פונקציות מרוכבות והתמרות אינטגרליות (104221)

תירגול לקראת הבחינה הסופית

.1 קבוצת המספרים המרוכבים שמקיימת $|\frac{6}{z}-i|>1$ וגם $|e^{1-iz}|<1$ היא

א. $\{z\in\mathbb{C}\,|\,-3<\mathrm{Im}(z)<-1\}$

ב. $\{z\in\mathbb{C}\,|\,1<\mathrm{Im}(z)<3\}$

ג. $\{z\in\mathbb{C}\,|\,-3<\mathrm{Im}(z)<1\}$

ד. $\{z\in\mathbb{C}\,|\,-1<\mathrm{Im}(z)<3\}$

ה. $\{z\in\mathbb{C}\,|\,-3<\mathrm{Im}(z)<3\}$

תשובה: א

.2 הפונקציה $v(x,y)=3x^2y+ky^3-x+1$ היא משלים הרמוני של

$$u(x,y)=x^3-3xy^2+y$$

אם ורק אם

א. $k=0$ **ב.** $k=1$ **ג.** $k=-1$ **ד.** $k=-3$ **ה.** $k=3$

תשובה: $k=-1$

.3 המשלים ההרמוני של $u(x,y)=\log\sqrt{x^2+y^2}$ הוא

א. $\frac{x}{x^2+y^2}$ **ב.** $\frac{y}{x^2+y^2}$ **ג.** $\arctan\frac{x}{y}$ **ד.** $\arctan\frac{y}{x}$ **ה.** $\arctan\frac{-y}{x^2+y^2}$

תשובה: $v(x,y)=\arctan\frac{y}{x}$

.4 הפונקציה $f(z)=|\bar{z}|^2$

א. אנליטית על כל המישור המרוכב

ב. אנליטית בנקודה $z=0$ אך לא גזירה בנקודה $z=0$

ג. גזירה בנקודה $z=1$ בלבד

ד. גזירה בנקודה $z=0$ אך אינה אנליטית בנקודה $z=0$

תשובה: ד.

.5 יהי $\mathrm{Log}(z)$ הענף העיקרי של פונקציית הלוגריתם הטבעי, ויהי $L(z)$ ענף כלשהו של פונקציית הלוגריתם הטבעי.

א. חשב את $\oint_{|z|=1} z\mathrm{Log}(z)\,dz$

ב. הוכח כי $\mathrm{Log}(z)-L(z)$ קבוע בכל תחום ההגדרה המשותף

ג. הוכח כי $\oint_{|z|=1} zL(z)\,dz=\oint_{|z|=1} z\mathrm{Log}(z)\,dz$

תשובה: א. πi

6. תהי $f(z)$ ענף אנליטי של z^i בתחום $D = \mathbb{C} - \{\, iy \mid y \leq 0\}$. ידוע כי $f(1) = e^{2\pi}$. חשב את $f(i)$.

תשובה: $f(i) = e^{\frac{3\pi}{2}}$

7. לכל אחת מהפונקציות הבאות, מצא ענף אנליטי בתחום המבוקש

א. $f(z) = (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}}$, $D = \{\, z \in \mathbb{C} \,:\, |z| < 1\}$

ב. $f(z) = (4 + z^2)^{\frac{1}{2}}$, $D = \mathbb{C} - [-2i, 2i]$

ג. $f(z) = (z^4 - 1)^{\frac{1}{2}}$, $D = \{\, z \in \mathbb{C} \,:\, |z| > 1\}$

ד. $f(z) = (z^3 - 1)^{\frac{1}{3}}$, $D = \{\, z \in \mathbb{C} \,:\, |z| > 1\}$

תשובה: פיתרון למרבית הסעיפים מופיע בקישור הבא:

הסבר קצר על ענפים של פונקציות מרוכבות רב-ערכיות

8. הפונקציה $e^x(\cos y - i \sin y)$

א. אנליטית על כל $\mathbb{C}$

ב. אינה אנליטית בשום נקודה של $\mathbb{C}$

ג. אנליטית בנקודה $z = 1$ בלבד

ד. אנליטית בנקודה $z = i$ בלבד

ה. אנליטית בנקודה $z = -i$ בלבד

תשובה: ב.

