

חלק ו': התמרות אינטגרליות

פרק 6: התמרת פורייה (Jean-Baptiste Joseph Fourier)

סעיף 6.1: מוטיבציה

במהלך החלק השני של הקורס נתבסס על הפרק השלישי והרביעי של ספר הלימוד

טורי פורייה והתמרות אינטגרליות (סמי זעפרני, אלן פינקוס)

להתמרת פוריה יש שימושים חשובים בשטח עיבוד אותות, עיבוד תמונות (דחיסה, ניתוח, אלגוריתמים עבור JPEG, MP3), עיבוד מידע, רפואה חישובית, ראייה ממוחשבת. לאור ריבוי ההתקנים האלקטרוניים היום, כל אחד מאיתנו מבצע למעשה בכל יום מיליוני שימושים באלגוריתמים המבוססים על התמרת פוריה. להלן מספר קישורים לאתרי אינטרנט העוסקים בשימושים תאורטיים וטכנולוגיים של התמרת פוריה

 [3 Applications of the \(Fast\) Fourier Transform \(ft. Michael Kapralov\)](#)

 [But what is the Fourier Transform? A visual introduction \(3Blue1Brown\)](#)

 [How do I apply the Fourier-transform in a real-life scenario?](#)

 [An Interactive Guide To The Fourier Transform](#)

 [Understanding the Fourier transform](#)

 [Why is the Fourier transform so important?](#)

 [Mathematics: What is the application of a Fourier series in signal processing?](#)

 [Image processing and the Fourier Transform](#)

 [Compression of data using Fourier methods](#)

 [The Math Trick Behind MP3s, JPEGs, and Homer Simpson's Face](#)

 [Digital Signal Processing Tutorial – Fast Fourier Transform Algorithm](#)

 [Python Programming of Fourier Transform](#)

 [The Fourier Transform \(A PowerPoint Presentation\)](#)

 [Image denoising by FFT \(Scipy\)](#)

השורשים לתאוריה המתמטית של טורי פוריה והתמרת פוריה נעוצים באמונה הבסיסית של המתמטיקאי הצרפתי ג'וזף פוריה (Joseph Fourier) שכל הפונקציות המוכרות לנו מהטבע מורכבות למעשה מפונקציות מחזוריות בסיסיות כגון $\sin \omega t$, $\cos \omega t$ (או השילוב של שניהם)

$(e^{i\omega t})$. פורייה האמין שכל התופעות הפיזיקאליות בטבע מבוססות על תופעות מחזוריות יסודיות. גלי קול, גלי חום, גלי אור, וגלים אלקטרומגנטיים לסוגיהן השונים הם למעשה "צירוף ליניארי" (אינסופי) של גלים יסודיים (בעלי מחזורים ועוצמות שונות).

בשנת 1807 הציג פורייה בפני האקדמיה הצרפתית את הטענה שכל פונקציה רציפה $f(t)$ בקטע סופי $[-\pi, \pi]$ ניתן לבטא כצירוף ליניארי של פונקציות גל $\sin nt$, $\cos nt$, בעלות **תדר (frequency) שלם** $n \in \mathbb{N}$,

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \sin nx + b_n \cos nx]$$

באמצעות הטענה הזו, פורייה הצליח לפתור ולהסביר תופעות פיזיקליות הקשורות להתפשטות גלי חום וגלים לאורך מיתר חד-מימדי.

רוב המתמטיקאים והפיזיקאים בני זמנו לא קיבלו את ההנחה הזו והתייחסו בספקנות רבה לעבודתו המתמטית. ג'וזף פורייה לא היה מסוגל לספק הוכחות מתימטיות מדויקות לטענותיו עקב העדר כלים מתאימים באנליזה אשר נדרשו לביסוסם. רק לקראת סוף המאה ה-19 פותחו המושגים והכלים המתמטיים הדרושים לשם כך, ומרבית טענותיו של פורייה אומתו על ידי הוכחות פורמליות מדויקות על ידי מתמטיקאים כמו רימן (Riemann), דיריכלה (Dirichlet), לבג (Lebesgue), ואחרים.

התמרת פורייה (Fourier Transform) היא המשך טבעי של רעיון הטורי פורייה עבור פונקציות ("סיגנלים") מעל קטע אינסופי כגון $[0, \infty)$ או מעל כל קבוצת המספרים הממשיים $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.

עבור קטעים אינסופיים, הגלים בעלי "התדר הדיסקרטי" (כגון $\sin nt$, $\cos nt$) אינם מספיקים, ויש צורך בשימוש גם בגלים על הספקטרום הרציף $\sin \omega t$, $\cos \omega t$, בעלי תדר ממשי $\omega \in \mathbb{R}$.

התהליך המקביל של חישוב מקדמי הטור פורייה במקרה של התמרת פורייה ממשיית מעל חצי ישר $[0, \infty)$ הוא **נוסחת התמרת פורייה**

$$(1) \quad \hat{f}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t dt$$

בצורה הכללית, עבור פונקציה מרוכבת $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, **נוסחת התמרת פורייה** היא

$$(2) \quad \hat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

המקבילה של טור פורייה היא **התמרת פורייה הפוכה**: את פעולת הסכום הליניארי $\sum_{n=1}^{\infty}$ בטור פורייה, יחליף אינטגרל מוכלל $\int_0^{\infty} d\omega$ על חצי ישר או אינטגרל מוכלל $\int_{-\infty}^{\infty} d\omega$ על

כל הישר הממשי.

עבור סיגנל ממשי $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ההתמרה ההפוכה היא

$$(3) \quad f(t) = \int_0^\infty \hat{f}(\omega) \cos \omega t \, d\omega$$

עבור סיגנל מרוכב $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ההתמרה ההפוכה היא

$$(4) \quad f(t) = \int_{-\infty}^\infty \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} \, d\omega$$

במובן מסוים, נוכל להתייחס למספר $\hat{f}(\omega)$ בתור "המקדם" של הגל $\cos(\omega t)$ (או הגל $e^{-i\omega t}$) בפיתוח של הסיגנל $f(t)$ "לסכום רציף" של גלים.

כלומר, הנוסחה (3) מבטאת את הסיגנל $f(t)$ בצורת "צירוף ליניארי רציף" שבו "וקטורי הבסיס" הם הגלים היסודיים $\{\cos \omega t\}_{0 \leq \omega < \infty}$ והמקדמים הם $\{\hat{f}(\omega)\}_{0 \leq \omega < \infty}$.

