כאשר

$$h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$$



איור 2: תחום ההגדרה של הפיתרון היחיד

משוואות דיפרנציאליות לינאריות מסדר $n > 1$

משפט 5: (משפט הקיום והיחידות עבור משוואות ליניאריות מסדר n)
נתונה משוואות דיפרנציאלית ליניארית מסדר n עם n תנאי התחלה

$$\begin{cases} y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = q(x) \\ y(x_0) = \alpha_0 \\ y'(x_0) = \alpha_1 \\ y''(x_0) = \alpha_2 \\ \quad \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = \alpha_{n-1} \end{cases} \tag{2}$$

כאשר

א. $p_i(x)$, $q(x)$, פונקציות רציפות בקטע (α, β), $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

ב. הנקודה x_0 שייכת לקטע: $\alpha < x_0 < \beta$

ג. הערכים α_0, α_1, α_2, ..., α_{n-1}, מספרים ממשיים שרירותיים

אזי קיים פיתרון אחד ויחיד $\phi(x)$ למשוואה על כל הקטע (α, β) המקיים את כל תנאי ההתחלה.

משוואות ליניאריות הומוגניות
צורה נורמלית: $y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$

משפט 6: (עיקרון הסופרפוזיציה)
אם $y_1(x), \quad y_2(x), \quad \ldots, \quad y_k(x)$ היא קבוצה של k פיתרונות של המשוואה ההומוגנית,
ואם c_1, c_2, ..., c_k, הם k מספרים ממשיים שרירותיים, אזי הפונקציה

$$\phi(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ky_k(x)$$

גם היא פיתרון של המשוואה ההומוגנית.

ביטוי מהצורה $\phi(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ky_k(x)$ נקרא **צירוף ליניארי** או **קומבינציה ליניארית**.

הגדרה 2: קבוצת פיתרונות $\{y_1(x), \ y_2(x), \quad \ldots, \ y_n(x)\}$ תיקרא **מערכת יסודית של פיתרונות** (או בסיס למרחב הפיתרונות) של המשוואה ההומוגנית אם כל פיתרון של המשוואה הוא צירוף ליניארי שלה.

הורונסקיאן של הקבוצה $\{y_1(x), \ y_2(x)\}$

$$W[y_1, y_2](x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

הורונסקיאן של הקבוצה $\{y_1(x),\ y_2(x),\ y_3(x)\}$

$$W[y_1, y_2, y_3](x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & y_3'(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) & y_3''(x) \end{vmatrix}$$

משפט 7: נתונה משוואה ליניארית הומוגנית $y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$, $\alpha < x < \beta$ כאשר $p_0(x)$, $p_1(x)$ פונקציות רציפות בקטע (α, β). קבוצת פיתרונות $\{y_1(x),\ y_2(x)\}$ היא קבוצה יסודית אם ורק אם הורונסקיאן $W[y_1, y_2]$ אינו מתאפס באף נקודה בקטע (α, β).

משפט 8: לכל משוואה ליניארית הומוגנית נורמלית

$$y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0, \qquad \alpha < x < \beta \tag{3}$$

קיימת מערכת יסודית של פיתרונות בגודל 2

משפט 9: קבוצת פיתרונות $\{y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_n(x)\}$ של משוואה ליניארית הומוגנית מסדר n,

א. מהווה בסיס עבור מרחב הפיתרונות של המשוואה אם ורק אם הורונסקיאן שלה אינו מתאפס בנקודה כלשהי של תחום ההגדרה.

ב. אם הורונסקיאן מתאפס בנקודה כלשהי, אז הקבוצה תלויה ליניארית (ולכן אינה בסיס למרחב הפיתרונות)

מציאת פיתרון על ידי הורדת סדר

אם $y_1(x)$ הוא פיתרון נתון של המשוואה ההומוגנית $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, ניתן למצוא פיתרון שני בלתי־תלוי על ידי ההצבה $y_2(x) = v(x)y_1(x)$:

$$v'' + \left[p(x) + 2\frac{y_1'}{y_1}\right]v' = 0$$

הורדת הסדר תתרחש לאחר ההצבה $u = v'$

$$u' + \left[p(x) + 2\frac{y_1'}{y_1}\right]u = 0 \tag{4}$$

כאמור, הפיתרון $y_1(x)$ והמקדם $p(x)$ ידועים לנו ולכן נוכל להתייחס לביטוי $b(x) = p(x) + 2\frac{y_1'}{y_1}$ כביטוי נתון, ולכן קל לראות שקיבלנו משוואה פרידה $\frac{du}{dx} + b(x)u = 0$.

נוסחת אבל (Abel)

משפט 10: (נוסחת אבל)
אם

$$\{y_1(x),\ y_2(x),\quad \dots,\ y_n(x)\}$$

הן n פיתרונות של המשוואה הליניארית ההומוגנית מסדר n

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0 \tag{5}$$

אזי הורונסקיאן שלהם מקיים

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} = Ke^{-\int p_{n-1}(x)dx} \tag{6}$$

עבור קבוע ממשי K. כאשר הקבוצה אינה יסודית (תלויה ליניארית) $K = 0$.

נוסחת ביניים שימושית:

$$\frac{W'(x)}{W(x)} = -p_{n-1}(x) \tag{7}$$

לפעמים רושמים את נוסחת אבל גם בצורה

$$W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} p_{n-1}(t)dt} \tag{8}$$

כאשר x_0 היא נקודה כלשהי בתחום הקיום של המשוואה.

פיתרון משוואות ליניאריות הומוגניות עם מקדמים קבועים

צורה נורמלית: $a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$

הנחה: a_i, $0 \le i \le n$, הם קבועים ממשיים

תחום הקיום של כל פיתרון: כל הישר הממשי $\mathbb{R}$!

פולינום אופייני: $P(r) = a_n r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0$

r **שורש ממשי מריבוי אלגברי** 1: מתאים פיתרון e^{rx}

$r = \alpha \pm \beta i$ **זוג שורשים מרוכבים מריבוי אלגברי** 1: מתאימים שני פיתרונות

$$e^{\alpha x}\cos\beta x, \qquad e^{\alpha x}\sin\beta x$$

r **שורש ממשי מריבוי אלגברי** k: מתאימים k פיתרונות

$$\{e^{rx},\quad xe^{rx},\quad x^2e^{rx},\quad \dots,\quad x^{k-1}e^{rx}\}$$

זוג שורשים מרוכב מריבוי אלגברי k: $r=\alpha\pm\beta i$ מתאימים $2k$ פיתרונות

$$\begin{array}{ll} e^{\alpha x}\cos\beta x, & e^{\alpha x}\sin\beta x, \\ xe^{\alpha x}\cos\beta x, & xe^{\alpha x}\sin\beta x, \\ x^2e^{\alpha x}\cos\beta x, & x^2e^{\alpha x}\sin\beta x, \\ \vdots & \vdots \\ x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x, & x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x \end{array}$$

מציאת פיתרון משלים על ידי הורונסקיאן

אחד השימושים של הורונסקיאן הוא במציאת פיתרון נוסף, בלתי תלוי, עבור משוואה הומוגנית. למשל במקרה של מד"ר ליניארית הומוגנית מסדר 2, אם נתון לנו ורונסקיאן שאינו אפס $W(x)$ וידוע לנו פיתרון $y_1(x)$, אז ניתן לחלץ את הפיתרון השני $y_2(x)$ מהשוויון

$$\left[\frac{y_2(x)}{y_1(x)}\right]' = \frac{y_1(x)y_2'(x)-y_2(x)y_1'(x)}{y_1(x)^2} = \frac{W(x)}{y_1(x)^2}$$