9. מהו המקום הגאומטרי של כל הנקודות המקיימות את המשוואה

$$\left| \frac{z-3}{z+3} \right| = 2$$

תשובה: המעגל $|z+5| = 4$

10. תהי $f : B(0,1) \to B(0,1)$ פונקציה אנליטית מדיסק היחידה הפתוח אל עצמו. הוכח כי לכל $|z| < 1$, $|f'(z)| \leq \frac{1}{1-|z|}$.

11. תהי $f(z)$ פונקציה אנליטית בדיסק $|z| < R$, כאשר R ממשי חיובי. נגדיר פונקציה ממשית $g : [0, R] \to \mathbb{R}$ על ידי

$$g(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)|$$

הוכח כי g פונקציה מונוטונית עולה.

12. תהי $f(z)$ פונקציה לא קבועה ואנליטית בעיגול $|z-1| \leq 2$ (כולל השפה). נניח ש־

$|f(z)|=3$ על שפת העיגול הנ"ל, הוכח של־ f יש שורש אחד לפחות בתוך העיגול.

13. ערך האינטגרל $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{13+5\cos t}$ הוא

א. $\frac{\pi}{2}$ **ב.** $\frac{\pi}{3}$ **ג.** $\frac{\pi}{6}$ **ד.** $\frac{\pi}{12}$ **ה.** $\frac{\pi}{4}$

רמז: $f(z)=\frac{1}{5z^2+26z+5}$

תשובה: ג.

14. ערך האינטגרל $\int_\gamma e^{iz}dz$ על המסילה $\gamma(t)=i+e^{it}$, $-\frac{\pi}{2}\leq t\leq\frac{\pi}{2}$ הוא

א. ie^{-1} **ב.** $3e-i$ **ג.** $i(1-e^{-2})$ **ד.** $(1+i)e^{-3}$ **ה.** $(1-i)e^{-3}$

תשובה: ג.

15. נתונה הפונקציה $f(z)=\dfrac{\cot\pi z}{z^2+a^2}$, $a\neq 0$ ממשי.

א. מצא את הקטבים של הפונקציה

ב. הוכח כי $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+a^2}=\frac{\pi}{2a}\coth(\pi a)-\frac{1}{2a^2}$

תשובה: **א.** $\pm a$, $n\in\mathbb{Z}$, קטבים פשוטים.

16. חשב את השארית של הפונקציה $f(z)=\dfrac{e^z-1-z}{\sin(z)-z}$ בקוטב $z=0$.

17. מצא את הטור לורן סביב $z=-1$ של הפונקציה $f(z)=\frac{e^z}{(z+1)^5}$ בדרך הקצרה ככל האפשר.

רמז: $e^z=e^{-1}\cdot e^{z+1}$

תשובה: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-1}}{n!}(z+1)^n$

18. **א.** מצא את הקטבים (כולל סדר) של הפונקציה $f(z)=\frac{1}{(e^z+e^{-z})^3}$.

ב. חשב את השארית של הפונקציה בכל אחד מהקטבים שמצאת בסעיף הקודם.

ג. חשב את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(e^x+e^{-x})^3}$.

תשובה: **א.** $z=\frac{(2k+1)\pi i}{2}$, $z\in\mathbb{Z}$ **ב.** $\operatorname{Res}(f,z_1)=-\frac{i}{32}$ **ג.** $\frac{\pi}{16}$

19. אם $f(z)$ פונקציה שלמה, ואם $|f(z)|\leq K|z|^n$ עבור K ממשי ו־ n טבעי, אז $f(z)$ חייבת להיות פולינום.

20. הוכחה חלופית למשפט ליוביל: על סמך התרגיל הקודם הראה שאם $f(z)$ פונקציה שלמה וחסומה $|f(z)|\leq M$ אז f קבועה.

21. תהי $f(z)$ פונקציה אנליטית בעיגול $|z|<2$. ידוע שלכל מספר טבעי n, $f(\frac{1}{n})=\frac{n}{2n+1}$. חשב את $f(i)$.