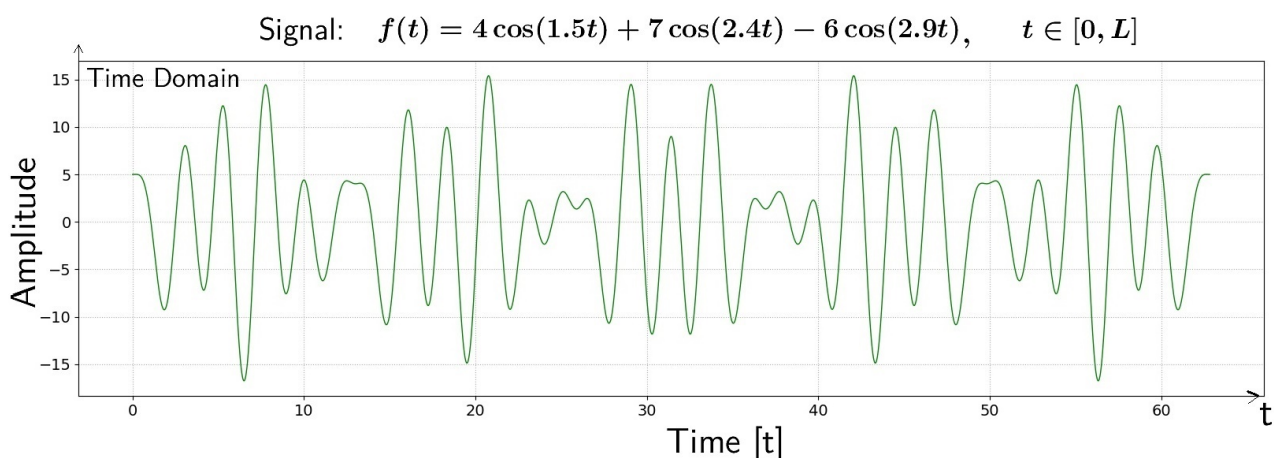
המספר $\hat{f}(\omega)$ נקרא גם **האמפליטודה** ("משרעת") של הגל $\hat{f}(\omega) \cos \omega t$.

דרך נוספת לתאר את הנוסחה (3) היא כפירוק של הסיגנל $f(t)$ לסכום של רכיבים גליים $\hat{f}(\omega) \cos \omega t$, כאשר $\hat{f}(\omega)$ מציין את רמת ההשתתפות של הרכיב הגלי $\cos \omega t$ בסיגנל $f(t)$.

דוגמא: (עיבוד אותות) חברת תוכן מעוניינת להעביר סיגנל $f(t)$ ללקוח רחוק באמצעות מערכת כבלים או לוויין. מהי הדרך הכי חסכונית ויעילה לעשות זאת? לשם המחשה, נבנה סיגנל פשוט $f(t)$ באמצעות חיבור של שלושה גלים פשוטים

$$f(t) = 4 \cos(1.5t) + 7 \cos(2.4t) - 6 \cos(2.9t)$$

ניתן לשרטט סיגנלים מסוג זה בקלות באמצעות תוכנת Matlab, WolframAlpha, או Python



איור 1: סיגנל $f(t)$ בנוי משלושה גלים יסודיים $\cos(1.5t)$, $\cos(2.4t)$, $\cos(2.9t)$. התדרים הם: 1.5, 2.4, 2.9, אמפליטודות: 4, 7, -6

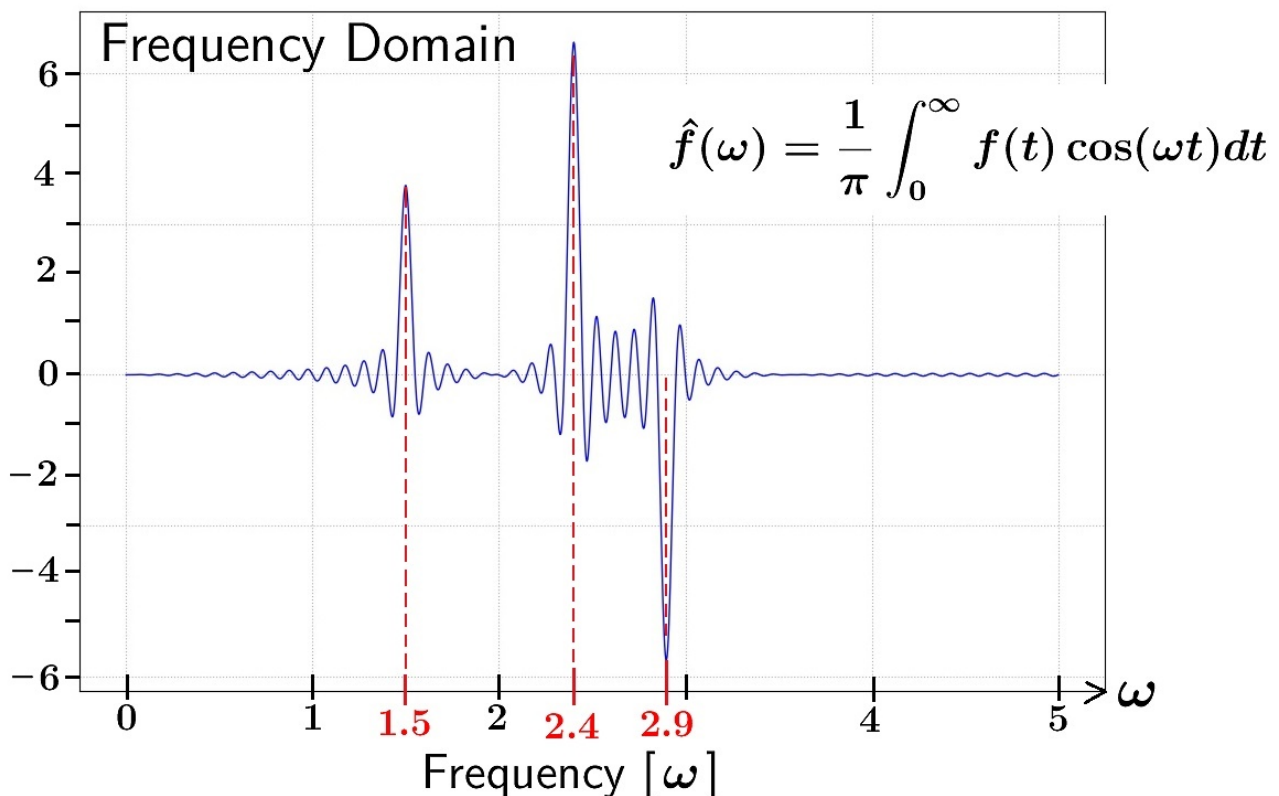
בפרקטיקה הסיגנל $f(t)$ נתון (יותר נכון לומר **דגום**) מעל קטע זמן סופי $[0, L]$ (במקום

הקטע $[0, \infty)$ (בתאוריה). מטעמי פרקטיקה (ואילוצי תוכנה) נצטמצם¹ לתדרים בתחום הסגור $[0, 5]$ (בסטנדרטים של התעשייה, תחום התדרים מוגבל לקטע סופי וידוע מראש). נסרוק את כל התדרים שבין 0 ל-5, ולכל תדר ω נחשב את ההגודל $\hat{f}(\omega)$ שמציין את רמת ההשתתפות של הגל היסודי $\cos(\omega t)$ בסיגנל $f(t)$. נשרטט את הגרף המתקבל² (שהוא למעשה ההתמרת פורייה של $f(t)$).