ולכן

$$\frac{y_2(x)}{y_1(x)} = \int \frac{W(x)}{y_1(x)^2}$$

ולכן

$$y_2(x) = y_1(x)\int\frac{W(x)}{y_1(x)^2}dx = y_1(x)\int\frac{e^{-\int p_1(x)dx}}{y_1(x)^2}dx \qquad (9)$$

משוואות לא הומוגניות

משפט 11: אם $y_1(x)$, $y_2(x)$ שני פיתרונות של משוואה דיפרנציאלית ליניארית

$$y^{(n)}+p_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_1(x)y'+p_0(x)y=q(x)$$

אז ההפרש $y_h(x)=y_1(x)-y_2(x)$ הוא פיתרון של המשוואה ההומוגנית

$$y^{(n)}+p_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_1(x)y'+p_0(x)y=0$$

משפט 12: אם ידוע לנו פיתרון פרטי $y_p(x)$ למשוואה הלא־הומוגניות

$$y^{(n)}+p_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_1(x)y'+p_0(x)y=q(x)$$

ואם הפיתרון הכללי של המשוואה ההומוגנית

$$y^{(n)}+p_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_1(x)y'+p_0(x)y=0$$

הוא

$$c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\cdots+c_ny_n(x)$$

אז הפיתרון הכללי של המשוואה הלא־הומוגנית הוא

$$y_p(x)+c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\cdots+c_ny_n(x)$$

המשמעות של המשפט האחרון היא שבכדי לפתור משוואה דיפרנציאלית לא־הומוגנית אנו זקוקים לפיתרון פרטי יחיד שלה, ולפיתרון הכללי של המשוואה ההומוגנית.

שיטת השוואת המקדמים

תהי

$$L[y] = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = q(x)$$

הטבלה הבאה מציגה את צורת הניחוש של הפיתרון הפרטי המתאים לגורם $q(x)$. כמובן, יש להציב את $y_p(x)$ במשוואה הלא־הומוגנית ולמצוא את המקדמים המתאימים.

	$q(x)$	$y_p(x)$
1	$A_0 + A_1x + A_2x^2 + \cdots + A_mx^m$	$x^k(B_0 + B_1x + B_2x^2 + \cdots + B_mx^m)$
2	$(A_0 + A_1x + A_2x^2 + \cdots + A_mx^m)e^{\alpha x}$	$x^k(B_0 + B_1x + B_2x^2 + \cdots + B_mx^m)e^{\alpha x}$
3	$(A_0 + A_1x + \cdots + A_mx^m)e^{\alpha x}\cos\beta x$	$x^k\big[(B_0 + B_1x + \cdots + B_mx^m)e^{\alpha x}\cos\beta x$ $+(C_0 + B_1x + \cdots + C_mx^m)e^{\alpha x}\sin\beta x\big]$
4	$(A_0 + A_1x + \cdots + A_mx^m)e^{\alpha x}\sin\beta x$	$x^k\big[(B_0 + B_1x + \cdots + B_mx^m)e^{\alpha x}\cos\beta x$ $+(C_0 + C_1x + \cdots + C_mx^m)e^{\alpha x}\sin\beta x\big]$

טבלה 1: צורת הניחוש של הפיתרון הפרטי

א. לכל שורה בטבלה נתאים זוג קבועים α, β:
הקבוע α מתאים לגורם $e^{\alpha x}$, והקבוע β מתאים לגורם $\cos\beta x$ או $\sin\beta x$.

ב. בשורה 1 של הטבלה, $\alpha = 0$, $\beta = 0$, ולכן שורה 1 היא למעשה מקרה פרטי של שורה 3 (אם נציב $\alpha = 0$, $\beta = 0$ בשורה 3, נקבל את שורה 1).

ג. בשורה 2 של הטבלה, $\beta = 0$, ולכן שורה 2 היא למעשה מקרה פרטי של שורה 3.

ד. לכן אפשר להוריד מהטבלה את שתי השורות הראשונות, אבל מסיבות של נוחות נהוג לכלול אותן

ה. **הכלל לקביעת k:**
אם $r = \alpha + \beta i$ הוא שורש של הפולינום האופייני, אז k הוא הריבוי האלגברי של r. אחרת $k = 0$.

שיטת הוריאציה של הפרמטרים

מטרת השיטה: פיתרון משוואות ליניאריות לא־הומוגניות בעלות מקדמים <u>משתנים</u>

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = q(x)$$

על בסיס הפיתרון הכללי של המשוואה ההומוגנית

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$$

נניח כי ידוע לנו הפיתרון הכללי של המשוואה ההומוגנית

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x)$$

צורת פיתרון פרטי: $y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) + \cdots + c_n(x)y_n(x)$

כאשר $c_1(x)$, $c_2(x)$, ..., $c_n(x)$ הן n פונקציות שעלינו לגלות
נטפל במשוואה מסדר שני בלבד

$$L[y] = y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = q(x)$$

נניח שיש בידנו פיתרון כללי $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ עבור המשוואה ההומוגנית

$$L[y] = y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$$

צורת הפיתרון הפרטי: $y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$
הנחת עבודה: $c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0$
תוצאת הצבת y_p במשוואה: $c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) = q(x)$
מקבלים מערכת ליניארית

$$\begin{cases} c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0 \\ c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) = q(x) \end{cases}$$

שפיתרונה על פי כלל קרמר הוא:

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ q(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}} = \frac{-y_2(x)q(x)}{W(x)}, \qquad c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & q(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}} = \frac{y_1(x)q(x)}{W(x)}$$

אינטגרציה רגילה תיתן את $c_1(x)$, $c_2(x)$.

$$c_1(x) = \int \frac{-y_2(x)q(x)}{W(x)}, \qquad c_2(x) = \int \frac{y_1(x)q(x)}{W(x)}$$

במקרה של משוואה ממעלה 3 לאחר הוספת שתי "הנחות עבודה" והצבה במשוואה, תתקבל המערכת

$$\begin{cases} c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) + c_3'(x)y_3(x) = 0 \\ c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) + c_3'(x)y_3'(x) = 0 \\ c_1'(x)y_1''(x) + c_2'(x)y_2''(x) + c_3'(x)y_3''(x) = q(x) \end{cases}$$

ובאמצעות שימוש בכלל של קרמר נקבל נוסחאות מתאימות עבור $c_1'(x)$, $c_2'(x)$, $c_3'(x)$.
לדוגמא, הנוסחה עבור $c_1'(x)$ היא

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2(x) & y_3(x) \\ 0 & y_2'(x) & y_3'(x) \\ q(x) & y_2''(x) & y_3''(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & y_3'(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) & y_3''(x) \end{vmatrix}} = \frac{q(x)[y_2(x)y_3'(x) - y_3(x)y_2'(x)]}{W(x)}$$

שתי הנוסחאות הנוספות עבור חישוב $c_2'(x)$, $c_3'(x)$ דומות.

משוואת אוילר (Euler)

צורה נורמלית: $a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = q(x)$

הנחה: a_0, a_1, $\ldots$, a_n, קבועים ממשיים **תחום הגדרה:** $0 < x < \infty$ (או $-\infty < x < 0$)

שיטת פיתרון 1:

ההצבה $x = e^t$ ($t = \ln x$) הופכת את משוואת אוילר למשוואה ליניארית בעלת מקדמים קבועים.