22. תהי $f(z)$ פונקציה שלמה המקיימת $|f'(z)| \le |z|$ עבור כל $z \in \mathbb{C}$. הוכח כי

$$f(z) = a + bz^2, \quad |b| \le \frac{1}{2}$$

23. תהי $f(z)$ פונקציה אנליטית בעיגול היחידה $|z| \le 1$. הוכח שקיים מספר טבעי n כך ש־ $f(\frac{1}{n}) \neq \frac{1}{n+1}$.

24. תהי $f(z)$ פונקציה אנליטית וחסומה בתחום $D - \{z_0\}$. הוכח כי z_0 היא נקודת סינגולריות סליקה. כלומר, ניתן להגדיר את f בנקודה z_0 כך ש־ f תהיה אנליטית בתחום D.

25. אם $f(z)$ פונקציה אנליטית שלמה ואין לה גבול באינסוף, אז $z = 0$ היא נקודה סינגולרית עיקרית של הפונקציה $g(z) = f(\frac{1}{z})$.

26. לכל $a \in \mathbb{C}$ נגדיר פונקציה $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$f_a(z) = \begin{cases} \dfrac{\sin(z) - z}{z^2}, & z \neq 0 \\ a, & z = 0 \end{cases}$$

מצא את כל הערכים של a אשר עבורם f היא פונקציה אנליטית שלמה.

תשובה: $a = 0$

27. אם $f(z)$, $g(z)$, פונקציות אנליטיות לא-קבועות בתחום D, ואם יש להם אותם אפסים (כולל ריבוי) אז קיימת המשכה אנליטית של הפונקציה $\frac{f(x)}{g(x)}$ בתחום D.

28. חשב את האינטגרל $\oint_{|z|=1} z^5 e^{\frac{2}{z}}$.

תשובה: $\frac{8\pi i}{45}$

29. תהי $f(z)$ פונקציה אנליטית בטבעת הסגורה $1 \le |z| \le 2$ כך ש־ $|f(z)| \le 1$ על המעגל $|z| = 1$, $|f(z)| \le 4$ על המעגל $|z| = 2$. הוכח כי $|f(z)| \le |z|^2$ על כל הטבעת.

30. יהי $p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + z^n$ פולינום ממעלה $n \ge 1$, אשר המקדם המוביל שלו הוא $a_n = 1$. הוכח כי $\mathrm{Max}_{|z|=1} |p(z)| \ge 1$.

הדרכה: הגדר $q(z) = z^n p(\frac{1}{z})$ והוכח כי $q(0) = 1$, $\mathrm{Max}_{|z|=1} |p(z)| = \mathrm{Max}_{|z|=1} |q(z)|$

31. רדיוס ההתכנסות של הטור טיילור של הפונקציה $f(z) = \frac{1}{z^8 - 1}$ סביב הנקודה $z_0 = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$ הוא

א. 1 **ב.** 2 **ג.** 3 **ד.** 4 **ה.** 5

32. מצא את המקדם של $(z + i)^{-3}$ בפיתוח לטור לורן (Laurent) של $f(z) = \frac{1}{z^2 - 1}$ סביב

הנקודה $z_0 = -i$ בתחום $|z+i| > \sqrt{2}$.

תשובה: $a_{-3} = 0$

33. נביט בטור לורן (Laurent) של הפונקציה $f(z) = \frac{z^2-2z+3}{z-2}$ בתחום $|z-1| > 1$. מצא את המקדם של האיבר $(z-1)^{-2}$.

תשובה: $a_{-2} = 6$

34. נכון או לא נכון: הנקודה $z = 0$ היא נקודה סינגולרית מבודדת של $f(z) = \frac{1}{\sinh^2(\frac{1}{z})}$.

35. יהיו $f(z)$, $g(z)$ שתי פונקציות אנליטיות בתחום D, כך ש־$f(z)g(z) = 0$ לכל $z \in D$. הוכח כי $f \equiv 0$ או $g \equiv 0$ (כלומר f זהותית אפס על D או g זהותית אפס על D).

