חדו"א 2ת

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2ת 104013

מרצה: ד"ר סמי זעפרני

דף Moodle של הקורס:

Moodle Course 104013 Home Page

נא לפנות לדף המוודל בכל הנושאים האדמיניסטרטיביים כגון עבודות בית, שעות קבלה ופרטי קשר של מרצים ומתרגלים, מדיניות ציונים, ספרי לימוד, חומרי לימוד, מבחנים וכולי. דף המידע של הקורס מכיל בצורה מרוזת את המידע העיקרי של הקורס

דף המידע של הקורס חדו"א 2ת

דף האינטרנט הפרטי של מרצה הקורס יכלול מערך הרצאות וחומרי לימוד נוספים.

http://www.samyzaf.com/technion/hedva2t

1. נושאי הלימוד

1. **גיאומטריה אנליטית במרחב** [5 שעות]

וקטורים [3 שעות]: הוקטור כאובייקט גיאומטרי הנקבע ע"י גודל כיוון ומגמה. שוויון וקטורים, וקטור האפס, וקטור יחידה, סכום והפרש וקטורים, כפל וקטור בסקלר. תלות ליניארית, וקטורים קוליניאריים, וקטורים קופלנאריים. הגדרת מכפלה סקלרית בדרך גיאומטרית או על פי נוסחה (לפי בחירת המרצה) והוכחת הנוסחה או התכונות הגיאומטריות בהתאמה. היטל של וקטור על וקטור. אי שוויון קושי־שוורץ, אי שוויון המשולש. הגדרת מכפלה וקטורית בדרך גיאומטרית או על פי נוסחה (לפי בחירת המרצה) והוכחה חלקית של הנוסחה או התכונות הגיאומטריות בהתאמה. מכפלה מעורבת, נפח מקבילון.

מישורים וישרים במרחב [1 שעות]: מישור נקבע על־ידי נקודה עליו ווקטור הניצב לו. מישור העובר דרך 3 נקודות. ישר נקבע על־ידי נקודה עליו ווקטור המקביל לו. הצגה פרמטרית של ישר. הצגה קנונית של ישר. ישר דרך 2 נקודות. אי יחידות ההצגות של מישורים וישרים.

משטחים ריבועיים וגליליים [1 שעות]: כדור, אליפסואיד, חרוט דו־צדדי, (פרבולואיד היפרבולי, היפרבולואיד חד ודו־יריעתי). חתכים של משטח. משטחים גליליים הגדרה כללית. דיון רק במקרה שציר המשטח הגלילי מקביל לאחד הצירים הראשיים.

2. מבוא להעתקות ופונקציות [6 שעות]:

מבוא לעקומים במרחב:[2 שעות] עקום כתמונה ב־$\mathbb{R}^3$ של העתקה רציפה מתחום הפרמטר $[a,b]$ ל־$\mathbb{R}^3$. משיק לעקום. עקום חלק. דוגמה לעקום בעל נקודה t_0 שמקיימת $\vec{r}'(t_0)=\vec{0}$ שאין לו משיק ב־$\vec{r}(t_0)$. עקום כחיתוך שני משטחים. פרמטריזציה חח"ע.

פונקציה [2 שעות]: $f:D\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f:D\subseteq\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $f:D\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. העתקה: $f:D\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$. (כל רכיב של ההעתקה הוא פונקציה). המקרים פרטיים: $f:D\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f:D\subseteq\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$. תחום הגדרה מקסימאלי. גרף של פונקציה, משמעות גיאומטרית עבור $f:D\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$. קווי גובה (הערה עבור פונקציה שקווי הגובה שלה אינם עקומים) – דוגמה מפה גיאוגרפית. משטחי רמה.

טופולוגיה בסיסית [2 שעות]: פונקצית מרחק. מטריקה אוקלידית, מרחב אוקלידי, מרחב מטרי. כדור במטריקה אוקלידית. כדור פתוח. סביבה תיבתית. נקודה פנימית. קבוצה פתוחה. נקודת שפה. קבוצה סגורה. קבוצה חסומה. קשירות (מסילתית). תחום: קבוצה פתוחה וקשירה. סדרה של נקודות ב־$\mathbb{R}^n$. גבול של סדרה. משפט: סדרת נקודות ב־$\mathbb{R}^n$ מתכנסת לגבול אם ורק אם כל סדרות הקואורדינטות מתכנסות. להזכיר את העובדות הבאות (ללא הוכחה):

- משפט בולצאנו־ואיירשטראס
- קבוצה היא סגורה אם ורק אם היא מכילה את כל נקודות ההצטברות שלה.
- להגדיר קבוצה קומפקטית ב־$\mathbb{R}^n$ כקבוצה סגורה וחסומה.