עקב אילוצי פרקטיקה ותוכנה, גרף ההתמרה שנקבל אינו מדויק, אך למרות זאת ניתן לראות שאם נסנן את התדרים הנמוכים ("רעש") נשאר עם שלושת התדרים

$$\omega = 1.5, \omega = 2.4, \omega = 2.9$$

לכן ההתמרת פוריה של הסיגנל $f(t)$ מאפשרת לנו לשחזר את הגלים היסודיים, והאמפליטודות המתאימות, שמהם הסיגנל מורכב.



איור 2: להתמרת פורייה של הסיגנל $f(t)$ יש קפיצות חריגות בתדרים: $\omega = 1.5, 2.4, 2.9$

דחיסת מידע: מדוגמא זו אנו למדים גם על השימוש בהתמרת פורייה לדחיסת מידע. לאחר סריקת כל התדרים בתחום הרצוי³ וסינון התדרים הזניחים ("רעשים") אנו נשארים עם שלושה תדרים עיקריים ושלושה אמפליטודות מתאימות, שניתן לדחוס לוקטור קצר

¹ במקרה הנוכחי החישוב התבצע עבור $L = 20\pi$ ואת ההתמרה חישבנו על ידי הקירוב הסופי $\frac{2}{L} \int_0^L f(t) \cos(\omega t) dt$

² בפועל אנו דוגמים רק סדרה דיסקרטית של תדרים בקטע $[0, 5]$ בקפיצות של $d\omega = 0.01$ למשל

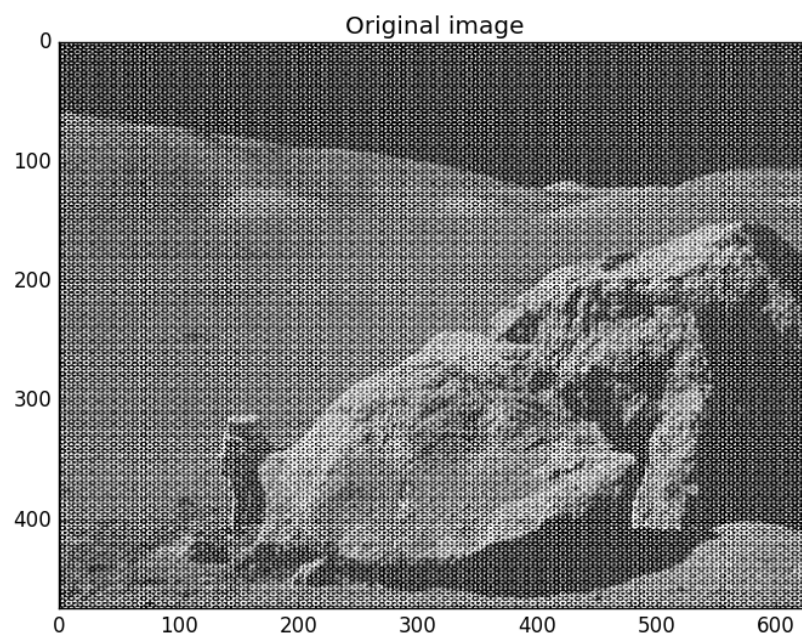
³ בפרקטיקה כמובן מניחים שתחום התדרים חסום בקטע נתון. למשל כל התדרים של שידורי רדיו, כבלים, או לוויין, מוגבלים מראש לקטע ידוע מראש, וזה כמובן חוסך לנו זמן חישוב יקר לחיפוש תדרים מיותרים

של שישה מספרים

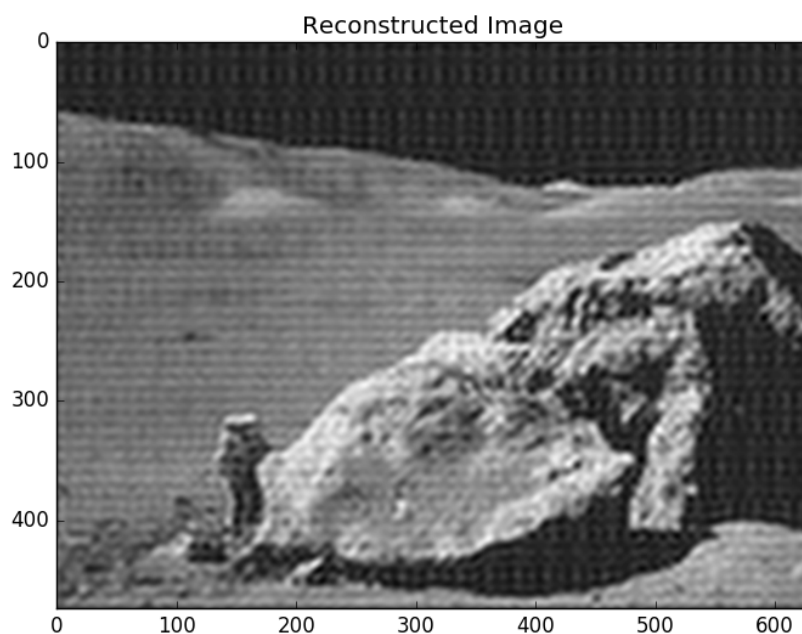
$$v = (1.5, 4, 2.4, 7, 2.9, 6)$$

אשר מהם ניתן לשחזר בקלות את הסיגנל המקורי⁴. אם, למשל, נרצה לשלוח את הסיגנל f ללקוח של חברת כבלים או לוויין, יספיק לשלוח אליו את הוקטור הקצר במקום את הסיגנל עצמו, ולתת לממיר בצד השני להמיר את הוקטור לסיגנל הרצוי.

❶ התמרת פורייה משמשת לכן כסוג של פילטר לסינון רעשים גם מסיגנלים של תמונות מצלמה או וידאו



איור 3: צילום עם "רעשים" משידור ביקור על הירח



איור 4: הצילום הקודם לאחר סינון "הרעשים" באמצעות התמרת פורייה

⁴ קירוב טוב לסיגנל המקורי בלבד, לאחר סינון רעשים ואובדן דיוק כתוצאה משימוש בשיטות קירוב ודחיסה חסכוניות ומהירות

סעיף 6.2: הגדרה

בקורס הנוכחי נעסוק בפונקציות מרוכבות $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ והמשפחה האורתוגונלית של הגלים שלנו היא

$$e^{i\omega x} = \cos \omega x + i \sin \omega x, \quad \omega \in \mathbb{R}$$

מדובר במשפחה אינסופית של פונקציות: לכל תדר ממשי ω יתאים גל מהצורה $e^{i\omega x}$.