אם תחום המשוואה הוא $-\infty < x < 0$: ההצבה היא $x = -e^t$ (ולכן $t = \ln(-x)$).

משוואת אוילר הומוגנית: $L[y] = a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = 0$

פיתרונות יסודיים: $y = x^r$

פולינום אינדיציאלי: $L[x^r] = x^r P(r)$

עבור משוואת אוילר הומוגנית מסדר 2: $P(r) = a_2 r(r-1) + a_1 r + a_0 = 0$

עבור משוואת אוילר הומוגנית מסדר 3: $P(r) = a_3 r(r-1)(r-2) + a_2 r(r-1) + a_1 r + a_0 = 0$

שורשים של הפולינום האינדיציאלי $P(r)$:

א. לכל שורש ממשי פשוט r (ריבוי אלגברי 1) יתאים פיתרון $y(x) = x^r$

ב. לשורש ממשי r בעל ריבוי אלגברי k יתאימו k פיתרונות בלתי תלויים:

$$x^r, \quad x^r \ln x, \quad x^r (\ln x)^2, \quad \ldots, \quad x^r (\ln x)^{k-1}$$

ג. אם $r = \alpha \pm \beta i$ הם שני שורשים מרוכבים פשוטים של $P(r)$, אז יתאימו להם 2 פיתרונות בלתי תלויים

$$x^\alpha \cos(\beta \ln x), \qquad x^\alpha \sin(\beta \ln x)$$

ד. אם $r = \alpha \pm \beta i$ הם שני שורשים מרוכבים של $P(r)$ בעלי ריבוי אלגברי k, אז יתאימו להם $2k$ פיתרונות בלתי תלויים

$$\begin{array}{ll}
x^\alpha \cos(\beta \ln x), & x^\alpha \sin(\beta \ln x) \\
x^\alpha \ln x \cos(\beta \ln x), & x^\alpha \ln x \sin(\beta \ln x) \\
x^\alpha (\ln x)^2 \cos(\beta \ln x), & x^\alpha (\ln x)^2 \sin(\beta \ln x) \\
\vdots & \vdots \\
x^\alpha (\ln x)^{k-1} \cos(\beta \ln x), & x^\alpha (\ln x)^{k-1} \sin(\beta \ln x)
\end{array}$$

פיתרון משוואות באמצעות טורי חזקות

צורת הפיתרון: $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$

מקדמי הטור: סדרת קבועים ממשיים $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$

מרכז הטור: x_0

רדיוס ההתכנסות של הטור: מספר ממשי R עבורו הטור מתכנס בקטע $(x_0 - R, x_0 + R)$. תיתכן התכנסות באחד מקצות הקטע או בשתי הקצוות. בכל נקודה אחרת הטור מתבדר.

נוסחת קושי־האדאמר: $R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$

נוסחת המנה: $R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$

הזזת אינדקסים:

$$\sum_{n=k}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=k+i}^{\infty} a_{n-i} x^{n-i} = \sum_{n=k-i}^{\infty} a_{n+i} x^{n+i}$$

הכפלת טור חזקות בגורם x^k:

$$x^k\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+k}=\sum_{n=k}^{\infty}a_{n-k}x^n$$

גזירה של טור חזקות:

$$\begin{aligned}y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\\ y'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n\\ y''(x) &= \sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n\end{aligned}$$

נציין כי פעולת הגזירה (או אינטגרציה) של הטור אינה משנה את רדיוס ההתכנסות שלו.

הגדרה 3: נאמר כי $y(x)$ ניתנת לפיתוח לטור חזקות בקטע (x_0-R,x_0+R), אם קיים טור חזקות $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ כך שלכל x בקטע (x_0-R,x_0+R) מתקיים: $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$

בהנתן משוואה דיפרנציאלית עם תנאי התחלה בנקודה x_0, חיפוש פיתרון מהצורה $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ כרוך במציאת נוסחת נסיגה לחישוב המקדמים a_n לכל n טבעי. לשם כך יש להציב את הטור ונגזרותיו במשוואה ולבצע השוואת מקדמים בין שני אגפיה.

לא קיימות נוסחאות ספציפיות שמתאימות לכל הבעיות, והדרך היחידה היא להשתמש בכללים שפורטו לעיל, להתבונן בדוגמאות שונות, ולפתור בעיות שונות. לכן מומלץ לעבור ביסודיות על פרק 5 של חוברת ההרצאות. נצטט רק את המשפט העיקרי שעל בסיסו ניתן לקבוע אם קיים פיתרון בצורת טור חזקות.

משפט 13: תהי x_0 **נקודה רגולרית** של המשוואה הדיפרנציאלית

$$P(x)y''+Q(x)y'+R(x)y=0$$

כלומר $P(x_0)\neq 0$. אם $\frac{Q(x)}{P(x)}$, $\frac{R(x)}{P(x)}$, הן פונקציות אנליטיות בנקודה x_0 אז ניתן להציג את הפיתרון הכללי של המשוואה על ידי

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=a_0y_1(x)+a_1y_2(x)$$

כאשר a_0, a_1 קבועים שרירותיים ו־ $y_1(x)$, $y_2(x)$ שני פיתרונות טוריים בלתי־תלויים של המשוואה. רדיוס ההתכנסות של כל הפיתרונות הוא הקטן מבין רדיוסי ההתכנסות של טורי החזקות של $\frac{Q(x)}{P(x)}$, $\frac{R(x)}{P(x)}$.

הערה: פונקציה $f(x)$ מעל שדה המספרים המרוכבים $\mathbb{C}$ נקראת אנליטית בנקודה x_0 אם יש לה פיתוח לטור חזקות בסביבת x_0 עם רדיוס התכנסות חיובי.

דוגמא: נפתור בעיית התחלה עם משוואת Airy סביב הנקודה $x_0=1$

$$\begin{cases}y''-xy=0\\ y(1)=0\\ y'(1)=1\end{cases}$$

פתרון: תנאי ההתחלה מכתיבים חיפוש טור חזקות שמרכזו $x_0 = 1$ $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$. יש לחשב את הנגזרת השנייה של הטור

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) n a_n (x-1)^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} (x-1)^n$$

זהו תימרון אופייני לחישוב $y''(x)$ שמופיע במרבית התרגילים בנושא. בכדי לחשב את המכפלה xy יש לבצע "תימרון אופייני נוסף"

$$\begin{aligned}
xy &= [1 + (x-1)]y \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n + (x-1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^{n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} (x-1)^n \\
&= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n-1})(x-1)^n
\end{aligned}$$

נציב את שתי התוצאות האחרונות במשוואת איירי ונקבל

$$\begin{aligned}
y'' - xy &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} (x-1)^n - \left(a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n-1})(x-1)^n \right) \\
&= (2a_2 - a_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+1)(n+2) a_{n+2} - a_n - a_{n-1} \right] (x-1)^n \\
&= 0
\end{aligned}$$

קיבלנו נוסחת נסיגה

$$\begin{cases}
a_0 = 0 \\
a_1 = 1 \\
a_2 = 0 \\
a_{n+2} = \dfrac{a_n + a_{n-1}}{(n+1)(n+2)}, \quad n = 1, 2, \ldots
\end{cases}$$

שני השוויונים הראשונים נובעים מתנאי ההתחלה

$$\begin{aligned}
a_0 &= y(1) = 0 \\
a_1 &= y'(1) = 1
\end{aligned}$$

השוויון השלישי נובע מכך ש־ $2a_2 - a_0 = 0$.