הרכבה של פונקציות. התנהגות של פונקציה $f(x,y)$ או $f(x,y,z)$ לאורך עקום ועל איברי סדרה.

3. גבול רציפות וגזירות [8 שעות]

גבול [1 שעות]: הגדרה כללית עבור $f:D\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. משמעות גאומטרית. גבול לאורך עקום. הגדרת הגבול לפי סדרות (משפט היינה) או לפי התנהגות הפונקציה לאורך עקומים. הגבולות: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^4+y^2}$, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}$. גבול בנקודת שפה. משפטים ידועים על פונקציה של משתנה אחד שניתן להשתמש בהם לחישוב גבולות: כלל הסנדוויץ, מכפלת פונקציה חסומה בפונקציה השואפת לאפס. ערנות בשימוש בקואורדינאטות קוטביות.

רציפות [1 שעות]: הגדרה בעזרת גבולות. תכונות וגבול לאורך עקום. רציפות הפונקציה המורכבת. משפט ערך הביניים. משפטי וייארשטראס. הנגזרת החלקית, משמעות גיאומטרית. דוגמה שקיום הנגזרות החלקיות לא בהכרח גוררת רציפות. הגדרת דיפרנציאביליות/גזירות (עם המוטיבציה מפונקציות של משתנה אחד).
נגזרות חלקיות, כלל השרשרת, נגזרת מכוונת, הגרדיאנט, נגזרות מסדר גבוה: [6 שעות] הנגזרת החלקית, משמעות גיאומטרית. דוגמה שקיום הנגזרות החלקיות לא בהכרח גוררת רציפות. הגדרת דיפרנציאביליות־גזירות (עם המוטיבציה מפונקציות של משתנה אחד). שלושת המשפטים:

- אם f גזירה אז היא רציפה
- אם f גזירה אז קיימות הנגזרות החלקיות שלה
- אם הנגזרות החלקיות רציפות אז f גזירה.

כלל השרשרת עבור: $f(x(t),y(t),z(t))$ ו־ $f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$. הגדרת הגרדיאנט. הנגזרת המכוונת (להקפיד על גבול דו־צדדי בהגדרתה). משפט: אם f דיפרנציאבילית אזי $D_{\vec{n}}f=\vec{\nabla}f\cdot\vec{n}$. תכונותיו של וקטור הגרדיאנט: הגרדיאנט מצביע לכיוון הגידול המרבי של הפונקציה (עם הוכחה). הגדרת הישר המשיק לעקום $f(x,y)=C$ והמישור המשיק למשטח $f(x,y,z)=C$. הגרדיאנט ניצב למשטח שווה רמה או קו גובה. נגזרות חלקיות מסדר גבוה. משפט שוורץ.

4. משפט הפונקציות הסתומות ותוצאותיו [4 שעות]

משפט הפונקציות הסתומות: מוטיבציה, המקרים של $F(x,y)=c$ ו־ $F(x,y,z)=c$. דוגמה להכרחיות התנאים במשפט הפונקציות הסתומות. משפט הפונקציות הסתומות למקרה של מערכת:

$$\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases}$$

משפט הפונקציות ההפוכות. המשמעות הגיאומטרית עבור העתקות מהמישור על עצמו והמרחב על עצמו.