Daniel lecture notes page 71a

הגדרה 6.1 תהא $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, אם האינטגרל:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$$

קיים לכל $\omega \in \mathbb{R}$, אז הפונקציה $\hat{f}$ נקראת התמרת פורייה של f .

הערות:

Daniel lecture notes page 71b

1. נהוג גם לסמן $\hat{f} = \mathcal{F}[f]$.

2. האינטגרל כמובן לא חייב להתכנס. לפיכך, נעבוד בעיקר תחת ההנחה כי f :

(i) רציפה למקוטעין, כאשר יש לה לכל היותר מספר סופי של נקודות אי רציפות בכל קטע סגור.

(ii) אינטגרלית בהחלט, כלומר האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$ מתכנס (אוסף כל הפונקציות הנ"ל מסומן ב- $L^1(\mathbb{R})$).

אוסף כל הפונקציות הנ"ל מסומן ב- $G(\mathbb{R})$.

לא קשה לבדוק שהמרחב $G(\mathbb{R})$ הוא מרחב וקטורי מעל השדה $\mathbb{C}$.

תרגיל: כמה נקודות אי-רציפות יש לפונקציה

$$f(x) = \frac{[x]}{1+x^4}$$

האם $f \in G(\mathbb{R})$?

ההתמרת פורייה של סיגנל ממשי $f(x)$ מעל חצי הישר $[0, \infty)$ מוגדרת על ידי ההתמרה של

ההמשכה הזוגית של $f(x)$ על $\mathbb{R}$

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \geq 0 \\ f(-x), & x < 0 \end{cases}$$

לכן

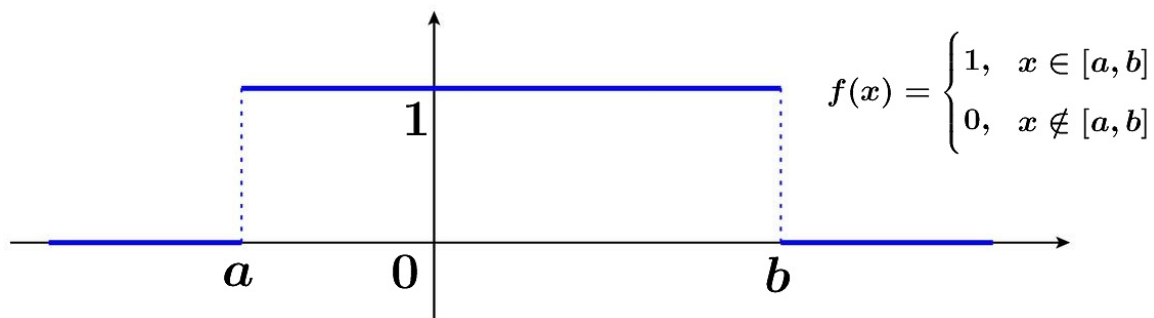
$$\begin{aligned}\hat{f}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-i\omega x} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cos(\omega x) dx + \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \sin(\omega x) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \cos(\omega x) dx\end{aligned}$$

הפונקציה $g(x) \sin(\omega x)$ היא אי-זוגית, ולכן $\int_{-\infty}^{\infty} g(x) \sin(\omega x) dx = 0$.
הפונקציה $g(x) \cos(\omega x)$ זוגית, ולכן

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cos(\omega x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \cos(\omega x) dx$$

❶ **דוגמא 1:** סיגנל פשוט במיוחד הוא סיגנל מדרגה. לכל זוג מספרים ממשיים $a < b$ נגדיר

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a, b] \\ 0, & x \notin [a, b] \end{cases}$$



איור 5: פונקציית מדרגה מעל קטע סגור $[a, b]$

נחשב את ההתמרת פורייה של $f(x)$ על פי ההגדרה. אם $\omega \neq 0$

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix} dx = \frac{1}{\pi} \int_a^b e^{-ix} dx = \frac{e^{-i\omega a} - e^{-i\omega b}}{2\pi i \omega}$$

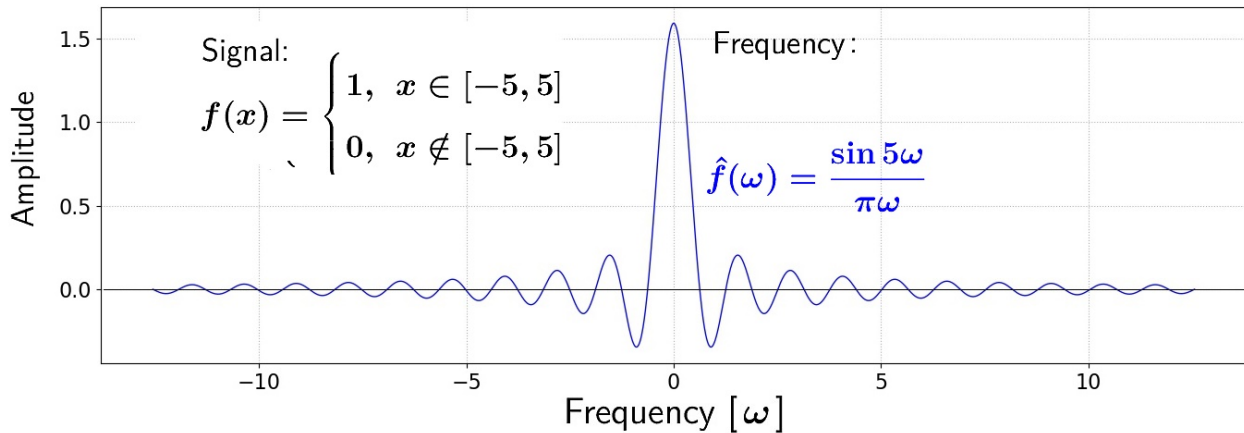
❷ מקרה פרטי חשוב של התוצאה הקודמת הוא המקרה של פונקציית מדרגה מעל קטע סימטרי $[-a, a]$:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq a \\ 0, & |x| > a \end{cases}$$

בגלל ש- f זוגית, ההתמרת פורייה שלה יוצאת ממשי

$$\hat{f}(\omega) = \frac{\sin a\omega}{\pi\omega}$$

יש לשים לב לכך שהנקודה $\omega = 0$ היא נקודת אי-רציפות סליקה וניתן להגדיר $\hat{f}(0) = \frac{a}{\pi}$. למשל, ההתמרת פורייה של הסיגנל הזה עבור המקרה הפרטי $a = -5$ נראית כך