נוכל לרשום את נוסחת הנסיגה באופן נוח יותר

$$\begin{cases}
a_0 = 0 \\
a_1 = 1 \\
a_2 = 0 \\
a_{n+3} = \dfrac{a_n + a_{n+1}}{(n+2)(n+3)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots
\end{cases}$$

במקרה הנוכחי לא ניתן לבצע הפרדת מקדמים לתתי־סדרות עקב תלות בשני איברים קודמים שאינם מאותה סדרה

$$
\begin{aligned}
a_0 &= 0 & a_4 &= \frac{a_1+a_2}{3\cdot 4} = \frac{1}{3\cdot 4} \\
a_1 &= 1 & a_5 &= \frac{a_2+a_3}{4\cdot 5} = \frac{0+\frac{1}{2\cdot 3}}{4\cdot 5} = \frac{1}{5!} \\
a_2 &= 0 & a_6 &= \frac{a_3+a_4}{5\cdot 6} = \frac{\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}}{5\cdot 6} = \frac{1}{5!} \\
a_3 &= \frac{a_0+a_1}{2\cdot 3} = \frac{1}{2\cdot 3} & a_7 &= \frac{a_4+a_5}{6\cdot 7} = \frac{\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{5!}}{6\cdot 7} = \frac{11}{7!}
\end{aligned}
$$

הקירוב הפולינומיאלי ממעלה 7 לפיתרון הוא לכן

$$y(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{120} + \frac{11x^7}{5040}$$

התמרת לפלס

הגדרה 4: (פונקציה רציפה למקוטעין)

פונקציה $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ נקראת **רציפה למקוטעין** בקטע $[a,b]$ אם

א. $f(t)$ רציפה בקטע $[a,b]$ מלבד אולי מספר סופי של נקודות: $t_1,\ t_2,\ \dots,\ t_n$

ב. בכל נקודת אי־רציפות, הגבולות מימין ומשמאל קיימים וסופיים.

נקודות אי־הרציפות $t_1,\ t_2,\ \dots,\ t_n$ נקראות גם **נקודות קפיצה**

פונקציה $f:[a,\infty]\to\mathbb{R}$ נקראת **רציפה למקוטעין** בקרן $[a,\infty]$ אם $f(t)$ רציפה למקוטעין בכל קטע סגור $[a,b]$, כאשר $a<b<\infty$.

הגדרה 5: (התמרת לפלס Laplace Transform)

תהי $f:[0,\infty]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה למקוטעין בקרן $[0,\infty]$. התמרת לפלס שתסומן על ידי $F(s)$ או $\mathscr{L}[f](s)$ מוגדרת על ידי האינטגרל המוכלל

$$\mathscr{L}[f](s) = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

הגדרה 6: נאמר שפונקציה $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ היא **מסדר אקספוננציאלי (או מסדר גודל מעריכי)** אם קיימים קבועים חיוביים K, c, a, כך שעבור כל $t\ge c$, מתקיים $|f(t)|\le Ke^{at}$.

משפט 14: תהי $f(t)$ פונקציה רציפה למקוטעין בקרן $[0,\infty)$. אם $f(t)$ היא מסדר גודל מעריכי אז התמרת לפלס של $f(t)$ קיימת עבור כל $s>a$, כאשר a הוא הקבוע שבהגדרה הקודמת: $|f(t)|\le Ke^{at}$.

דוגמא: התמרת לפלס של $f(t)=e^{at}$ היא

$$\mathscr{L}[f]=\int_0^\infty e^{-st}e^{at}dt=\int_0^\infty e^{-(s-a)t}dt=\frac{1}{s-a},\quad s>a$$

לכן נוכל לרשום: $\mathscr{L}\left[e^{at}\right]=\frac{1}{s-a}$

תרגיל: הוכח כי $\mathscr{L}[\cos at]=\frac{s}{s^2+a^2}$

התמרת לפלס הפוכה $\mathscr{L}^{-1}$

התמרת לפלס $\mathscr{L}$ היא אופרטור ליניארי חד־חד־ערכי ולכן קיים האופרטור ההפוך שנקרא **התמרת לפלס הפוכה** ומסומן על ידי $\mathscr{L}^{-1}$. לדוגמא

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right]&=e^{at}\\ \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right]&=\cos t\end{aligned}$$

התמרת לפלס של נגזרות

המשפט היסודי הבא מאפשר לנו להמיר משוואה דיפרנציאלית למשוואה אלגברית:

משפט 15: תהי $f(t)$ פונקציה רציפה בקרן $(0,\infty)$, בעלת נגזרת רציפה למקוטעין ומסדר גודל מעריכי בקרן $[0,\infty)$. אזי שתי התמרות לפלס $\mathscr{L}[f]$ וגם $\mathscr{L}[f']$ קיימות, ובנוסף מתקיים השוויון

$$\mathscr{L}[f']=s\mathscr{L}[f]-f(0)$$

באופן כללי: אם $f(t)$, $f'(t)$, $f''(t)$, ..., $f^{(n-1)}(t)$ רציפות, והפונקציה $f^{(n)}(t)$ רציפה למקוטעין ומסדר גודל מעריכי בקטע $[0,\infty)$, אזי

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[f']&=s\mathscr{L}[f]-f(0)\\ \mathscr{L}[f'']&=s^2\mathscr{L}[f]-sf(0)-f'(0)\\ \mathscr{L}[f''']&=s^3\mathscr{L}[f]-s^2f(0)sf'(0)-f''(0)\\ \mathscr{L}\left[f^{(n)}\right]&=s^n\mathscr{L}[f]-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0)\end{aligned}$$

דוגמא: פתור את בעיית ההתחלה

$$\begin{cases}y''-5y'+6y=t^2\\ y(0)=1\\ y'(0)=-2\end{cases}$$

פתרון: נפעיל את התמרת לפלס על שני אגפי המשוואה

$$\mathscr{L}[y''-5y'+6y]=\mathscr{L}\left[t^2\right]$$

על ידי שימוש בטבלת התמרות נקבל

$$s^2\mathscr{L}[y]-sy(0)-y'(0)-5s\mathscr{L}[y]+6\mathscr{L}[y]=\frac{2}{s^3}$$

קיבלנו משוואה אלגברית בנעלם $\mathscr{L}\left[y\right]$. לאחר הצבת תנאי ההתחלה וכינוס איברים נקבל

$$(s^2-5s+6)\mathscr{L}\left[y\right]=\frac{2}{s^3}+s-2$$

ולכן

$$\mathscr{L}\left[y\right]=\frac{2}{s^3(s^2-5s+6)}+\frac{1}{s-3}$$

לכן

$$y(t)=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^3(s^2-5s+6)}+\frac{1}{s-3}\right]$$

על ידי שימוש בשיטת הפירוק לשברים יסודיים ניתן להגיע לפירוק

$$\frac{2}{s^3(s^2-5s+6)}=-\frac{1}{4(s-2)}+\frac{2}{27(s-3)}+\frac{19}{108s}+\frac{5}{18s^2}+\frac{1}{3s^3}$$