36. יהיו $f(z)$, $g(z)$ שתי פונקציות אנליטיות בתחום D, ותהי $\gamma : [a,b] \to D$ מסילה פשוטה וחלקה למקוטעין הכלולה יחד עם הפנים שלה בתוך D. ידוע כי לכל $t \in [a,b]$, $f(\gamma(t)) = g(\gamma(t))$. הוכח כי $f(z) = g(z)$ על כל התחום D.

37. נכון או לא-נכון: הפונקציה

$$f(z) = \begin{cases} z \sin \frac{2\pi}{z}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$$

אנליטית על כל המישור המרוכב $\mathbb{C}$.

תשובה: לא נכון

38. אם הפולינום $p(z)$ מקיים $|p(z)| \leq 1$ מעל מעגל היחידה אז גם כל המקדמים שלו חסומים על ידי 1 בערך מוחלט.

39. נכון או לא נכון: אם $f(z)$ פונקציה שלמה ומקיימת $|f(z)| \leq \sqrt{|z|}$ לכל $z \in \mathbb{C}$, אז בהכרח $f(z)$ מתאפסת זהותית על כל המישור המרוכב.

40. ערך האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$ הוא

א. $\frac{\pi}{2}$ ב. $\frac{\pi}{3}$ ג. $\frac{\pi}{6}$ ד. $\frac{\pi}{12}$ ה. $\frac{\pi}{4}$

41. הוכח כי $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2+4x+5} dx = -\frac{\pi \sin(2)}{e}$

רמז: $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+4z+5}$

42. האיבר השלישי ($n = -3$) בטור החזקות השליליות של $f(z) = (z-3)\sin\frac{1}{z+2}$ סביב הנקודה $z = -2$ הוא

א. $\frac{\pi}{5}$ ב. $\frac{5}{6}$ ג. $\frac{\pi}{6}$ ד. $\frac{7}{12}$ ה. $\frac{2}{3}$

תשובה: ב.

43. הערך של האינטגרל $\oint_\gamma \frac{e^z\,dz}{(z^2+\pi^2)^2}$ כאשר γ היא המעגל $|z|=4$ בכיוון חיובי הוא

א. $\frac{\pi}{4+i}$ **ב.** $\frac{4+i}{\pi}$ **ג.** $\frac{\pi}{4i}$ **ד.** $\frac{i}{\pi}$ **ה.** $\frac{\pi-i}{\pi+i}$

תשובה: ד.

44. הערך של האינטגרל $\frac{i}{2}\oint_{|z|=1} \frac{(z^2-1)^2\,dz}{z^2(z+\frac{1}{2})(z+2)}$ הוא

א. $-\frac{\pi}{6}$ **ב.** $\frac{\pi}{3}$ **ג.** π **ד.** $\frac{\pi}{4}$ **ה.** $\frac{i\pi}{3}$

תשובה: ג.

45. חשב את האינטגרלים

א. $\oint_{|z|=1} \sin\frac{1}{z}dz$ **ב.** $\oint_{|z|=1} \sin^2\frac{1}{z}dz$

תשובה: א. $2\pi i$ ב. 0

46. הערך של האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(3\pi x)}{x^2+3}dx$ הוא

