משוואות דיפרנציאליות רגילות 104131

פיתרון המבחן סופי, מועד ב', סמסטר א' תשע"ח, 15.03.2018

שאלה 1: [23%]

א. (12 נק') מצאו את הפיתרון של המשוואה $y' = \dfrac{y - y^2\cos x}{x + y^2}$ המקיים $y(0) = 1$ ומצאו את הערך $y(\pi)$.

פיתרון: נרשום את המשוואה בצורה

$$(y - y^2\cos x)dx + (-x - y^2)dy = 0 \tag{1}$$

ונסמן

$$M(x,y) = y - y^2\cos x, \qquad N(x,y) = -x - y^2$$

אזי

$$M_y = 1 - 2y\cos x, \qquad N_x = -1$$

ולכן המשוואה אינה מדויקת. נסיון למצוא גורם אינטגרציה $\mu(x)$ שתלוי במשתנה x בלבד יכשל. ננסה למצוא גורם אינטגרציה $\mu(y)$ התלוי במשתנה y בלבד. התנאי לכך הוא שהביטוי $\dfrac{N_x - M_y}{M}$ תלוי במשתנה y בלבד

$$\frac{N_x - M_y}{M} = \frac{-2 + 2y\cos x}{y - y^2\cos x} = \frac{-2(1 - y\cos x)}{y(1 - y\cos x)} = -\frac{2}{y}$$

לכן

$$\mu(y) = e^{-\int \frac{2}{y}dy} = e^{-2\ln y} = \frac{1}{y^2}$$

קיבלנו ש- $\mu(y) = \frac{1}{y^2}$ הוא גורם אינטגרציה של (1).

נכפול את המשוואה (1) בגורם זה ונקבל

$$\left(\frac{1}{y} - \cos x\right)dx + \left(-\frac{x}{y^2} - 1\right)dy = 0 \tag{2}$$

קל לוודא שמשוואה (2) היא אכן משוואה מדויקת. נחשב את פונקציית הפוטנציאל

$$F(x,y) = \int M(x,y)dx = \int \left(\frac{1}{y} - \cos x\right)dx = \frac{x}{y} - \sin x + h(y)$$

יש למצוא את $h(y)$

$$F_y = -\frac{x}{y^2} + h'(y) = N(x,y) = -\frac{x}{y^2} - 1$$

לכן $h(y) = -y$ והפיתרון הכללי למשוואה שלנו הוא

$$\frac{x}{y} - \sin x - y = C$$

זוהי למעשה משוואה ריבועית ב־y

$$y^2 + (\sin x + C)y - x = 0$$

שפיתרונה הוא

$$y = \frac{-\sin x - C \pm \sqrt{(\sin x + C)^2 + 4x}}{2}$$

תנאי התחלה

$$y(0) = \frac{-C \pm |C|}{2} = 1$$

ולכן בהכרח $C = -1$ ויש לקחת את סימן הפלוס

$$y = \frac{-\sin x + 1 + \sqrt{(\sin x + 1)^2 + 4x}}{2}$$

חישוב של $y(\pi)$ הוא

$$y(\pi) = \frac{1 + \sqrt{1 + 4\pi}}{2}$$

הערה: מאחר וכפלנו את המד"ר המקורית בגורם האינטגציה $\mu(y) = \frac{1}{y^2}$, יש לבדוק אם $y = 0$ הוא פיתרון סינגולרי. קל לראות שאכן $y = 0$ הוא פיתרון של המד"ר, ולכן יש לכלול אותו בפיתרון הכללי של המד"ר, אם כי הוא אינו מקיים את תנאי ההתחלה $y(0) = 1$, ולכן נופל מייד בדרך לפיתרון הפרטי.