5. אינטגרלים כפולים ומשולשים [7 שעות]

מוטיבציה: משמעות גיאומטרית ופיזיקלית. הגדרת אינטגרביליות של פונקציה חסומה של 1, 2 או 3 משתנים המתאפסת מחוץ לקבוצה חסומה, בפרט של פונקציה מציינת של קבוצה חסומה. אינטגרלים על קבוצות מתאימות, תנאים מספיקים לאינטגרביליות. תכונות בסיסיות של אינטגרל כפול ומשולש. חישוב אינטגרל כפול במלבן ובתחומים X־פשוט ו־Y־פשוט כאינטגרל נשנה. דוגמאות, שינוי סדר האינטגרציה. שינוי משתנים באינטגרל כפול. העתקה לינארית, קואורדינטות קוטביות ואחרות. ההעתקה הקוטבית אינה חח"ע בתחום המכיל את הראשית. משפט שינוי המשתנים באינטגרל כפול. דיון על המקרה של

התאפסות היעקוביאן בנקודה או לאורך עקום. שימושים גיאומטריים ופיסיקאליים: נפח, שטח, מסה, מרכז מסה, מומנטי אינרציה.

6. **אנליזה וקטורית [16 שעות]**

אינטגרלים קוויים ומשפט גרין [6 שעות]: אורך של עקום. אינטגרל קווי מהסוג הראשון. משמעויות פיסיקליות וגיאומטריות: מסה, מרכז מסה, ושטח של משטח גלילי. דוגמאות. דיון באי תלות בפרמטריזציה. שדה וקטורי ופירושו הגיאומטרי. אינטגרל קווי מהסוג השני, עבודה. הנוסחה

$$\int C\vec{\vec{\nabla}}_{\varphi}\cdot d\vec{r}=\varphi(Q)-\varphi(P)$$

משפט גרין (הוכחה בתחום פשוט, תאור ההרחבות). דוגמאות, חישוב שטח מרכז מסה, וכו'. שדה משמר במישור.

אינטגרלים משטחיים, משפטי גאוס וסטוקס [10 שעות] הצגות של משטחים בצורה סתומה ובצורה פרמטרית. דוגמאות. נורמל למשטח. משטח חד־צדדי ודו־צדדי. משטח חלק. שטח של משטח, אי תלות בפרמטריזציה. אינטגרל משטחי מהסוג הראשון. דוגמאות. אינטגרל משטחי מהסוג השני, דוגמאות, משמעות פיסיקאלית ־ שטף. דיברגנץ, משפט גאוס (הוכחה בתחום פשוט), חישוב אינטגרלים. הגדרת הדיברגנץ ללא תלות במערכת הצירים. רוטור, משפט סטוקס. חישוב אינטגרלים, הגדרת הרוטור ללא תלות במערכת הצירים. הקשר למשפט גרין. הגדרת שדה במרחב. הוכחת המשפט: F שדה משמר בתחום D אם ורק אם קיום פונקצית פוטנציאל ל־F ב־D. כל אחד מהתנאים גורר $\vec{\nabla}\times F=\vec{0}$ דוגמא לכך שהכוון ההפוך אינו בהכרח נכון. הגדרת תחום פשוט קשר וציטוט המשפט: אם $\vec{\nabla}\times F=\vec{0}$ בתחום פשוט קשר D אזי F משמר ב־D. מסקנה: F משמר מקומי אם"ם $\vec{\nabla}\times F=\vec{0}$. השדה המרכזי $F(u)=\frac{u}{|u|^3}$, הלפלסיאן, פונקציות הרמוניות ותכונותיהן.

7. **שימושים של פונקציות גזירות [6 שעות]**

בעיות קיצון [2 שעות]: מבוא ודוגמאות גיאומטריות. תנאי הכרחי לקיום אקסטרמום עבור פונקציה בעלת נגזרות חלקיות. הגדרת נקודות קריטיות (גרדיאנט מתאפס) וחשודות. הוכחה עבור שני משתנים, וניסוח עבור שלשה משתנים.

בעיות קיצון עם אילוצים [2 שעות] מבוא, שיטת ההצבה, משפט כופלי לגראנז' עם אילוץ אחד או שנים. דוגמאות עם הדגשה על בדיקות גרדיאנטים שאינם מתאפסים ונקודות קצה. מציאת ערכי קיצון גלובליים. דוגמאות.

נוסחת טיילור ושימושיה [1 שעות] משפט טיילור לפונקציה בשני משתנים (ללא הוכחה). שימושים פשוטים.

מיון נקודות קריטיות בעזרת ההסיאן (Hessian) [1 שעות] הוכחה למקרה של שני משתנים וציטוט למקרה של 3 משתנים.