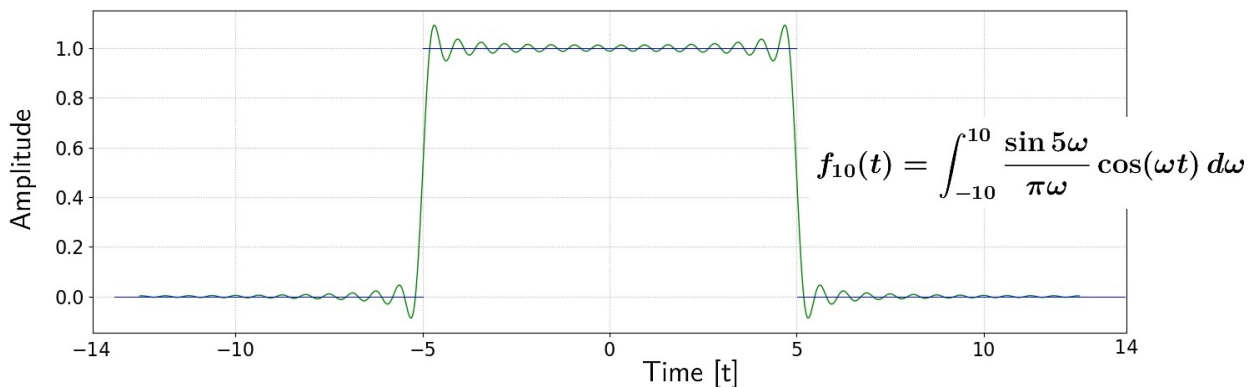


איור 6: התמרת פורייה של סיגנל המדרגה מעל הקטע הסגור $[-5, 5]$

מהגרף ברור שלכל תדר $|\omega| > 10$ האמפליטודה $\hat{f}(\omega)$ זניחה⁵ ולכן נוכל להסתפק בשיחזור הסיגנל מהתדרים $|\omega| \leq 10$ בלבד על ידי הנוסחה המקורבת

$$f_{10}(t) = \int_{-10}^{10} \frac{\sin 5\omega}{\pi\omega} \cos(\omega t) d\omega$$

מהשרטוט הבא של $f_{10}(t)$ ניתן ללמוד שהשיחזור של הסיגנל באמצעות ההתמרה ההפוכה אינו מושלם וברוב המקרים זה כרוך בפשרה מסוימת.



איור 7: התמרת פורייה הפוכה של $\hat{f}(\omega) = \frac{\sin 5\omega}{\pi\omega}$ בתחום התדרים $-10 \leq \omega \leq 10$. הקירוב למקור לא מושלם, אבל אפשר לשפר.

❶ לפונקציה $\text{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$ יש חשיבות רבה בתחומים כמו עיבוד אותות ועיבוד תמונות, ולכן ניתן לה שם קצר sinc . בין השאר היא משמשת להגדרת פונקציות “הלם” (shock waves) $b \text{sinc}(bt)$. למשל, את נוסחת האות המקורב $f_{10}(t)$ שבשרטוט 7 נוכל לרשום גם כך

$$f_{10}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-10}^{10} \cos(\omega t) \cdot 5 \text{sinc}(5\omega) d\omega$$

⁵ אם $|\omega| > 10$ אז $\hat{f}(\omega) < \frac{1}{31}$ לכן מדובר בתדר אשר התרומה שלו לסיגנל זניחה ונוכל לוותר עליו מבלי לאבד הרבה מאיכות הסיגנל

דוגמא 2: חשב את ההתמרת פורייה של $f(x) = e^{-a|x|}$, כאשר $a > 0$ ממשי. **פיתרון:** מדובר בפונקציה זוגית ולכן צפוי שההתמרת פורייה של f תהייה פונקציה ממשית

Daniel lecture notes page 72a

$$\begin{aligned}\hat{f}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|} e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^0 e^{ax-i\omega x} dx + \int_0^{\infty} e^{-ax-i\omega x} dx \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^0 e^{ax-i\omega x} dx + \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{-ax-i\omega x} dx \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\lim_{t \rightarrow -\infty} \left[\frac{e^{ax-i\omega x}}{a-i\omega} \right]_{x=t}^{x=0} + \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{-ax-i\omega x}}{-a-i\omega} \right]_{x=0}^{x=t} \right) \\ &\stackrel{(*)}{=} \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{a-i\omega} + \frac{1}{a+i\omega} \right) = \frac{a}{\pi(a^2 + \omega^2)} \\ &\quad \quad \quad \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t} = 0 \text{ בעובדה ושימוש בעובדה } (*)\end{aligned}$$

סעיף 6.3: תכונות בסיסיות

משפט 6.2: לכל $f \in G(\mathbb{R})$

1. $\hat{f}$ מוגדרת ורציפה על כל $\mathbb{R}$

2. (רימן-לבג) $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \hat{f}(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow -\infty} \hat{f}(\omega) = 0$

ההוכחה מתבססת על המשפט היסודי הבא מתחום האנליזה המתימטית

משפט ההתכנסות הנשלטת של לבג

תהי $\{f_h\}_{h \in \mathbb{R}}$ משפחת פונקציות רציפות למקוטעין ב- $\mathbb{R}$ ונניח כי:

- קיימת פונקציה g כך ש- $|f_h(x)| \leq g(x)$, לכל $x \in \mathbb{R}$ ולכל $h \in \mathbb{R}$;
- $\int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx < \infty$;
- $\lim_{h \rightarrow 0} f_h(x) = f(x)$, לכל $x \in \mathbb{R}$.

אזי

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} f_h(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

הפונקציה $g(x)$ נקראת **הפונקצייה השולטת**, ומשפחת הפונקציות $\{f_h\}_{h \in \mathbb{R}}$ נשלטת על ידי $g(x)$.

6.2 הוכחת משפט 6.2

1. מן העובדה ש- $|e^{-i\omega x}| = 1$, לכל x ו- ω ממשיים, נובע כי

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)e^{-i\omega x}| dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$$

לכן הפונקציה $f(x)e^{-i\omega x}$ אינטגרבילית בהחלט מעל $\mathbb{R}$, לכל ערך ממשי ω . כמו-כן, ברור ש- $f(x)e^{-i\omega x}$ רציפה למקוטעין מעל $\mathbb{R}$, ולכן פונקציה זו שייכת ל- $G(\mathbb{R})$. לכן הפונקציה $\hat{f}(\omega)$ מוגדרת לכל ערך ממשי של ω .