ב. (11 נק') מצאו את העקום הניצב למשפחה $y^2 = 2x^2 - cx^3$ ועובר בנקודה $(0, e)$.
פיתרון: נבצע גזירה סתומה

$$2yy' = 4x - 3cx^2$$

ולכן

$$y' = \frac{4x - 3cx^2}{2y}$$

האינדקס c מבוטא על ידי $c = \frac{2x^2 - y^2}{x^3}$, ולכן נוכל לרשום

$$y' = \frac{4x - 3x^2 \cdot \frac{2x^2 - y^2}{x^3}}{2y} = \frac{4x^2 - (6x^2 - 3y^2)}{2xy} = \frac{-2x^2 + 3y^2}{2xy}$$

המשוואה של המשפחה האורתוגונלית היא לכן

$$y' = \frac{2xy}{2x^2 - 3y^2}$$

זוהי משוואה מטיפוס הומוגני

$$y' = \frac{2\frac{y}{x}}{2-3\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

נשתמש בהצבה $v=\frac{y}{x}$

$$x\cdot\frac{dv}{dx}+v=\frac{2v}{2-3v^2}$$

ולכן

$$x\cdot\frac{dv}{dx}=\frac{3v^3}{2-3v^2}$$

נבצע הפרדת משתנים

$$\frac{2-3v^2}{3v^3}dv=\frac{dx}{x}$$

נבצע אינטגרציה על שני האגפים

$$-\frac{1}{3v^2}-\ln|v|=\ln|x|+C$$

יש לרשום את הפיתרון הסינגולרי $v=0$ (כלומר $y=0$).
נוכל לרשום זאת גם כך

$$\ln C|vx|+\frac{1}{3v^2}=0$$

נחזור למשתנים המקוריים

$$\ln Cy+\frac{x^2}{3y^2}=0$$

העקום העובר דרך הנקודה $(0,e)$

$$\ln Ce=0$$

לכן $C=\frac{1}{e}$, ולכן העקום האורתוגונלי שלנו הוא

$$\ln y+\frac{x^2}{3y^2}=1$$

שאלה 2: [20%]

נתונה המשוואה האי־הומוגנית הבאה: $y^{(3)}-12y''+48y'-64y=2e^{4x}$.
ידוע כי $y=e^{4x}$ פותר את המשוואה ההומוגנית המתאימה.
א. (5 נק') מצאו פתרון כללי של המשוואה ההומוגנית.
פיתרון: מהנתון ש־ $y=e^{4x}$ פיתרון של המד"ר ההומוגנית המתאימה

$$y^{(3)}-12y''+48y'-64y=0$$

נובע כי $r=4$ הוא שורש של הפולינום האופייני

$$P(r)=r^3-12r^2+48r-64=0$$

לכן הפולינום $P(r)$ חייב להתחלק בפולינום $r-4$. קל לבדוק ש־

$$\frac{P(r)}{r-4} = r^2 - 8r + 16 = (r-4)^2$$

לכן קיבלנו

$$P(r) = (r-4)^3$$

יוצא ש־$r=4$ הוא שורש בעל ריבוי 3, ולכן הפיתרונות היסודיים של המד"ר ההומוגנית הם

$$y_1(x) = e^{4x}, \qquad y_2(x) = xe^{4x}, \qquad y_3(x) = x^2e^{4x}$$

הפיתרון הכללי של המד"ר ההומוגנית הוא

$$y(x) = c_1e^{4x} + c_2xe^{4x} + c_3x^2e^{4x}$$

ב. (15 נק') מצאו פתרון פרטי של המשוואה המקיים את תנאי ההתחלה $y(0)=1$, $y'(0)=y''(0)=0$.

פיתרון: על פי שיטת השוואת המקדמים יש לחפש פיתרון פרטי מהצורה $y_p(x) = Ax^3e^{4x}$ (כי $r=4$ שורש בעל ריבוי 3). נציב את y_p במשוואה

$$\begin{aligned}
y_p' &= 3Ax^2e^{4x} + 4Ax^3e^{4x} = A(3x^2+4x^3)e^{4x} \\
y_p'' &= A(6x+12x^2)e^{4x} + A(12x^2+16x^3)e^{4x} = A(6x+24x^2+16x^3)e^{4x} \\
y_p''' &= A(6+48x+48x^2)e^{4x} + A(24x+96x^2+64x^3)e^{4x} \\
&= A(6+72x+144x^2+64x^3)e^{4x}
\end{aligned}$$

