משוואות דיפרנציאליות רגילות 104131

פיתרון המבחן סופי, מועד א', סמסטר א' תשע"ח, 12.02.2018

שאלה 1: [23%]

א. (11 נק') הראו כי הפיתרון של המשוואה $y' = \frac{y + y^2 \cos x}{x^2 + y^2 + 1}$ המקיים $y(0) = 1$ מקיים גם $y(x) > 0$.

פיתרון: קל לבדוק שהפונקציה $f(x, y) = \frac{y + y^2 \cos x}{x^2 + y^2 + 1}$ ונגזרתה $\frac{\partial f}{\partial y}$ רציפות על כל המישור $\mathbb{R}^2$. כמו־כן, ברור כי $y = 0$ הוא פיתרון טריביאלי של המשוואה על כל הישר הממשי. על פי משפט הקיום והיחידות קיים פיתרון יחיד $y(x)$ המקיים $y(0) = 1$ בסביבת $x = 0$. נוכיח כי פיתרון זה חיובי בכל תחום ההגדרה שלו.

אם הפיתרון היה חותך את ציר ה־x היינו מקבלים שני פיתרונות שונים דרך נקודת החיתוך. כיוון שהפיתרון $y(x)$ הוא פונקציה גזירה ובפרט רציפה, מתקיים $y(x) > 0$ בכל תחום הגדרתה.

ב. (12 נק') מצאו פיתרון מפורש של המשוואה $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y - 1)}$ העובר דרך הנקודה $(0, -1)$

פיתרון: זוהי משוואה פרידה

$$(2y - 2)dy = (3x^2 + 4x + 2)dx$$

אינטגרציה

$$y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + C$$

קיבלנו משוואה ריבועית ב־y

$$y^2 - 2y - (x^3 + 2x^2 + 2x + C) = 0$$

שפיתרונה

$$y = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4(x^3 + 2x^2 + 2x + C)}}{2}$$

לאחר צימצום

$$y = 1 \pm \sqrt{1 + (x^3 + 2x^2 + 2x + C)}$$

התנאי $y(0) = -1$ מחייב לקחת את סימן המינוס

$$y(0) = 1 - \sqrt{1 + C} = -1$$

לכן

$$\sqrt{1 + C} = 2$$

קיבלנו $C = 3$. לכן הפיתרון הפרטי שלנו הוא

$$y = 1 - \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + 4}$$

שאלה 2: [20%]

א. (4 נק') בידקו שהפונקציה e^x הינה פיתרון של המד"ר

$$(1 - 2x)y'' + 2y' + (2x - 3)y = 0$$

פיתרון: טריביאלי.

ב. (6 נק') מצאו פתרון שני שאינו כפולה בסקלר של e^x עבור $x < \frac{1}{2}$.
פיתרון: נשתמש בשיטת הורדת הסדר. נחפש פיתרון מהצורה $y(x) = e^x v(x)$

$$\begin{aligned} y' &= e^x v + e^x v' = e^x(v + v') \\ y'' &= e^x v + 2e^x v' + e^x v'' = e^x(v'' + 2v' + v) \end{aligned}$$

נציב במשוואה

$$\begin{aligned} &(1 - 2x)y'' + 2y' + (2x - 3)y = \\ &\quad = (1 - 2x)e^x(v'' + 2v' + v) + 2e^x(v' + v) + (2x - 3)e^x v \\ &\quad = e^x(1 - 2x)v'' + e^x(4 - 4x)v' = 0 \end{aligned}$$

נצמצם ב־ e^x ונגדיר $u = v'$, ונקבל מד"ר ליניארית פרידה

$$(1 - 2x)\frac{du}{dx} + (4 - 4x)u = 0$$

לאחר הפרדת משתנים נקבל

$$\frac{du}{u} = \frac{4x - 4}{1 - 2x}dx$$

נבצע אינטגרציה בשני האגפים

$$\ln u = \int \frac{4x - 4}{1 - 2x}dx = \int \left(-2 - \frac{2}{1 - 2x}\right)dx = -2x + \ln(1 - 2x)$$

יש לשים לב לכך שהתבקשנו למצוא פיתרון בתחום $x < \frac{1}{2}$, ולכן הביטוי $\ln(1 - 2x)$ מוגדר. לכן

$$u = e^{-2x}(1 - 2x)$$

לכן

$$v(x) = \int u(x) = \int e^{-2x}(1 - 2x)dx = xe^{-2x}$$

את האינטגרל האחרון קל לפתור באמצעות אינטגרציה בחלקים. ולכן הפיתרון השני

למשוואה שלנו הוא
$$y(x) = e^x v(x) = xe^{-x}$$

פיתרון שני שמתבסס על נוסחת אבל (Abel) והורונסקיאן:

על פי נוסחת Abel
$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = e^{-\int p_1(x)dx} = e^{-\int \frac{2}{1-2x}dx} = e^{\ln(1-2x)} = 1-2x$$

נתון כי $y_1(x) = e^x$ ולכן
$$W(x) = \begin{vmatrix} e^x & y_2(x) \\ e^x & y_2'(x) \end{vmatrix} = e^x[y_2'(x) - y_2(x)] = 1-2x$$

קיבלנו מד"ר ליניארית מסדר ראשון בנעלם $y_2(x)$
$$y_2'(x) - y_2(x) = (1-2x)e^{-x}$$

בצורה נורמלית $y' + a(x)y = b(x)$ שפיתרונה הכללי
$$y(x) = e^{-\int a(x)dx}\left[\int b(x)e^{\int a(x)dx} + C\right]$$

אנו מחפשים פיתרון פרטי ולכן נקח $C = 0$.
נציב גם $a(x) = -1$, $b(x) = (1-2x)e^{-x}$ ונקבל
$$y_2(x) = e^x \int (1-2x)e^{-x} \cdot e^{-x} dx$$

ולכן
$$y_2(x) = e^x \int (1-2x)e^{-2x} dx = e^x(xe^{-2x}) = xe^{-x}$$

פיתרון שלישי שמתבסס על נוסחת אבל (Abel) והורונסקיאן:

קיימת הנוסחה הישירה הבאה עבור $y_2(x)$ שמקלה מאוד על החישובים
$$y_2(x) = y_1(x)\int \frac{W(x)}{y_1(x)^2}dx = y_1(x)\int \frac{e^{-\int p_1(x)dx}}{y_1(x)^2}dx$$

על ידי הצבות מתאימות מקבלים
$$\begin{aligned} y_2(x) &= e^x \int \frac{e^{-\int \frac{2}{1-2x}dx}}{e^{2x}}dx \\ &= e^x \int e^{-2x}(1-2x)dx = e^x(xe^{-2x}) = xe^{-x} \end{aligned}$$

ג. (4 נק') בדקו כי הפונקציה שקיבלתם בסעיף ב' הינה אכן פתרון של המד"ר עבור $x < \frac{1}{2}$.

פיתרון: הבדיקה טריביאלית

$$\begin{aligned} y &= xe^{-x} \\ y' &= (-x+1)e^{-x} \\ y'' &= (x-2)e^{-x} \\ (1-2x)y'' &= (1-2x)(x-2)e^{-x} = -2x^2+5x-2 \\ 2y' &= (-2x+2)e^{-x} = -2x+2 \\ (2x-3)y &= (2x-3)xe^{-x} = 2x^2-3x \end{aligned}$$

הסכום של שלושת השוויונים האחרים מוכיח שזהו אכן פיתרון.

ד. (6 נק') מצאו את הפיתרון של המד"ר המקיים את תנאי ההתחלה $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.
האם יש פיתרון של המד"ר על כל הישר הממשי המקיים את תנאי ההתחלה?

פיתרון: הפיתרון הכללי של המד"ר הוא

$$y(x) = c_1e^x + c_2xe^{-x}$$

לכן

$$y'(x) = c_1e^x + c_2(1-x)e^{-x}$$

תנאי ההתחלה מובילים למערכת משוואות ליניארית

$$\begin{aligned} c_1 &= 1 \\ c_1 + c_2 &= 2 \end{aligned}$$

ולכן $c_1 = c_2 = 1$, ולכן הפיתרון הפרטי הוא

$$y(x) = e^x + xe^{-x}$$

זהו כמובן פיתרון תקף לכל הישר הממשי.

שאלה 3: [22%]

א. (10 נק') פיתרו את המערכת

$$\vec{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \vec{X}$$

פיתרון:

הפולינום האופייני של מטריצת המקדמים הוא

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & \lambda & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2-2\lambda)+2\lambda = -\lambda^3+3\lambda^2$$

במהלך החישוב החסרנו את השורה השלישית מהשורה השנייה, ופיתוח הדטרמיננטה נעשה על פי העמודה הראשונה.