יהי $\omega \in \mathbb{R}$. נוכיח כי $\hat{f}$ רציפה בנקודה ω . בכדי להוכיח טענה זו נוכיח ש-

$$\lim_{h \rightarrow 0} [\hat{f}(\omega + h) - \hat{f}(\omega)] = 0$$

נשתמש בהגדרה של $\hat{f}$:

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega + h) - \hat{f}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i(\omega+h)x} dx - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x} [e^{-ihx} - 1] dx \end{aligned}$$

לכל מספר ממשי h נגדיר את הפונקציה

$$f_h(x) = f(x)e^{-i\omega x} [e^{-ihx} - 1]$$

קיבלנו משפחה אינסופית של פונקציות $\{f_h(x)\}_{h \in \mathbb{R}}$. נחשב גבול כאשר $h \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} f_h(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} f(x)e^{-i\omega x} [e^{-ihx} - 1] \\ &= f(x)e^{-i\omega x} \lim_{h \rightarrow 0} [e^{-ihx} - 1] \\ &= f(x)e^{-i\omega x} \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

בנוסף לכך

$$|f_h(x)| = |f(x)| \cdot |e^{-i\omega x}| \cdot |e^{-ihx} - 1| \leq |f(x)| \cdot 1 \cdot 2 = 2|f(x)|$$

הפונקציה $g(x) = 2|f(x)|$ מקיימת את התנאים שני התנאים הראשונים של משפט

ההתכנסות החסומה של לבג, ולכן

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_h(x) dx = 0$$

כלומר $\lim_{h \rightarrow 0} [\hat{f}(\omega + h) - \hat{f}(\omega)] = 0$, ולכן $\hat{f}$ רציפה בכל נקודה $\omega \in \mathbb{R}$.

2. למען השלמות נרשום כאן את ההוכחה הקלאסית שמופיעה בספר הלימוד ובחוברת הקורס. מפאת קוצר זמן הוכחה זו לא תוצג בהרצאה וניתן לקרוא אותה כאן במידת הצורך. במידה והזמן יאפשר נציג את ההוכחה הקצרה יותר שמופיעה מייד לאחר מכן.

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \hat{f}(\omega) &= \lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \\ &= \lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \omega x dx - i \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \omega x dx \right] \end{aligned}$$

בכדי להוכיח כי $\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \hat{f}(\omega) = 0$ יספיק להוכיח ש-

$$\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \omega x dx = 0$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \omega x dx = 0$$

נסתפק בהוכחת השוויון הראשון מאחר והוכחת השוויון השני דומה.

נתון לנו כי f אינטגרלית בהחלט מעל כל $\mathbb{R}$. לכן לכל $\varepsilon > 0$ קיים $M > 0$ כך ש-

$$\int_{|x|>M} |f(x)| dx < \varepsilon$$

ומזה יוצא

$$\left| \int_{|x|>M} f(x) \cos \omega x dx \right| \leq \int_{|x|>M} |f(x) \cos \omega x| dx \leq \int_{|x|>M} |f(x)| dx < \varepsilon$$

לכן אם נוכיח כי

$$\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \int_{-M}^M f(x) \cos \omega x dx = 0$$

עבור M סופי כלשהו אז נקבל את התוצאה הרצויה. נציין שאילו ω היה מקבל רק ערכים שלמים אזי עובדה זו נובעת מייד מן הלמה של רימן-לבג. אבל ω מקבל כל ערך ממשי ולכן נצטרך להוכיח זאת. הפונקציה f רציפה למקוטעין בקטע $[-M, M]$ ולכן, עבור כל $\varepsilon > 0$,

קיימת חלוקה של הקטע $[-M, M]$

$$-M = x_0 < x_1 < \dots < x_m = M$$

כך שעבור פונקצית המדרגות

$$h(x) = f(x_k), \quad x_{k-1} < x \leq x_k, \quad k = 1, 2, \dots, m$$

מתקיים

$$\int_{-M}^M |f(x) - h(x)| dx < \varepsilon$$

כלומר, ניתן להתקרב ל- f במובן הנ"ל על ידי פונקצית המדרגות h . עובדה זו נובעת מהגדרת האינטגרל של רימן. עתה

$$\int_{-M}^M f(x) \cos \omega x dx = \int_{-M}^M [f(x) - h(x)] \cos \omega x dx + \int_{-M}^M h(x) \cos \omega x dx$$

נוכיח שכל אחד מן האינטגרלים שבאגף ימין שואף לאפס כאשר ω שואף לאינסוף. לכל $\omega \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \left| \int_{-M}^M [f(x) - h(x)] \cos \omega x dx \right| &\leq \int_{-M}^M |f(x) - h(x)| \cdot |\cos \omega x| dx \\ &\leq \int_{-M}^M |f(x) - h(x)| dx < \varepsilon \end{aligned}$$

לגבי האינטגרל השני:

$$\begin{aligned} \left| \int_{-M}^M h(x) \cos \omega x dx \right| &= \left| \sum_{k=1}^m \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x_k) \cos \omega x dx \right| \\ &= \left| \sum_{k=1}^m f(x_k) \frac{\sin \omega x_k - \sin \omega x_{k-1}}{\omega} \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^m |f(x_k)| \frac{2}{\omega} \\ &\leq \frac{2m}{\omega} \max_{-M \leq x \leq M} |f(x)| \end{aligned}$$

לכן עבור כל ω מספיק גדול יתקיים

$$\frac{2m}{\omega} \max_{-M \leq x \leq M} |f(x)| < \varepsilon$$

ולכן

$$\left| \int_{-M}^M f(x) \cos \omega x dx \right| < 2\varepsilon$$

ובכך סיימנו.

❖ הוכחה קצרה יותר של 2 עבור פונקציה רציפה $f \in G(\mathbb{R})$:



Short proof of the The Riemann–Lebesgue Lemma

קודם מוכיחים כי לכל $a < b$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) e^{-i\omega x} dx = 0$$

נגדיר

$$I(\omega) = \int_a^b f(x) e^{-i\omega x} dx$$

נוכל לרשום את $I(\omega)$ בשתי דרכים שקולות

$$(A) \quad I(\omega) = \int_a^{a+\frac{\pi}{\omega}} f(x) e^{-i\omega x} dx + \int_{a+\frac{\pi}{\omega}}^b f(x) e^{-i\omega x} dx$$

$$(B) \quad I(\omega) = \int_a^{b-\frac{\pi}{\omega}} f(x) e^{-i\omega x} dx + \int_{b-\frac{\pi}{\omega}}^b f(x) e^{-i\omega x} dx$$

על ידי ההזזה $\bar{x} = x - \frac{\pi}{\omega}$ קל לקבל

$$\int_{a+\frac{\pi}{\omega}}^b f(x) e^{-i\omega x} dx = - \int_a^{b-\frac{\pi}{\omega}} f\left(x + \frac{\pi}{\omega}\right) e^{-i\omega x} dx$$

נשתמש בתגים (A), (B) בכדי לייצג את האינטגרלים באגף ימין

$$\begin{aligned} I(\omega) &= \frac{1}{2}(A) + \frac{1}{2}(B) \\ &= \frac{1}{2} \int_a^{a+\frac{\pi}{\omega}} f(x) e^{-i\omega x} dx + \frac{1}{2} \int_{b-\frac{\pi}{\omega}}^b f(x) e^{-i\omega x} dx + \frac{1}{2} \int_a^{b-\frac{\pi}{\omega}} \left[f(x) - f\left(x + \frac{\pi}{\omega}\right) \right] e^{-i\omega x} dx \end{aligned}$$

על סמך החסימות והרציפות של f קל לראות שכל שלושת האינטגרלים האחרונים מתכנסים לאפס כאשר $\omega \rightarrow \infty$.