נכפיל במקדמים המתאימים

$$\begin{aligned}
y_p''' &= Ae^{4x}(6+72x+144x^2+64x^3) \\
-12y_p'' &= Ae^{4x}(-72x-288x^2-192x^3) \\
48y_p' &= Ae^{4x}(144x^2+192x^3) \\
-64y_p &= -64Ae^{4x}
\end{aligned}$$

לאחר הצבה במד"ר $y^{(3)} - 12y'' + 48y' - 64y = 2e^{4x}$ נקבל

$$y_p^{(3)} - 12y'' + 48y' - 64y = 6Ae^{4x} = 2e^{4x}$$

ולכן $A=\frac{1}{3}$, ולכן הפיתרון הפרטי שלנו הוא

$$y_p(x) = \frac{1}{3}x^3e^{4x}$$

הפיתרון הכללי של המד"ר הלא־הומוגנית הוא

$$y(x) = \frac{1}{3}x^3e^{4x} + c_1e^{4x} + c_2xe^{4x} + c_3x^2e^{4x}$$

נחשב את הנגזרת הראשונה והשניה

$$\begin{aligned} y'(x) &= \left(\tfrac{4}{3}x^3 + x^2\right)e^{4x} + 4c_1e^{4x} + c_2(4x+1)e^{4x} + c_3(4x^2+2x)e^{4x} \\ y''(x) &= \left(\tfrac{16}{3}x^3 + 8x^2 + 2x\right)e^{4x} + 16c_1e^{4x} + c_2(16x+8)e^{4x} + c_3(16x^2+16x+2)e^{4x} \end{aligned}$$

נציב $x = 0$ ונשתמש בתנאי ההתחלה

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 = 1 \\ y'(0) &= 4c_1 + c_2 = 0 \\ y''(0) &= 16c_1 + 8c_2 + 2c_3 = 0 \end{aligned}$$

פיתרון המערכת הוא: $c_1 = 1$, $c_2 = -4$, $c_3 = 8$. לכן הפיתרון הפרטי שלנו הוא

$$y(x) = \frac{1}{3}x^3e^{4x} + e^{4x} - 4xe^{4x} + 8x^2e^{4x}$$

או

$$y(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 + 8x^2 - 4x + 1\right)e^{4x}$$

שאלה 3: [22%]

א. (11 נק') פיתרו את המערכת

$$\vec{X}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \vec{X}$$

פיתרון:

הפולינום האופייני של מטריצת המקדמים הוא

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda)[(\lambda-2)(\lambda-1)-\lambda+1]+2(\lambda-1) \\ &= (\lambda-1)[(2-\lambda)(\lambda-3)+2] \\ &= (\lambda-1)(-\lambda^2+5\lambda-4) \\ &= -(\lambda-1)^2(\lambda-4)=0 \end{aligned}$$

במהלך החישוב החסרנו את השורה השלישית מהשורה השנייה, ופיתוח הדטרמיננטה נעשה על פי העמודה הראשונה.

ערכים עצמיים: $\lambda = 1$ (ריבוי אלגברי 2), $\lambda = 4$ (ריבוי אלגברי 1).

הוקטורים העצמיים השייכים ל־$\lambda = 1$ מתקבלים על ידי פיתרון המערכת

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

שלאחר דירוג תהפוך למערכת

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

זוהי מערכת עם דרגת חופש 2, ולכן גם הריבוי הגאומטרי של $\lambda = 1$ הוא 2. לא קשה

למצוא את שני הוקטורים עצמיים הבאים

$$\vec{\mathrm{a}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{\mathrm{b}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