ערכים עצמיים: $\lambda = 0$, $\lambda = 3$.

הוקטורים העצמיים השייכים ל־$\lambda = 0$ מתקבלים על ידי פיתרון המערכת

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

שלאחר דירוג פשוט תהפוך למערכת

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

זוהי מערכת עם דרגת חופש 2, ולכן הריבוי הגאומטרי של $\lambda = 0$ הוא 2. לא קשה למצוא את שני הוקטורים עצמיים הבאים

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

הוקטורים העצמיים השייכים ל־$\lambda = 3$ מתקבלים על ידי פיתרון המערכת

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

שלאחר דירוג ופישוט תהפוך למערכת

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

כצפוי, זוהי מערכת עם דרגת חופש 1, כלומר הריבוי הגאומטרי של $\lambda = 3$ הוא 1. לא קשה למצוא את הוקטור העצמי הבא

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

הפיתרונות היסודיים של המערכת ההומוגנית הם לכן

$$\vec{u}_1(t) = \vec{a}e^{0t} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_2(t) = \vec{b}e^{0t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_3(t) = \vec{c}e^{3t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}$$

ולכן הפיתרון הכללי למערכת ההומוגנית הוא

$$\vec{h}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}$$

ב. (15 נק') פתרו את המערכת

$$\overrightarrow{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \overrightarrow{X} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

עם התנאי: $\overrightarrow{X}(0) = \vec{0}$.

פיתרון: יש למצוא קודם פיתרון כללי של המערכת ההומוגנית

$$\vec{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \vec{X}$$

הפולינום האופייני כאן הוא

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda = 0$$

ערכים עצמיים: $\lambda = 0$, $\lambda = 2$.

הוקטורים העצמיים השייכים ל־$\lambda = 0$ מתקבלים על ידי פיתרון המערכת

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

לא קשה לראות כי

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

הוא וקטור עצמי.

הוקטורים העצמיים השייכים ל־$\lambda = 2$ מתקבלים על ידי פיתרון המערכת

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

לא קשה למצוא את הוקטור העצמי הבא

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

הפיתרונות היסודיים של המערכת ההומוגנית הם לכן

$$\vec{u}_1(t) = \vec{a}e^{0t} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_2(t) = \vec{b}e^{2t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

ולכן הפיתרון הכללי למערכת ההומוגנית הוא

$$\vec{h}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

על פי שיטת הוריאציה של הפרמטרים יש למצוא פיתרון פרטי $\vec{p}(t)$ שצורתו

$$\vec{p}(t) = c_1(t)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + c_2(t)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{2t}$$

כאשר $c_1'(t)$, $c_2'(t)$, מתקבלים מפיתרון המערכת

$$c_1'(t)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + c_2'(t)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{2t} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

ניתן לפתור את המערכת הזו על ידי שיטת הדירוג או על ידי שימוש בנוסחאות המבוססות על כלל קרמר. במקרה הנוכחי

$$W = W[\vec{u}_1, \vec{u}_2] = \begin{vmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{vmatrix}e^{2t} = 2e^{2t}$$

$$W_1 = W[\vec{q}, \vec{u}_2] = \begin{vmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{vmatrix}e^{2t} = e^{2t}$$

$$W_2 = W[\vec{u}_1, \vec{q}] = \begin{vmatrix}1 & 1\\-1 & 0\end{vmatrix} = 1$$

לכן

$$c_1'(t) = \frac{W_1}{W} = \frac{1}{2}, \qquad c_2'(t) = \frac{W_2}{W} = \frac{1}{2}e^{-2t}$$

לכן

$$c_1(t) = \frac{t}{2}, \qquad c_2(t) = -\frac{1}{4}e^{-2t}$$

הפיתרון הפרטי שלנו הוא לכן

$$\vec{p}(t) = \frac{t}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} - \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{t}{2}-\frac{1}{4}\\-\frac{t}{2}-\frac{1}{4}\end{pmatrix}$$

עקב הסבירות הגבוהה לשגיאת חישוב בתהליך הנ"ל מומלץ מאוד לבדוק שאכן $\vec{p}(t)$ הוא פיתרון של המערכת הלא־הומוגנית:

$$A\vec{p}(t) + \vec{q} = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{t}{2}-\frac{1}{4}\\-\frac{t}{2}-\frac{1}{4}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix} = \vec{p}'(t)$$

הפיתרון הכללי של המערכת הלא־הומוגנית הוא

$$\vec{X}(t)=\begin{pmatrix}\frac{t}{2}-\frac{1}{4}\\ -\frac{t}{2}-\frac{1}{4}\end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}e^{2t}$$

תנאי התחלה

$$\vec{X}(0)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}\\ -\frac{1}{4}\end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

מוביל למערכת משוואות ליניארית

$$\begin{aligned} c_1+c_2 &= \frac{1}{4}\\ -c_1+c_2 &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

שפיתרונה: $c_1=0$, $c_2=\frac{1}{4}$.