ולכן

$$\begin{aligned} y(t) &= -\tfrac{1}{4}\mathscr{L}^{-1}\left[\tfrac{1}{s-2}\right]+\tfrac{2}{27}\mathscr{L}^{-1}\left[\tfrac{1}{s-3}\right]+\tfrac{19}{108}\mathscr{L}^{-1}\left[\tfrac{1}{s}\right]+\tfrac{5}{18}\mathscr{L}^{-1}\left[\tfrac{1}{s^2}\right]+\tfrac{1}{3}\mathscr{L}^{-1}\left[\tfrac{1}{s^3}\right]+\mathscr{L}^{-1}\left[\tfrac{1}{s-3}\right] \\ &= -\tfrac{1}{4}e^{2t}+\tfrac{29}{27}e^{3t}+\tfrac{5t}{18}+\tfrac{t^2}{2}+\tfrac{19}{108} \end{aligned}$$

משפט 16: (משפט ההזזה הראשון)

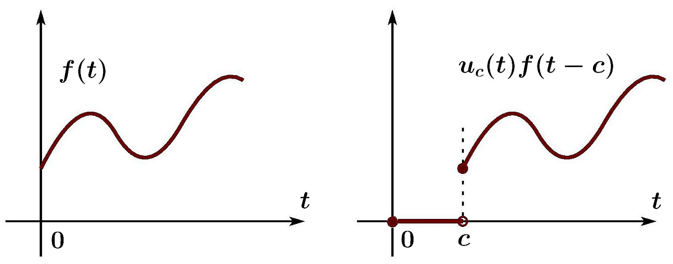
אם $\mathscr{L}\left[f\right]=F(s)$ אז $\mathscr{L}\left[e^{ct}f(t)\right]=F(s-c)$

הגדרה 7: פונקציית המדרגה (Heavyside) u_c מוגדרת על ידי

$$u_c(t)=\begin{cases}0, & 0\le t\le c\\ 1, & t>c\end{cases}$$

תחום ההגדרה של u_a הוא $[0,\infty)$

המטרה הפונקציה היא לאפשר הרחבת תחום הגדרה של פונקציה שהוזזה ימינה על כל הקרן $[0,\infty)$ באמצעות ביטוי מתימטי פשוט: $u_c(t)\cdot f(t-c)$



איור 3: הזזת פונקציה ב־ c יחידות ימינה והגדרתה כאפס בקטע $[0,c]$

שים לב כי הפונקציה המוזזת ימינה מוגדרת כאפס בקטע $[0,c]$.

משפט 17: (משפט ההזזה השני)
תהי $f(t)$ פונקציה רציפה למקוטעין וחסומה אקספוננציאלית בקטע $[-c, \infty)$ $(c > 0)$. אזי

$$\mathscr{L}\left[u_c(t)f(t-c)\right] = e^{-cs}\mathscr{L}\left[f(t)\right]$$

נסמן $\mathscr{L}\left[f(t)\right] = F(s)$. את הנוסחה הקודמת ניתן לרשום גם כך

$$\mathscr{L}^{-1}\left[e^{-cs}F(s)\right] = u_c(t)f(t-c) \qquad (10)$$

טבלה בסיסית של התמרות לפלס

פונקציה	התמרת לפלס	תחום
$f(t)$	$F(s)$	
1	$\frac{1}{s}$	$s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$s > a$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	
$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$	
t	$\frac{1}{s^2}$	
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	$s > a$
$e^{at}\sin bt$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$	
$e^{at}\cos bt$	$\frac{s}{(s-a)^2+b^2}$	
$u_c(t)$	$\frac{e^{-cs}}{s}$	$s > 0$
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$	
$f''(t)$	$s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$	
$f'''(t)$	$s^3F(s) - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0)$	
$f^{(n)}(t)$	$s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots f^{n-1}(0)$	
$u_c(t)f(t-c)$	$e^{-cs}F(s)$	
$-tf(t)$	$F'(s)$	
$t^2f(t)$	$F''(s)$	
$(-1)^n t^n f(t)$	$F^{(n)}(s)$	
$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$	
$f(at)$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$	
$\delta_c(t)$	e^{-cs}	

מערכות של משוואות ליניאריות

הצורה הנורמלית של **מערכת משוואות ליניארית לא־הומוגנית** מסדר 1 עם תנאי התחלה היא

$$
\left\{
\begin{array}{ccl}
x_1'(t) & = & p_{11}(t)x_1(t) + p_{12}(t)x_2(t) + \cdots + p_{1n}(t)x_n(t) + q_1(t) \\
x_2'(t) & = & p_{21}(t)x_1(t) + p_{22}(t)x_2(t) + \cdots + p_{2n}(t)x_n(t) + q_2(t) \\
\vdots & \vdots & \quad \vdots \\
x_n'(t) & = & p_{n1}(t)x_1(t) + p_{n2}(t)x_2(t) + \cdots + p_{nn}(t)x_n(t) + q_n(t)
\end{array}
\right.
\quad
\left|
\begin{array}{ccc}
x_1(t_0) & = & \alpha_1 \\
x_2(t_0) & = & \alpha_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
x_n(t_0) & = & \alpha_n
\end{array}
\right.
\tag{11}
$$

תנאים: כל הפונקציות $p_{ij}(t)$, $q_i(t)$ מוגדרות ורציפות מעל קטע פתוח (α, β), והנקודה t_0 שייכת לקטע.

אם כל הפונקציות $q_i(t)$ מתאפסות אז מקבלים צורה נורמלית של **מערכת ליניארית הומוגנית**

$$
\left\{
\begin{array}{ccl}
x_1'(t) & = & p_{11}(t)x_1(t) + p_{12}(t)x_2(t) + \cdots + p_{1n}(t)x_n(t) \\
x_2'(t) & = & p_{21}(t)x_1(t) + p_{22}(t)x_2(t) + \cdots + p_{2n}(t)x_n(t) \\
\vdots & \vdots & \quad \vdots \\
x_n'(t) & = & p_{n1}(t)x_1(t) + p_{n2}(t)x_2(t) + \cdots + p_{nn}(t)x_n(t)
\end{array}
\right.
\quad
\left|
\begin{array}{ccc}
x_1(t_0) & = & \alpha_1 \\
x_2(t_0) & = & \alpha_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
x_n(t_0) & = & \alpha_n
\end{array}
\right.
$$

משפט 18: (משפט הקיום והיחידות עבור מערכות ליניאריות של משוואות מסדר 1)
אם כל הפונקציות $p_{ij}(t)$, $q_i(t)$ מוגדרות ורציפות מעל קטע פתוח (α, β) הכולל בתוכו את הנקודה t_0, אזי קיים פיתרון אחד ויחיד

$$x_1(t),\ x_2(t),\ \ldots,\ x_n(t)$$

המקיים את המערכת בכל תחום ההגדרה (α, β), וגם מקיים את כל תנאי ההתחלה.