הוקטורים העצמיים השייכים ל־$\lambda = 4$ מתקבלים על ידי פיתרון המערכת

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

שלאחר דירוג תהפוך למערכת

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

כצפוי, זוהי מערכת עם דרגת חופש 1, כלומר הריבוי הגאומטרי של $\lambda = 4$ הוא 1. לא קשה למצוא את הוקטור העצמי הבא

$$\vec{\mathrm{c}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

הפיתרונות היסודיים של המערכת ההומוגנית הם לכן

$$\vec{\mathrm{u}}_1(t) = \vec{\mathrm{a}}e^t = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t, \quad \vec{\mathrm{u}}_2(t) = \vec{\mathrm{b}}e^t = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^t, \quad \vec{\mathrm{u}}_3(t) = \vec{\mathrm{c}}e^{4t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t}$$

ולכן הפיתרון הכללי למערכת ההומוגנית הוא

$$\overrightarrow{X}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^t + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t}$$

ב. (11 נק') פתרו את המערכת

$$\vec{X}' = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \vec{X}$$

כאשר a, b, הם קבועים ממשיים, $b \neq 0$, $a \neq \pm b$. עם התנאי: $\vec{X}(0) = \vec{0}$.
פיתרון: הפולינום האופייני כאן הוא

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & a-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)^2 - b^2 = \lambda^2 - 2a\lambda + a^2 - b^2 = 0$$

פיתרון המשוואה הריבועית האחרונה הוא

$$\lambda = \frac{2a \pm \sqrt{4a^2 - 4(a^2-b^2)}}{2} = a \pm b$$

ערכים עצמיים: $\lambda = a+b$, $\lambda = a-b$.

הוקטורים העצמיים השייכים ל־$\lambda = a+b$ מתקבלים על ידי פיתרון המערכת

$$\begin{pmatrix} -b & b \\ b & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ברור כי

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

הוא וקטור עצמי.

הוקטורים העצמיים השייכים ל־$\lambda = a-b$ מתקבלים על ידי פיתרון המערכת

$$\begin{pmatrix} b & b \\ b & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

קל למצוא את הוקטור העצמי הבא

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

הפיתרונות היסודיים של המערכת ההומוגנית הם לכן

$$\vec{u}_1(t) = \vec{a}e^{(a+b)t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{(a+b)t}, \quad \vec{u}_2(t) = \vec{b}e^{(a-b)t} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{(a-b)t}$$

ולכן הפיתרון הכללי למערכת ההומוגנית הוא

$$\overrightarrow{X}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{(a+b)t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{(a-b)t}$$

שאלה 4: [15%]

א. (10 נק') מצאו פתרון כללי למד"ר $(1-x^2)y'' - xy' + 2y = 0$ באמצעות טור חזקות סביב הנקודה $x = 0$. יש לרשום שלושה איברים ראשונים השונים מאפס של הטור כפתרון.

פיתרון: נציב את הטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ במשוואה

$$\begin{aligned}
y &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\
y' &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \\
y'' &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n \\
(1-x^2)y'' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n - x^2 \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^n \\
&= 2a_2 + 6a_3 x + \sum_{n=2}^{\infty} [(n+1)(n+2) a_{n+2} - n(n-1) a_n] x^n
\end{aligned}$$

לכן

$$\begin{aligned}
(1-x^2)y'' - xy' + 2y &= 2a_2 + 6a_3 x + \sum_{n=2}^{\infty} [(n+1)(n+2) a_{n+2} - n(n-1) a_n] x^n \\
&\quad - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2 a_n x^n \\
&= 2a_2 + 6a_3 x - a_1 x + 2a_0 + 2a_1 x \\
&\quad + \sum_{n=2}^{\infty} [(n+1)(n+2) a_{n+2} - n(n-1) a_n - n a_n + 2a_n] x^n \\
&= 2(a_0 + a_2) + (a_1 + 6a_3) x \\
&\quad + \sum_{n=2}^{\infty} [(n+1)(n+2) a_{n+2} - (n^2 - 2) a_n] x^n \\
&= 0
\end{aligned}$$

קיבלנו

$$\begin{cases} a_0 + a_2 = 0 \\ a_1 + 6a_3 = 0 \\ (n+1)(n+2)a_{n+2} - (n^2-2)a_n = 0, \quad n \geq 2 \end{cases}$$