לכן הפיתרון הפרטי שלנו הוא

$$\vec{X}(t)=\begin{pmatrix}\frac{t}{2}-\frac{1}{4}\\ -\frac{t}{2}-\frac{1}{4}\end{pmatrix}+\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}e^{2t}=\begin{pmatrix}\frac{t}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}e^{2t}\\ -\frac{t}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}e^{2t}\end{pmatrix}$$

בדיקה פשוטה מוכיחה שזהו אכן הפיתרון הפרטי לבעיית ההתחלה.

שאלה 4: [15%]

נתונה המד"ר $y''(x)+x^2y'(x)-4xy(x)=0$, ויהי $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ פיתרון של המד"ר.

א. (10 נקודות) כתבו את נוסחת הנסיגה של מקדמי הפתרון עבור a_n, $n\geq 2$.

פיתרון: נציב את הטור במשוואה

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\\ y'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}\\ y''(x) &= \sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n\end{aligned}$$

לכן

$$\begin{aligned} y''+x^2y'-4xy &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}4a_nx^{n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n+\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)a_{n-1}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}4a_{n-1}x^n \\ &= 2a_2+6a_3x-4a_0x+\sum_{n=2}^{\infty}[(n+1)(n+2)a_{n+2}+(n-5)a_{n-1}]x^n \\ &= 0 \end{aligned}$$

קיבלנו

$$\begin{cases} a_2=0 \\ 6a_3-4a_0=0 \\ (n+1)(n+2)a_{n+2}+(n-5)a_{n-1}=0, \quad n\geq 2 \end{cases}$$

נוסחת הנסיגה עבור $n \geq 2$ היא

$$a_{n+2}=\frac{(5-n)a_{n-1}}{(n+1)(n+2)}$$

או בצורה יותר ברורה

$$a_{n+3}=\frac{(4-n)a_n}{(n+2)(n+3)}, \quad n\geq 1$$

ב. (5 נק') מצאו עבור אלו ערכים של $y(0)$ ו $y'(0)$ הפיתרון הוא פולינום לא טריביאלי. כתוב את הפולינום.

פיתרון: על פי התוצאה לעיל $a_2=0$, ולכן מנוסחת הנסיגה נובע כי לכל $k\geq 0$, $a_{3k+2}=0$.

נזכיר כי $a_0=y(0)$, $a_1=y'(1)$. בכדי להגדיל את סיכויי ההתאפסות של מרבית מקדמי הטור ננסה לבדוק את המקרים שבהם $a_0=0$ או $a_1=0$.

כאשר $a_0=y(0)=0$, מהתוצאה לעיל נובע כי גם $a_3=0$, ולכן על פי נוסחת הנסיגה, לכל $k\geq 0$, $a_{3k}=0$.

נותר לבדוק את המקדמים a_{3k+1}: אם נציב $n=4$ בנוסחת הנסיגה נקבל כי תמיד $a_7=0$ (בלא תלות בתנאי ההתחלה!). לכן $a_{3k+1}=0$ לכל $k\geq 2$.

לסיכום קיבלנו שאם $y(0)=0$ אז כל מקדמי הטור מתאפסים חוץ אולי מהמקדמים: a_1, a_4. מקדמים אלה נקבעים על ידי $y'(0)$:

$$a_1=y'(0), \qquad a_4=\frac{3a_1}{12}=\frac{y'(0)}{4}$$

והפיתרון שלנו יצטמצם לפולינום הפשוט הבא

$$y(x) = y'(0)x + \frac{y'(0)}{4}x^4$$

המקרה השני בו $y'(0) = 0$ אינו מוביל לתוצאה דומה. לכן התשובה לשאלה היא שכאשר $y(0) = 0$ ו־ $y'(0) \neq 0$ נקבל פיתרון שהוא פולינום ממעלה 4.