רישום מטריציוני

$$
\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
p_{11}(t) & p_{12}(t) & \cdots & p_{1n}(t) \\
p_{21}(t) & p_{22}(t) & \cdots & p_{2n}(t) \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
p_{n1}(t) & p_{n2}(t) & \cdots & p_{nn}(t)
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}
+
\begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \vdots \\ q_n(t) \end{pmatrix}
$$

סימול וקטורי

$$
\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad
\vec{q}(t) = \begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \vdots \\ q_n(t) \end{pmatrix}, \quad
P(t) = \begin{pmatrix}
p_{11}(t) & p_{12}(t) & \cdots & p_{1n}(t) \\
p_{21}(t) & p_{22}(t) & \cdots & p_{2n}(t) \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
p_{n1}(t) & p_{n2}(t) & \cdots & p_{nn}(t)
\end{pmatrix}
$$

נוכל לקודד גם את תנאי ההתחלה

$$\begin{pmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \\ \vdots \\ x_n(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

על ידי השוויון הוקטורי

$$\vec{x}(t_0) = \vec{\alpha}$$

לכן המערכת שלנו מצטמצמת למערכת הוקטורית הבאה

$$\begin{cases} \vec{x}'(t) = P(t)\vec{x}(t) + \vec{q}(t) \\ \vec{x}(t_0) = \vec{\alpha} \end{cases}$$

פיתרון מערכת ליניארית על ידי שיטת האלימינציה

נציג את השיטת על ידי הדוגמא הבאה

$$\begin{cases} x_1'(t) &= x_1(t) + x_2(t) \\ x_2'(t) &= 4x_1(t) - 2x_2(t) \end{cases}$$

מהמשוואה הראשונה נובע כי $x_2(t) = x_1'(t) - x_1(t)$

$$x_2'(t) = x_1''(t) - x_1'(t)$$

נחליף את $x_2(t)$ ואת $x_2'(t)$ במשוואה השניה בביטוים המתאימים

$$x_1''(t) - x_1'(t) = 4x_1(t) - 2[x_1'(t) - x_1(t)]$$

ונקבל מד"ר ליניארית מסדר 2

$$x_1''(t) + x_1'(t) - 6x_1(t) = 0$$

השורשים של הפולינום האופייני $r^2 + r - 6r = 0$ הם $r = -3, 2$ ולכן

$$\begin{aligned} x_1(t) &= c_1e^{-3t} + c_2e^{2t} \\ x_2(t) &= x_1'(t) - x_1(t) \\ &= -3c_1e^{-3t} + 2c_2e^{2t} - c_1e^{-3t} - c_2e^{2t} \\ &= -4c_1e^{-3t} + c_2e^{2t} \end{aligned}$$

צורה נורמלית של הפיתרון הכללי:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} e^{-3t} \\ -4e^{-3t} \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$$

מערכת ליניארית הומוגנית עם מקדמים קבועים

צורה נורמלית:

$$\begin{cases} x_1'(t) &= a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t) \\ x_2'(t) &= a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \cdots + a_{2n}x_n(t) \\ \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ x_n'(t) &= a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t) \end{cases} \tag{12}$$

הנחה: a_{ij} הם קבועים ממשיים.

רישום מטריציוני:

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

סימול וקטורי

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

סימול וקטורי:

$$\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t)$$

וקטור של n פונקציות $\vec{u}(t)$

$$\vec{u}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

נקרא **פיתרון של המערכת** אם הוא מקיים

$$\vec{u}'(t) = A\vec{u}(t)$$

לכל t ממשי (תחום הקיום של מערכת בעלת מקדמים קבועים הוא $\mathbb{R}$).

הצירוף הליניארי של כל שני פיתרונות, גם הוא פיתרון

משפט 19: (עיקרון הסופרפוזיציה)
אם $\vec{u}(t)$, $\vec{v}(t)$ הם שני פיתרונות של המערכת

$$\vec{x}'(t) = A\vec{x}$$

אז כל צירוף ליניארי $\alpha_1\vec{u} + \alpha_2\vec{v}$ גם הוא פיתרון של המערכת.

משפט 20: יהיו $\vec{u}_1(t)$, $\vec{u}_2(t)$, $\vec{u}_3(t)$, שלושה פיתרונות בלתי תלויים ליניארית של מערכת המשוואות ההומוגנית מגודל 3×3

$$\vec{u}'(t) = A\vec{u}(t)$$

מעל התחום (α, β). אזי כל פיתרון של המערכת הוא צירוף ליניארי של שלושת הפיתרונות הנ"ל. כלומר, הפיתרון הכללי של המערכת נתון על ידי

$$\vec{u}(t) = \alpha_1\vec{u}_1(t) + \alpha_2\vec{u}_2(t) + \alpha_3\vec{u}_3(t)$$

בדיקת תלות ליניארית באמצעות הורונסקיאן

הורונסקיאן של סדרת וקטורי פונקציות

$$\vec{u}_1(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_2(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_3(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \end{pmatrix}$$

מוגדר על ידי

$$W[\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3](t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & y_1(t) & z_1(t) \\ x_2(t) & y_2(t) & z_2(t) \\ x_3(t) & y_3(t) & z_3(t) \end{vmatrix}$$

אם $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$, הם שלושה פיתרונות של מערכת משוואות ליניארית, אז ניתן לבדוק את התלות או א־תלות ליניארית שלהם באמצעות הורונסקיאן: אם קיימת נקודה t עבורה $W[\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3](t) \neq 0$ אז הקבוצה בלתי תלויה ליניארית. אם קיימת נקודה t עבורה $W[\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3](t) = 0$ אז הקבוצה תלויה ליניארית.

משפט 21: אם $\vec{u}_1(t)$, $\vec{u}_2(t)$, $\vec{u}_3(t)$ הם פיתרונות של המערכת (גודל 3×3)

$$\vec{u}'(t) = A\vec{u}(t)$$

מעל התחום (α, β), אזי או שהורונסקיאן $W[\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3]$ מתאפס זהותית על כל התחום (α, β) או שלכל t בתחום (α, β), $W(t) \neq 0$.

נוסחת אבל (Abel)

אם $\vec{u}_1(t)$, $\vec{u}_2(t)$, $\vec{u}_3(t)$ מערכת של פיתרונות של מערכת משוואות עם מקדמים משתנים, אז

$$W[\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3](t) = W(t_0)e^{\int_{t_0}^{t}[p_{11}(\tau)+p_{22}(\tau)+p_{33}(\tau)]d\tau} \tag{13}$$

עבור מערכת משוואות בעלת מקדמים קבועים, הנוסחה תראה כך

$$W[\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3](t) = W(0)e^{(a_{11}+a_{22}+a_{33})t} \tag{14}$$

הסכום $a_{11} + a_{22} + a_{33}$ הוא סכום איברי האלכסון של מטריצת המקדמים A, והוא נקרא העקבה (trace) של A ולפעמים מסומן על ידי $\mathrm{trace}(A)$. מהנוסחה נובע כמובן שהורונסקיאן אינו תלוי בפיתרונות הספציפיים והוא זהה (עד כדי מכפלה בקבוע) עבור כל מערכת יסודית של פיתרונות.

משפט 22: לכל מערכת משוואות ליניארית הומוגנית מסדר $n \times n$,

$$\vec{u}'(t) = A\vec{u}(t)$$

מעל התחום (α, β), קיימת מערכת יסודית של פתרונות בגודל n (בסיס למרחב הפיתרונות).