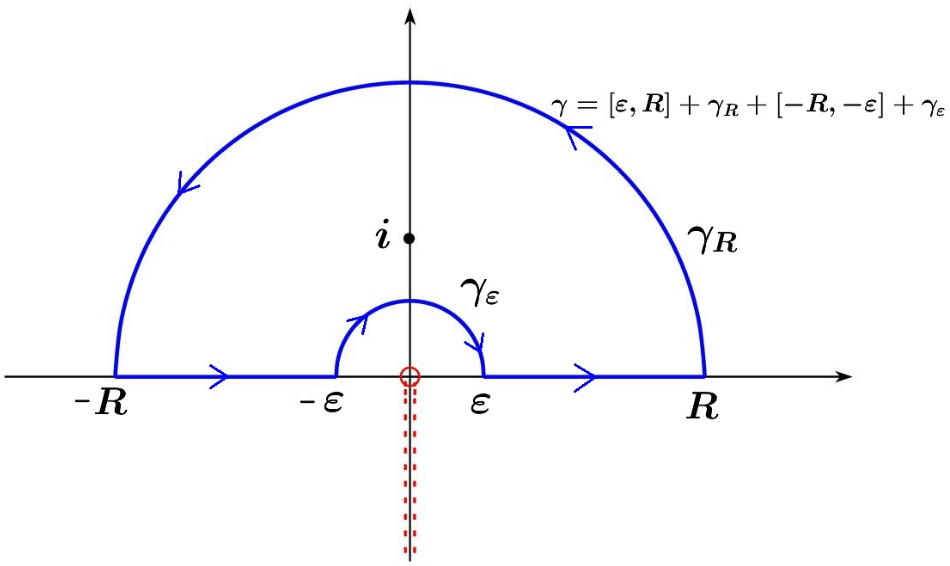
א. $\frac{\pi}{\sqrt{3}}e^{3\pi\sqrt{3}}$ **ב.** $\frac{\pi}{\sqrt{3}}e^{-3\pi\sqrt{3}}$ **ג.** $\frac{\pi}{\sqrt{3}}e^{3\pi}$ **ד.** $\frac{\pi}{\sqrt{3}}e^{-3\pi}$ **ה.** $\frac{\pi}{\sqrt{3}}e^{-\pi\sqrt{3}}$

תשובה: ב.

47. הוכח כי

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}dx = 0, \qquad \int_0^\infty \frac{\ln^2 x}{1+x^2}dx = \frac{\pi^3}{8}$$

על ידי שימוש במסילה הנתונה בתרשים הבא



איור 1: המסילה γ עוקפת את הנקודה הסינגולרית $z=0$ ואת החריץ המתאים לענף $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$

48. הערך של האינטגרל $\int_0^\pi \frac{1}{5+4\cos\theta}d\theta$ הוא

א. $\frac{\pi}{3}$ **ב.** $\frac{\pi}{6}$ **ג.** $\frac{2\pi}{3}$ **ד.** $\frac{-4\pi}{3}$ **ה.** $\frac{\pi}{4}$

תשובה: $\frac{\pi}{3}$

49. חשב את ערך האינטגרל
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}dx$$

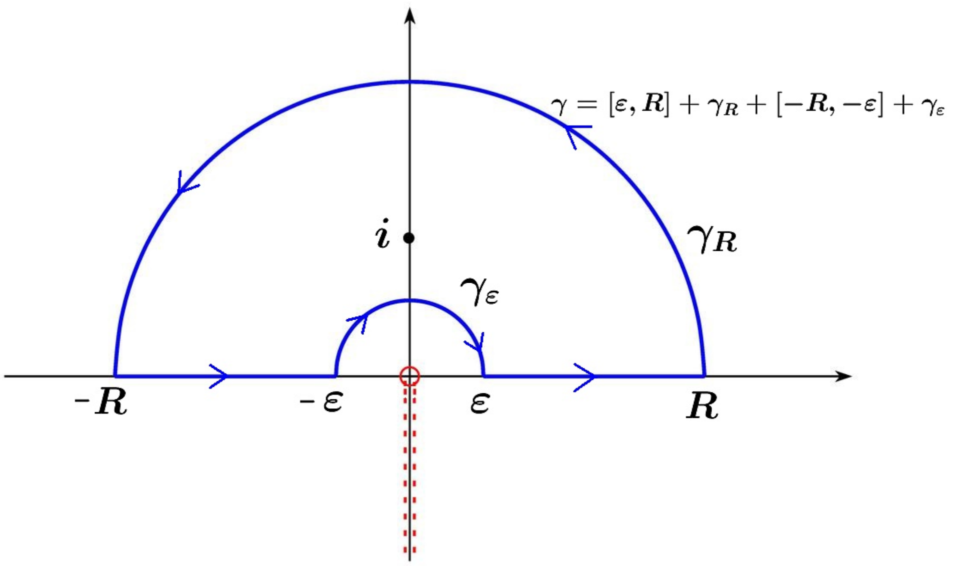
תשובה: $\sqrt{2}\pi$

50. חשב את ערך האינטגרל
$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\sin\theta}$$

תשובה: $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$

51. הוכיחו כי לכל $0<a<2$
$$\int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x^2} = \frac{\pi}{2\sin\frac{\pi a}{2}}$$

הדרכה: יש לבחור ענף מתאים לפונקציה הרב-ערכית $f(z)=\frac{z^{a-1}}{1+z^2}$ ולקחת את המסילה שבתרשים 4.
מומלץ לקרוא קודם את הפיתרון של שאלה 47!