שאלה 5: [20%]

פתרו באמצעות התמרת לפלס עבור $t \geq 0$ את הבעייה הבאה:

$y'' + \pi^2 y = f(t)$ כאשר

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 4 \\ 2, & t > 4 \end{cases} \qquad \text{עם תנאי התחלה} \qquad \begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

פיתרון: נציג את $f(t)$ באופן הבא

$$f(t) = 1 + u_4(t)$$

נחשב את התמרת לפלס של $f(t)$

$$\mathscr{L}[f] = \mathscr{L}[1] + \mathscr{L}[u_4(t)] = \frac{1}{s} + \frac{e^{-4s}}{s}$$

נפעיל התמרת לפלס על שני האגפים של המשוואה

$$s^2\mathscr{L}[y] - sy(0) - y'(0) + \pi^2\mathscr{L}[y] = \frac{1}{s} + \frac{e^{-4s}}{s}$$

תנאי ההתחלה מתאפסים ולכן נקבל

$$(s^2 + \pi^2)\mathscr{L}[y] = \frac{1}{s} + \frac{e^{-4s}}{s}$$

ולכן

$$\mathscr{L}[y] = \frac{1}{s(s^2+\pi^2)} + \frac{e^{-4s}}{s(s^2+\pi^2)}$$

על ידי שברים חלקיים נקבל

$$\frac{1}{s(s^2+\pi^2)} = \frac{1}{\pi^2 s} - \frac{s}{\pi^2(s^2+\pi^2)}$$

ולכן

$$\mathscr{L}[y] = \frac{1}{\pi^2 s} - \frac{s}{\pi^2(s^2+\pi^2)} + \frac{e^{-4s}}{\pi^2 s} - \frac{se^{-4s}}{s^2+\pi^2}$$

ולכן

$$y_p(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{\pi^2 s}\right] - \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s}{\pi^2(s^2+\pi^2)}\right] + \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{e^{-4s}}{\pi^2 s}\right] - \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{se^{-4s}}{s^2+\pi^2}\right]$$

את שתי ההתמרות ההפוכות נקבל מנוסחאות 1 ו־4 בטבלת התמרות לפלס. את שתי ההתמרות האחרונות נקבל מנוסחה 15

$$y_p(t) = \frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{\pi^2}\cos\pi t + \frac{1}{\pi^2}u_4(t) - u_4(t)\cos\pi(t-4)$$

ב. (5 נק') פתרו באמצעות הסעיף הקודם עבור $t \geq 0$ את הבעייה הבאה: $y'' + \pi^2 y = f(t)$ כאשר

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 4 \\ 2, & t > 4 \end{cases} \qquad \text{עם תנאי התחלה} \qquad \begin{cases} y(0) = \frac{1}{\pi^2} \\ y'(0) = \pi \end{cases}$$

רמז: בסעיף זה אין צורך להשתמש בהתמרת לפלס ותכונותיה.

פיתרון: נמצא פיתרון כללי למד"ר באמצעות הפיתרון הפרטי y_p שמצאנו בסעיף הקודם ובאמצעות הפיתרון הכללי של המשוואה ההומוגנית $y'' + \pi^2 y = 0$:

$$\begin{aligned} y(t) &= y_p(t) + c_1\cos\pi t + c_2\sin\pi t \\ &= \tfrac{1}{\pi^2} - \tfrac{1}{\pi^2}\cos\pi t + \tfrac{1}{\pi^2}u_4(t) + u_4(t)\cos\pi(t-4) + c_1\cos\pi t + c_2\sin\pi t \\ &= \tfrac{1}{\pi^2} + \tfrac{1}{\pi^2}u_4(t) + u_4(t)\cos\pi(t-4) + c_1\cos\pi t + c_2\sin\pi t \end{aligned}$$

הנגזרת היא

$$y'(t) = -\pi u_4(t)\sin\pi(t-4) - \pi c_1\sin\pi t + \pi c_2\cos\pi t$$

נציב את תנאי ההתחלה הנוכחיים

$$\begin{aligned} y(0) &= \tfrac{1}{\pi^2} + c_1 = \tfrac{1}{\pi^2} \\ y'(0) &= \pi c_2 \end{aligned}$$

ונקבל $c_1 = 0$, $c_2 = 1$. לכן הפיתרון הפרטי במקרה הנוכחי הוא

$$y_p(t) = \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{\pi^2}u_4(t) + u_4(t)\cos\pi(t-4) + \sin\pi t$$