שיטות פיתרון מערכת הומוגנית עם מקדמים קבועים

צורה נורמלית:

$$\vec{u}'(t) = A\vec{u}(t)$$

הנחה: A מטריצת מקדמים קבועים מסדר $n \times n$

צורת פיתרון יסודי:

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} e^{\lambda t} = \vec{a}e^{\lambda t}$$

מערכת אופיינית:

$$(A - \lambda I)\vec{a} = \vec{0}$$

פולינום אופייני

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = 0$$

כאשר I היא מטריצת היחידה

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ערכים עצמיים פשוטים

שורש פשוט הוא שורש בעל ריבוי אלגברי 1. במידה ולפולינום האופייני $P(\lambda)$ שלושה שורשים ממשיים פשוטים λ_1, λ_2, λ_3, אז למטריצת המקדמים A יש שלושה וקטורים עצמיים בלתי תלויים $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. צורת הפיתרון הכללי

$$\vec{x}(t) = \alpha_1\vec{a}e^{\lambda_1 t} + \alpha_2\vec{b}e^{\lambda_2 t} + \alpha_3\vec{c}e^{\lambda_3 t}$$

ערכים עצמיים מרובים בעלי ריבוי גאומטרי זהה

אם λ ערך עצמי מריבוי אלגברי וגאומטרי k אז יש לו k וקטורים עצמיים, שלהם יתאימו k פיתרונות בלתי תלויים של המערכת מהצורה $\vec{a}e^{\lambda t}$.

למשל אם למטריצה שלנו A יש ערך עצמי פשוט λ_1, וערך עצמי λ_2 מריבוי אלגברי/גאומטרי 2, אז צורת הפיתרון הכללי היא

$$\vec{x}(t) = \alpha_1\vec{a}e^{\lambda_1 t} + \alpha_2\vec{b}e^{\lambda_2 t} + \alpha_3\vec{c}e^{\lambda_2 t}$$

כאשר $\vec{a}$ וקטור עצמי השייך ל־ λ_1, $\vec{b}$, $\vec{c}$ שני וקטורים עצמיים בלתי תלויים השייכים ל־ λ_2.

ערכים עצמיים מרוכבים פשוטים

אם $\lambda = a \pm bi$ זוג ערכים עצמיים מריבוי 1 של המטריצה A, אז קיימים זוג וקטורים עצמיים מרוכבים $\vec{\alpha} \pm i\vec{\beta}$, אשר להם יתאימו שני פיתרונות מרוכבים בלתי תלויים

$$e^{(a+bi)t}(\vec{\alpha} + i\vec{\beta}), \qquad e^{(a-bi)t}(\vec{\alpha} - i\vec{\beta})$$

על פי נוסחת דה־מואבר נקבל

$$e^{at}(\cos bt + i\sin bt)(\vec{\alpha} + i\vec{\beta}), \qquad e^{at}(\cos bt - i\sin bt)(\vec{\alpha} - i\vec{\beta})$$

לא קשה לחלץ מהם שני פיתרונות ממשיים בלתי תלויים

$$\begin{aligned} \vec{u}(t) &= \vec{\alpha}e^{at}\cos bt - \vec{\beta}e^{at}\sin bt \\ \vec{v}(t) &= \vec{\alpha}e^{at}\sin bt + \vec{\beta}e^{at}\cos bt \end{aligned} \tag{15}$$

עצה: לא מומלץ לנסות לזכור בעל פה את הנוסחאות האחרונות. יספיק לזכור את צורת הפיתרון הראשון $e^{(a+bi)t}(\vec{\alpha}+i\vec{\beta})$ בלבד! שתי הנוסחאות האחרונות הן למעשה החלק הממשי והמדומה של צורה זו (לוקח פחות מחצי דקה לקבל את שתי הנוסחאות בצורה זו).

ערך עצמי λ מריבוי אלגברי 2, ריבוי גאומטרי 1

כאן יש לנו וקטור עצמי יחיד $\vec{a}$ השייך ל־λ. את הוקטור השני $\vec{b}$ נקבל על ידי ניחוש פיתרון מהצורה:

$$\vec{x}(t) = \vec{a}te^{\lambda t} + \vec{b}e^{\lambda t}$$

לאחר הצבת צורה זו במערכת שלנו נקבל שהוקטור השני הוא פיתרון של המערכת

$$(A - \lambda I)\vec{b} = \vec{a}$$

הערה: $\vec{b}$ נקרא **וקטור עצמי מוכלל** של A. הוא מתקבל גם על ידי פיתרון של המערכת $(A-\lambda I)^2\vec{b} = \vec{0}$.

ערך עצמי מריבוי אלגברי 3, ריבוי גאומטרי 1

שלושת הוקטורים הדרושים $\{\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\}$ מתקבלים על ידי פיתרון שלושת המערכות הליניאריות

$$\begin{aligned} (A-\lambda I)\vec{a} &= \vec{0} \\ (A-\lambda I)\vec{b} &= \vec{a} \\ (A-\lambda I)\vec{c} &= \vec{b} \end{aligned}$$

הפיתרונות היסודיים הם

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \vec{a}e^{\lambda t} \\ u_2(t) &= (t\vec{a}+\vec{b})e^{\lambda t} \\ u_3(t) &= (\tfrac{1}{2}t^2\vec{a} + t\vec{b} + \vec{c})e^{\lambda t} \end{aligned}$$

ערך עצמי λ מריבוי אלגברי 3, ריבוי גאומטרי 2

כאן יש לנו שני וקטורים עצמיים בלתי תלויים ליניארית $\vec{a}$, $\vec{b}$ בלבד, שמספקים לנו שני פיתרונות יסודיים עבור המערכת

$$\begin{aligned} \vec{u}_1(t) &= \vec{a}e^{\lambda t} \\ \vec{u}_2(t) &= \vec{a}e^{\lambda t} \end{aligned}$$

הפיתרון השלישי הוא מהצורה

$$\vec{u}_3(t) = (t\vec{d} + \vec{c})e^{\lambda t}$$

ומציאתו כרובה במציאת שני וקטורים חדשים $\vec{c}$, $\vec{d}$.

קיימת דרגת חופש גבוהה מאוד במציאתם: הוקטור $\vec{c}$ הוא צירוף ליניארי של $\vec{a}$, $\vec{b}$

$$\vec{c} = \alpha_1\vec{a} + \alpha_2\vec{b}$$

והוקטור $\vec{d}$ הוא פיתרון לא־טריביאלי של המערכת

$$(A-\lambda I)\vec{d} = \alpha_1\vec{a} + \alpha_2\vec{b}$$

קיימת דרגת חופש גדולה עבור בחירת הקבועים α_1, α_2 למטרה זו (שלושה משוואות בחמישה נעלמים). ובדרך כלל זה מתאפשר על ידי ניחוש קל.

לכן במקרה הנוכחי, בסיס למרחב הפיתרונות של המערכת ההומוגנית שלנו יהיה

$$\begin{cases} \vec{u}_1(t) = \vec{a}e^{\lambda t} \\ \vec{u}_2(t) = \vec{b}e^{\lambda t} \\ \vec{u}_3(t) = (t\vec{d} + \vec{c})e^{\lambda t} \end{cases}$$

מערכת משוואות ליניארית לא־הומוגנית

נתבונן תחילה במערכות ליניאריות בעלות מקדמים קבועים, אך עם רכיב לא־הומוגני.

$$\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t) + \vec{q}(t)$$

לדוגמא מערכת 2×2 תיראה כך

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{pmatrix}$$

שיטת פיתרון:

א. מצא פיתרון כללי למערכת ההומוגנית $\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t)$

$$\vec{h}(t) = c_1\vec{u}_1(t) + c_2\vec{u}_2(t)$$

ב. מצא פיתרון <u>פרטי</u> למערכת הלא־הומוגנית בשיטת <u>הוריאציה של הפרמטרים</u>

$$\vec{p}(t) = c_1(t)\vec{u}_1(t) + c_2(t)\vec{u}_2(t)$$

לאחר הצבת $\vec{p}(t)$ במערכת הלא־הומוגנית נקבל

$$c_1'(t)\vec{u}_1(t) + c_2'(t)\vec{u}_2(t) = \vec{q}(t)$$

על פי הכלל של קרמר

$$c_1'(t) = \frac{W[\vec{q}, \vec{u}_2]}{W[\vec{u}_1, \vec{u}_2]}, \qquad c_2'(t) = \frac{W[\vec{u}_1, \vec{q}]}{W[\vec{u}_1, \vec{u}_2]}$$

ולכן

$$c_1(t) = \int \frac{W[\vec{q}, \vec{u}_2]}{W[\vec{u}_1, \vec{u}_2]}dt, \qquad c_2(t) = \int \frac{W[\vec{u}_1, \vec{q}]}{W[\vec{u}_1, \vec{u}_2]}dt$$

ג. הפיתרון הכללי של המערכת הלא־הומוגנית יתקבל על ידי הסכום של הפיתרון הפרטי והפיתרון הכללי של המערכת ההומוגנית

$$\vec{x}(t) = \vec{p}(t) + c_1\vec{u}_1(t) + c_2\vec{u}_2(t)$$

דוגמא: מצא פיתרון כללי למערכת הלא־הומוגנית הבאה

$$\begin{cases} x_1'(t) &=& 2x_1(t) - x_2(t) + e^{4t} \\ x_2'(t) &=& 3x_1(t) + 6x_2(t) + e^{3t} \end{cases}$$

פתרון: לא קשה למצוא את הפיתרון הכללי של המערכת ההומוגנית

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1'(t) & = & 2x_1(t) - x_2(t) \\ x_2'(t) & = & 3x_1(t) + 6x_2(t) \end{array}\right.$$

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} e^{3t} \\ -e^{3t} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{5t} \\ -3e^{5t} \end{pmatrix}$$

נחפש פונקציות $c_1(t)$, $c_2(t)$ כך ש־

$$c_1'(t) \begin{pmatrix} e^{3t} \\ -e^{3t} \end{pmatrix} + c_2'(t) \begin{pmatrix} e^{5t} \\ -3e^{5t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{4t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$$

כלומר, יש לפתור מערכת משוואות ליניארית בפונקציות $c_1'(t)$, $c_2'(t)$

$$\left\{\begin{array}{rcl} e^{3t}c_1'(t) + e^{5t}c_2'(t) & = & e^{4t} \\ -e^{3t}c_1'(t) - 3e^{5t}c_2'(t) & = & e^{3t} \end{array}\right.$$

לכן

$$c_1'(t) = \frac{\begin{vmatrix} e^{4t} & e^{5t} \\ e^{3t} & -3e^{5t} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -e^{3t} & e^{5t} \\ -e^{3t} & -3e^{5t} \end{vmatrix}} = \frac{-3e^{9t} - e^{8t}}{-2e^{8t}} = \frac{3}{2}e^t + \frac{1}{2}$$

ובאותו אופן נחשב את $c_2'(t)$

$$c_2'(t) = \frac{\begin{vmatrix} e^{3t} & e^{4t} \\ -e^{3t} & e^{3t} \end{vmatrix}}{-2e^{8t}} = \frac{e^{6t} + e^{7t}}{-2e^{8t}} = -\frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{2}e^{-t}$$

על ידי אינטגרציה נקבל את $c_1(t)$, $c_2(t)$

$$\begin{array}{rcl} c_1(t) & = & \frac{3}{2}e^t + \frac{t}{2} \\ c_2(t) & = & \frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{t}{2}e^{-t} \end{array}$$

הפיתרון הפרטי למערכת הלא־הומוגנית הוא לכן

$$\begin{array}{rcl} \vec{p}(t) & = & \left(\frac{3}{2}e^t + \frac{t}{2}\right) \begin{pmatrix} e^{3t} \\ -e^{3t} \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{t}{2}e^{-t}\right) \begin{pmatrix} e^{5t} \\ -3e^{5t} \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} \left(\frac{3}{2} + \frac{t}{2}\right) e^{4t} + \left(\frac{1}{4} + \frac{t}{2}\right) e^{3t} \\ -\frac{3}{2}\left(1 + t\right) e^{4t} - \left(\frac{3}{4} + \frac{t}{2}\right) e^{3t} \end{pmatrix} \end{array}$$

הפיתרון הכללי למערכת הלא־הומוגנית הוא לכן

$$\vec{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} e^{3t} \\ -e^{3t} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{5t} \\ -3e^{5t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \left(\frac{3}{2} + \frac{t}{2}\right) e^{4t} + \left(\frac{1}{4} + \frac{t}{2}\right) e^{3t} \\ -\frac{3}{2}\left(1+t\right) e^{4t} - \left(\frac{3}{4} + \frac{t}{2}\right) e^{3t} \end{pmatrix}$$

במקרה של מערכת מגודל 3×3 שיטת הוריאציה של הפרמטרים תוביל אותנו למערכת

$$c_1'(t)\vec{u}_1(t) + c_2'(t)\vec{u}_2(t) + c_3'(t)\vec{u}_2(t) = \vec{q}(t) \tag{16}$$

נוכל להציג את הפיתרון על ידי

$$c_1'(t) = \frac{W[\vec{q}, \vec{u}_2, \vec{u}_3]}{W[\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3]}, \qquad c_2'(t) = \frac{W[\vec{u}_1, \vec{q}, \vec{u}_3]}{W[\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3]}, \qquad c_3'(t) = \frac{W[\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{q}]}{W[\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3]}$$

ולכן

$$c_1(t) = \int \frac{W[\vec{q}, \vec{u}_2, \vec{u}_3]}{W[\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3]} dt, \qquad c_2(t) = \int \frac{W[\vec{u}_1, \vec{q}, \vec{u}_3]}{W[\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3]} dt, \qquad c_3(t) = \int \frac{W[\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{q}]}{W[\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3]} dt$$

מקובל לסמן: $W_1 = W[\vec{q}, \vec{u}_2, \vec{u}_3]$, $W_2 = W[\vec{u}_1, \vec{q}, \vec{u}_3]$, $W_3 = W[\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{q}]$.

לכן נוכל להסתפק בנוסחה אחת כללית עבור כל מערכת מגודל $n \times n$

$$c_i(x) = \int \frac{W_i}{W}\, dt, \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{17}$$

נציין רק שחישוב דטרמיננטות מסדר 3×3 הוא בדרך כלל יותר יקר מדירוג של המטריצה, ולכן יש להגביל את השימוש בנוסחאות האחרונות רק למקרים בהן המטריצה דלילה, או לשימושים תאורטיים.

לבסוף נציין כי **שיטת הוריאציה של הפרמטרים** תקפה גם עבור מערכות בעלות מקדמים משתנים. אם ידוע לנו פיתרון כללי של המערכת ההומוגנית $\vec{h}(t)$, נוכל למצוא פיתרון פרטי $\vec{p}(t)$ עבור המערכת הלא־הומוגנית באותה דרך, ואז לקבל פיתרון כללי של המערכת הלא־הומוגנית $\vec{p}(t) + \vec{h}(t)$.

מידע נוסף

פירוט מלא עם הסברים מפורטים, הוכחות, דוגמאות, ורשימה ארוכה של תרגילים, ניתן למצוא בחוברת ההרצאות ובחוברת התרגילים שבאתר הקורס

http://www.samyzaf.com/technion/ode