מההתכנסות בהחלט של $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$ קיים a ממשי כך ש-

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx = \int_{-a}^a f(x) e^{-i\omega x} dx + \varepsilon$$

כאשר ε קטן כרצוננו ובאותו זמן גם מתקיים

$$\int_{-\infty}^{-a} |f(x)| dx + \int_a^{\infty} |f(x)| dx < \varepsilon$$

מהתוצאה הקודמת יוצא כי

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx = 0$$

ההוכחה הקצרה תופסת עבור פונקציות רציפות בלבד, אך בפרקטיקה אין באמת פונקציות לא רציפות! (גם בגלים מרובעים אין באמת קפיצות, אלא עליות תלולות מאוד שנראות כמו קפיצה). לכן מבחינה פרקטית הוכחה זו מספיקה. מבחינה תאורטית, ניתן להוכיח שלכל פונקציה $f \in G(\mathbb{R})$, ניתן להתקרב כרצוננו על ידי פונקציה רציפה $g \in G(\mathbb{R})$, ובכך להרחיב את התוצאה הקודמת גם עבור פונקציות לא-רציפות.

המשמעות המעשית של רימן-לבג היא שככל שהתדר הולך וגדל הוא הופך ליותר ויותר זניח! לכן מבחינה פרקטית ניתן להסתפק בקבוצה חסומה של תדרים ולהתעלם לחלוטין מתדרים גבוהים.

מבחינת חישוב, ניתן להגיע לרמת דיוק רצויה בפיענוח (decoding) סיגנל $f(t)$ על ידי בחירה של a מספיק גדול

$$f(t) \approx \int_{-a}^a \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

דרך נוספת לנסח את הטענת ההמשפט היא שלכל $f \in G(\mathbb{R})$,

$$\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(\omega x) dx = 0$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(\omega x) dx = 0$$

מסקנה נוספת של רימן-לבג היא שהפונקציה $\hat{f}(\omega)$ חסומה על כל הישר הממשי. זה נובע מכך ש- $\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \hat{f}(\omega) = 0$, ולכן קיים a ממשי כך ש- $|\hat{f}(\omega)| < 1$ לכל $|\omega| > a$. מהרציפות נובע שהפונקציה $\hat{f}(\omega)$ חסומה גם בקטע $[-a, a]$, ולכן חסומה על כל הישר.

ליניאריות (סופרפוזיציה)

לכל שתי פונקציות $f, g \in G(\mathbb{R})$, ולכל שני מרוכבים $a, b \in \mathbb{C}$, הפונקציה $af + bg$ גם כן שייכת ל- $G(\mathbb{R})$, ובנוסף

$$\mathcal{F}[af + bg] = a\mathcal{F}[f] + b\mathcal{F}[g]$$

הוכחה: נובעת מייד מתכונות האריתמטיות של האינטגרל המוכלל

$$\int_{-\infty}^{\infty} [af(x) + bg(x)] dx = a \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx + b \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx$$

❶ מתיחה, כיווץ, סיבוב, והזזה בזמן ובתדר

פעולת הכפל ax (או $a\omega$) נקראת לפעמים **מתיחה/כיווץ** (בזמן או בתדר). הפעולה $x + b$ (או $\omega + b$) נקראת **הזזה** (בזמן או בתדר).

תהי $f \in G(\mathbb{R})$. אזי

1. לכל שני מספרים ממשיים $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, הפונקציה $g(x) = f(ax + b)$ גם כן שייכת למרחב $G(\mathbb{R})$, ובנוסף

$$\mathcal{F}[f(ax + b)](\omega) = \frac{1}{|a|} e^{\frac{i\omega b}{a}} \hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

2. לכל קבוע ממשי $c \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{F}[e^{icx} f(x)](\omega) = \hat{f}(\omega - c)$$

הוכחה: 1.

$$\hat{g}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(ax + b) e^{-i\omega x} dx$$

נציב $t = ax + b$ ונקבל

$$a > 0 \implies \hat{g}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega(\frac{t-b}{a})} \frac{dt}{a}$$

$$a < 0 \implies \hat{g}(\omega) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega(\frac{t-b}{a})} \frac{dt}{a}$$

הסיבה לסימן המינוס באינטגרל השני היא שכאשר $a < 0$, גבולות האינטגרציה מתהפכים⁶. לכן, בכל מקרה, נקבל

$$\begin{aligned} \hat{g}(\omega) &= \frac{1}{|a|} e^{\frac{i\omega b}{a}} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-\frac{i\omega t}{a}} dt \\ &= \frac{1}{|a|} e^{\frac{i\omega b}{a}} \hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right) \end{aligned}$$

⁶ הגבול התחתון הוא $t = a \cdot (-\infty) + b = +\infty$, הגבול העליון הוא $t = a \cdot \infty + b = -\infty$, ומקבלים אינטגרל מהצורה $\int_{+\infty}^{-\infty}$ אשר שקול לאינטגרל $-\int_{-\infty}^{+\infty}$.

2.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}[e^{icx} f(x)](\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{icx} f(x) e^{-i\omega x} dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i(\omega-c)x} dx \\
 &= \mathcal{F}[f](\omega - c)
 \end{aligned}$$



שני מקרים מיוחדים של הנוסחה האחרונה הם כאשר:

א. $b = 0$. כלומר, $g(x) = f(ax)$, $a \neq 0$, ואז

$$\mathcal{F}[c f(ax)](\omega) = \frac{c}{|a|} \hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

הוספת המקדם c חשובה עבור שימושים פרקטיים של נוסחה זו. ראה דוגמא בהמשך.
במונחים של זמן ותדר אפשר לפרש את הנוסחה האחרונה כך:

מתיחה בזמן שקולה לכיווץ בתדר

כיווץ בזמן שקול למתיחה בתדר

במילים אחרות: אם נרצה למשל לשדר סיגנל בזמן קצר יותר (כיווץ זמן) נזדקק לתדרים גבוהים יותר (מתיחת תדר). אם נרצה למרוח סיגנל על פני זמן ארוך יותר (מתיחת זמן) נזדקק לתדרים נמוכים יותר (כיווץ תדר).