איור 2: המסילה γ עוקפת את הנקודה הסינגולרית $z=0$ ואת החריץ המתאים לענף $[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$

52. תהי $f(x)$ פונקציה אינטגרבילית ורציפה למקוטעין מעל $\mathbb{R}$, ותהי
$$g(x)=f(2x+1)\cos 3x$$

אזי $\hat{g}(\omega)$ שווה ל-

א. $\frac{1}{2}\left[\hat{f}(2\omega+1)+\hat{f}(2\omega-1)\right]$

ב. $\frac{1}{2}e^{\frac{i\omega}{2}}\hat{f}(\frac{\omega}{2})$

ג. $\frac{1}{4}\left[e^{\frac{i(\omega+3)}{2}}\hat{f}(\frac{\omega+3}{2})+e^{\frac{i(\omega-3)}{2}}\hat{f}(\frac{\omega-3}{2})\right]$

ד. $\frac{1}{6}\left[e^{\frac{i(\omega+1)}{3}}\hat{f}(\omega+3)+e^{-\frac{i(\omega+1)}{3}}\hat{f}(\omega-3)\right]$

ה. כל התשובות האחרות אינן נכונות

53. עבור כל מספר ממשי x, חשב את הערך של האינטגרל
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \omega x}{1+\omega^2} d\omega$$

ב. חשב את ערך האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{1+\omega^2}\right)^2 d\omega$

רמז: העזר בהתמרת פוריה של $f(x) = e^{-|x|}$.

תשובה: **א.** $\int_0^{\infty} \frac{\cos \omega x}{1+\omega^2} d\omega = \frac{\pi}{2} e^{-|x|}$ **ב.** $\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{1+\omega^2}\right)^2 d\omega = \frac{\pi}{4}$

54. לכל מספר ממשי $a > 0$ נגדיר את הפונקציה
$$f_a(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x|}{a}, & |x| < a \\ 0, & |x| \geq a \end{cases}$$

א. חשב את ההתמרת פוריה של $f_a(x)$.

ב. חשב את האינטגרל $\int_0^{\infty} \frac{\sin^4 x}{x^4} dx$

תשובה: **א.** $\widehat{f}(\omega) = \begin{cases} \frac{1-\cos \omega a}{\pi a \omega^2}, & \omega \neq 0 \\ \frac{a}{2\pi}, & \omega = 0 \end{cases}$ **ב.** $\frac{\pi}{3}$

55. חשב את ההתמרת פוריה של $f(x) = |x| e^{-|x|}$

תשובה: $\frac{1-\omega^2}{\pi(1+\omega^2)^2}$

56. יהי $a > 0$ קבוע ממשי. חשב את ההתמרת פורייה של כל אחת מהפונקציות הבאות

א. $f(x) = \frac{1}{a^2+x^2}$ **ב.** $f(x) = \frac{\cos ax}{a^2+x^2}$ **ג.** $f(x) = \frac{\sin ax}{a^2+x^2}$

תשובה: **א.** $\frac{e^{-a|\omega|}}{2a}$ **ב.** $\frac{e^{-a|\omega+a|}+e^{-a|\omega-a|}}{4a}$ **ג.** $\frac{e^{-a|\omega-b|}+e^{-a|\omega+b|}}{4a}$ (מודולציה)