בצורה נוחה יותר

$$\begin{cases} a_2 = -a_0 \\ a_3 = -\dfrac{a_1}{6} \\ a_{n+2} = \dfrac{(n^2-2)a_n}{(n+1)(n+2)}, \quad n \geq 2 \end{cases}$$

חמישה איברים ראשונים של הפיתרון

$$y(x) = a_0 + a_1 x - a_0 x^2 - \frac{a_1}{6}x^3 - \frac{a_0}{6}x^4 \cdots$$

ב. (5 נק') האם קיים פתרון של המשוואה ב־א' שהוא פולינום לא טריביאלי? אם כן הביאו דוגמא. אם לא הסבירו מדוע זה לא יתכן.

פיתרון: קל לראות מנוסחת הנסיגה שאם $a_0 \neq 0$ או $a_1 \neq 0$ אז לטור יש אינסוף מקדמים ששונים מאפס. כלומר הפולינום היחיד שפותר את המשוואה הוא הפולינום הטריביאלי.

שאלה 5: [20%]

פתרו את המד"ר הבאה באמצעות התמרת לפלס עבור $t \geq 0$

$$y'' + 4y = g(t) \qquad y(0) = y'(0) = 0$$

$$g(t) = \begin{cases} 3\sin(t), & 0 \leq t < 2\pi \\ 0, & 2\pi \leq t \end{cases}$$

זכרו כי $\sin(t) = \sin(t+2\pi) = \sin(t-2\pi)$.

פיתרון: נוכל לרשום את $g(t)$ באופן הבא

$$g(t) = 3(1-u_{2\pi}(t))\sin t = 3\sin t - 3u_{2\pi}(t)\sin t$$

נחשב את התמרת לפלס של $g(t)$ על ידי שימוש בשתי הנוסחאות הבאות

$$\begin{aligned} \mathscr{L}[\sin at] &= \tfrac{a}{s^2+a^2} \\ \mathscr{L}[u_c(t)f(t-c)] &= e^{-cs}\mathscr{L}[f(t)] \end{aligned}$$

נקבל

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[g(t)] &= 3\mathscr{L}[\sin t] - 3\mathscr{L}[u_{2\pi}(t)\sin t] \\ &= 3\mathscr{L}[\sin t] - 3\mathscr{L}[u_{2\pi}(t)\sin(t-2\pi)] \\ &= \frac{3}{s^2+1} - \frac{3e^{-2\pi s}}{s^2+1}\end{aligned}$$

נפעיל התמרת לפלס על שני האגפים של המשוואה שלנו

$$s^2\mathscr{L}[y] - sy(0) - y'(0) + 4\mathscr{L}[y] = \frac{3}{s^2+1} - \frac{3e^{-2\pi s}}{s^2+1}$$

תנאי ההתחלה מתאפסים ולכן נקבל

$$(s^2+4)\mathscr{L}[y] = \frac{3}{s^2+1} - \frac{3e^{-2\pi s}}{s^2+1}$$

ולכן

$$\mathscr{L}[y] = \frac{3}{(s^2+1)(s^2+4)} - \frac{3e^{-2\pi s}}{(s^2+1)(s^2+4)}$$

על ידי פירוק לשברים יסודיים נקבל

$$\frac{3}{(s^2+1)(s^2+4)} = \frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+4}$$

ולכן

$$\mathscr{L}[y] = \frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+4} - \frac{e^{-2\pi s}}{s^2+1} + \frac{e^{-2\pi s}}{s^2+4}$$

לכן

$$\begin{aligned}y(t) &= \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right] - \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+4}\right] - \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{e^{-2\pi s}}{s^2+1}\right] + \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{e^{-2\pi s}}{s^2+4}\right] \\ &= \sin t - \frac{1}{2}\sin 2t - u_{2\pi}(t)\sin(t-2\pi) + \frac{1}{2}u_{2\pi}(t)\sin 2(t-2\pi) \\ &= \sin t - \frac{1}{2}\sin 2t - u_{2\pi}(t)\sin t + \frac{1}{2}u_{2\pi}(t)\sin 2t\end{aligned}$$