57. הוכח שאם $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ רציפה, $f \in G(\mathbb{R})$, f' רציפה למקוטעין, $\widehat{f} \in G(\mathbb{R})$, אז

$$\boxed{\widehat{\widehat{f}}(x) = \frac{1}{2\pi} f(-x)}$$

58. **א.** חשב את ההתמרות פורייה של $\frac{1}{x^2+a^2}$

ב. חשב את האינטגרל $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$

הדרכה: ראה תרגיל 57, פלאנשרל מוכלל

תשובה: **א.** $\frac{1}{2a} e^{-a|x|}$ **ב.** $\frac{\pi}{2ab(a+b)}$

59. נכון או לא נכון: קיימת פונקציה רציפה ואי-זוגית $f \in G(\mathbb{R})$ כך ש־
$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx = \begin{cases} 1 - \omega, & |\omega| \leq 1 \\ 0, & |\omega| > 1 \end{cases}$$

60. תהי $f(x) = e^{-x^2}$. חשב את $f * f$.

תשובה: $\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

61. מצא את הפיתרון של המשוואה האינטגרלית

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) f(x-t) dt = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

תשובה: $f(x) = \pm \sqrt[4]{\frac{2}{\pi}} e^{-x^2}$

62. פתור את המשוואה האינטגרלית

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) f(x-t) dt = \frac{1}{x^2+1}$$

תשובה: $f(x) = \pm \frac{2}{\sqrt{\pi}(4x^2+1)}$

63. נכון או לא נכון: תהי

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & |x| < 1 \\ 0, & |x| \ge 1 \end{cases}$$

ותהי $g = f * f$. אזי $\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{g}(\omega) d\omega = \frac{4}{3}$, כאשר $\widehat{g}$ היא ההתמרת פורייה של g.

תשובה: נכון

64. לכל ממשי $a > 0$ נגדיר את הפונקציה

$$\chi_a(x) = \begin{cases} 1, & |x| \le a \\ 0, & |x| > a \end{cases}$$

א. חשבו את ההתמרת פורייה של $g(x) = \chi_a * \chi_b$, עבור כל שני ממשיים $0 < a < b$.

ב. חשבו את האינטגרל $\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 5x \cdot \sin^2 2x}{x^4}$.

תשובה: **א.** $\widehat{g}(\omega) = \begin{cases} \frac{2\sin(\omega a)\cdot\sin(\omega b)}{\pi\omega^2}, & \omega \ne 0 \\ \frac{2ab}{\pi}, & \omega = 0 \end{cases}$ **ב.** π

65. חשב את התמרת לפלס של כל אחת מן הפונקציות הבאות:

א. $e^{-t}\cos 2t$

ב. $e^{-4t}\cosh 2t$

ג. $t^n \sin t$

ד. $\dfrac{1}{(t-a)(t-b)}$

ה. $e^{-2t}\cos^2 3t - 3t^2 e^{3t}$

ו. $\dfrac{5}{(t+2)^2+9}$

תשובה: **א.** $\frac{s+1}{(s+1)^2+4}$ **ב.** $\frac{s+4}{(s+4)^2-4}$ **ג.** $(-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\left[\frac{1}{s^2+1}\right]$

ה. $\frac{1}{2(s+2)} + \frac{s+2}{2(s^2+4s+40)} - \frac{6}{(s-3)^3}$

66. מצא את ההתמרת לפלס של $f(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 \le t \le 2\pi \\ 0, & 2\pi < t \end{cases}$.

67. על ידי שימוש בהגדרה והתכונות של התמרת לפלס, חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\int_0^\infty te^{-2t}\cos t\,dt$ **ב.** $\int_0^\infty t^3e^{-t}\sin t\,dt$

ג. $\int_0^\infty x^4e^{-x}dx$ **ד.** $\int_0^\infty x^6e^{-3x}dx$

תשובה: **א.** $\frac{3}{25}$ **ב.** 0 **ג.** 24 **ד.** $\frac{80}{243}$

68. חשב את התמרת לפלס ההפוכה של כל אחת מן הפונקציות הבאות:

א. $\dfrac{3s-14}{s^2-4s+18}$ **ב.** $\dfrac{1}{s^2(s^2+1)}$

ג. $\dfrac{1}{s^2-3s+2}$ **ד.** $\dfrac{s^2}{(s^2+4)^2}$

ה. $\dfrac{s}{(s^2+4)^2}$ **ו.** $\ln\left(1+\dfrac{1}{s^2}\right)$

ז. $\dfrac{1}{(s^2+4)^2}$ **ח.** $\dfrac{s^3}{s^4-16}$

ט. $\dfrac{1}{s^4+1}$

תשובה: **א.** $\frac{\sqrt{14}}{14}(-8\sin\sqrt{14}t+3\sqrt{14}\cos\sqrt{14}*te^{2t})$ **ב.** $t-\sin t$ **ג.** $(e^t-1)e^t$
ד. $\frac{1}{4}(2t\cos 2t+\sin 2t)$ **ה.** $t\sin 2t$ **ו.** רמז: $\mathscr{L}\left[\int_0^t f(u)du\right]$ **ז.** $\frac{1}{16}(-2t\cos 2t+\sin 2t)$
ח. $\frac{1}{4}\left(e^{2t}+e^{-2t}\right)+\cos 2t$ **ט.** $\frac{\sqrt{2}t}{4}\left(e^{\sqrt{2}t}\sin\frac{\sqrt{2}t}{2}-e^{\sqrt{2}t}\cos\frac{\sqrt{2}t}{2}+\sin\frac{\sqrt{2}t}{2}+\cos\frac{\sqrt{2}t}{2}e^{-\frac{\sqrt{2}t}{2}}\right)$

69. לכל אחת מהמשוואות הדיפרנציאליות הבאות, מצא פתרון פרטי בקטע $[0,\infty)$ המקיים את תנאי ההתחלה המצורפים.

א. $y''+3y'-4y=0,\qquad y(0)=3,\quad y'(0)=-2$

ב. $y''-y=0,\qquad y(0)=1,\quad y'(0)=-1$

ג. $y''+4y'+4y=0,\qquad y(0)=1,\quad y'(0)=0$

ד. $y''+4y=0,\qquad y(0)=2,\quad y'(0)=1$

ה. $y''+4y'+7y=0,\qquad y(0)=1,\quad y'(0)=1$

ו. $ty''(t)+2y'(t)+ty(t)=0,\qquad y(0)=1,\quad y'(0)=0$

תשובה: **א.** $2e^t+e^{-4t}$ **ב.** e^{-t} **ג.** $(t+1)e^{-2t}$ **ד.** $\frac{\sin(2t)}{2}+2\cos 2t$
ה. $(\sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t)+\cos(\sqrt{3}t))e^{-2t}$ **ו.** $-\frac{\sin t}{t}$

70. מצא פתרון פרטי למשוואה הדיפרנציאלית הבאה בקטע $[0,\infty)$, המקיים את תנאי ההתחלה המצורפים

$$\begin{cases} y''(t)+4y'(t)+7y(t)=u_1(t) \\ y(0)=1 \\ y'(0)=0 \end{cases}$$

כאשר $u_1(t)$ היא פונקציית הביסייד.

תשובה:
$y(t) = e^{-2t}\left[\cos\sqrt{3}t + \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}t\right] - \frac{e^{-2(t-1)}}{7}\left[\cos\sqrt{3}(t-1) + \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}(t-1)\right] + \frac{1}{7}u_1(t)$

.71 פתור את בעיית ההתחלה

$$\begin{cases} y'' + 4y' + 13y = 2t + 3e^{-2t}\cos 3t \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

תשובה: $y = -\frac{179}{507}e^{-2t}\sin 3t + \frac{8}{169}e^{-2t}\cos 3t + \frac{1}{2}te^{-2t}\sin 3t + \frac{2}{13}t - \frac{8}{169}$

.72 פתור את בעיית ההתחלה

$$\begin{cases} y'' + y = \varphi(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} \le t < \infty \end{cases} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

.73 מצא את הפיתרון הפרטי המוגדר על חצי הישר $[0,\infty)$ למשוואה

$$\begin{cases} y'(t) + 2y(t) + \int_0^t y(x)dx = h(t), \quad (0 < t < \infty) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

כאשר

$$h(t) = \begin{cases} 1, & (0 \le t \le 1) \\ 2t, & (1 < t < \infty) \end{cases}$$

תשובה: $y(t) = e^{-t} + u_1(t)\cdot te^{-t}$