ב. $a = 1$. כלומר $g(x) = f(x + b)$, ואז

$$\mathcal{F}[f(x + b)](\omega) = e^{i\omega b} \hat{f}(\omega)$$

במונחים של זמן ותדר אפשר לפרש את הנוסחה האחרונה כך:

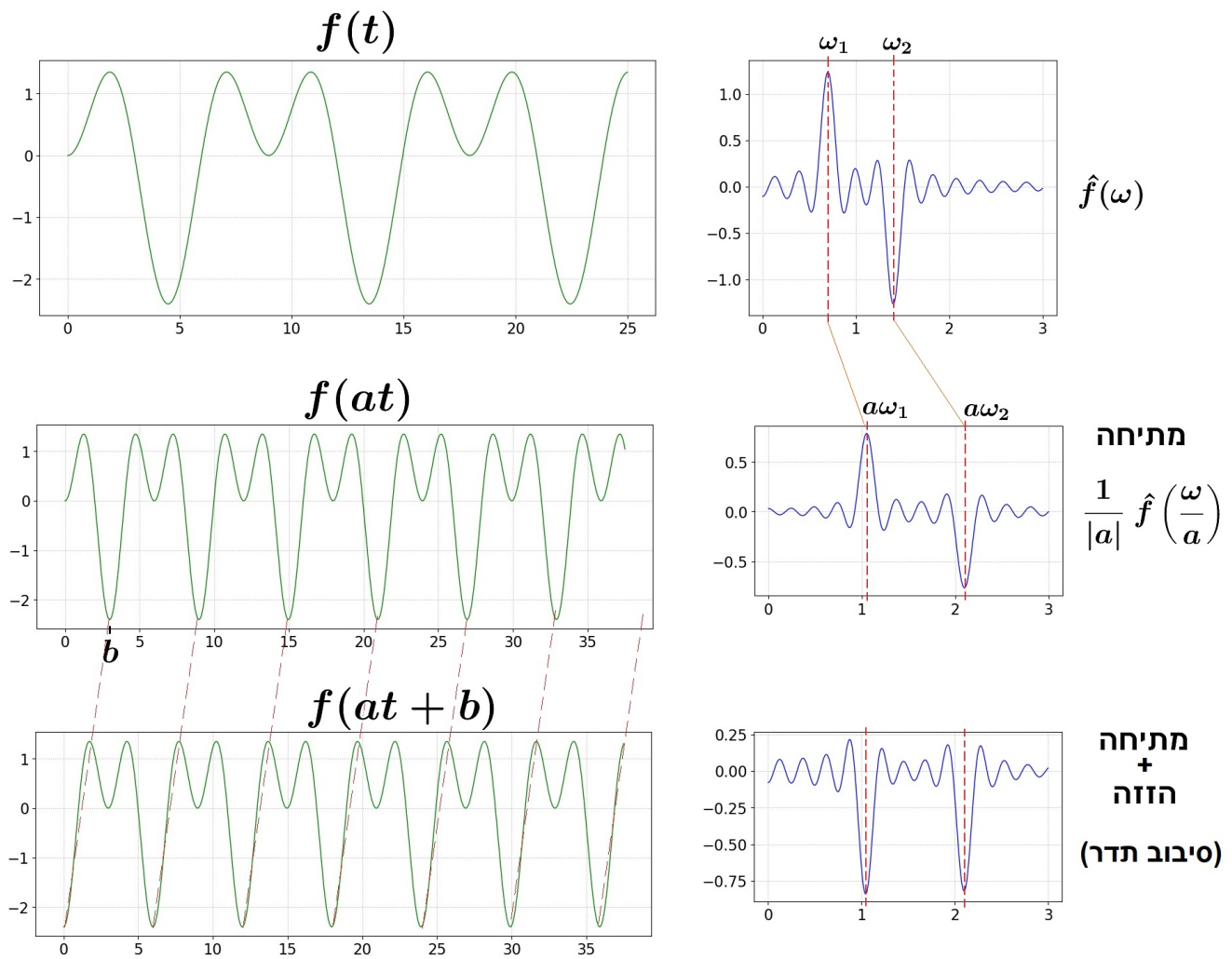
הזזה בזמן שקולה לסיבוב בתדר

ג. לגבי נוסחה 2 נוכל לאמר

סיבוב בזמן שקול להזזה בתדר

דוגמא: נסתכל מה קורה לסיגנל הפשוט $f(t) = 1.2 \cos(0.7t) - 1.2 \cos(1.4t)$ תחת הזזה

ומתיחת זמן $f(at + b)$ עבור $a = 1.5$, $b = 4.5$. הסיגנל מורכב משני תדרים בלבד $\omega_1 = 0.7$, $\omega_2 = 1.4$, עם אמפליטודות 1.2, -1.2. בצד ימין של שרטוט 8 רואים איך נראים הסיגנלים $f(t)$, $f(at)$, $f(at + b)$, ובצד שמאל רואים את ההתמרות פורייה המתאימות.



נוסחאות המודולציה (Modulation)

לכל $f \in G(\mathbb{R})$ ולכל $c \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{F}[f(x) \cos cx](\omega) = \frac{\hat{f}(\omega - c) + \hat{f}(\omega + c)}{2}$$

$$\mathcal{F}[f(x) \sin cx](\omega) = \frac{\hat{f}(\omega - c) - \hat{f}(\omega + c)}{2i}$$

הוכחה: נוכיח רק את הנוסחה הראשונה. הוכחת הנוסחה השנייה דומה לחלוטין.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(x) \cos cx](\omega) &= \mathcal{F}\left[f(x) \frac{e^{icx} + e^{-icx}}{2}\right](\omega) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \mathcal{F}[e^{icx} f(x)](\omega) + \mathcal{F}[e^{-icx} f(x)](\omega) \right\} \\ &= \frac{\hat{f}(\omega - c) + \hat{f}(\omega + c)}{2} \end{aligned}$$

בשלב האחרון השתמשנו בנוסחה 2 של תכונות מתיחה/כיווץ/סיבוב.

שיטת השידור AM (Amplitude Modulation) מתבססת על פעולת המודולציה המשמשת עבור שידור סיגנלים בעלי אורך גל גדול באמצעות גלים קצרים, וגם עבור שידור מקבילי של אותות. מכפלת הגלים $f(x) \cos(cx)$ היא מכפלת גל המידע (modulated signal) עם הגל הנושא (Carrier). למתעניינים, פרטים נוספים במצגת הבאה

Modulation and Sampling

נוסחת הנגזרת

תהי f פונקציה רציפה כך ש- $f, f' \in G(\mathbb{R})$ וכך ש- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$. אזי

$$\widehat{f'}(\omega) = i\omega \widehat{f}(\omega)$$

הוכחה:

$$\widehat{f'}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{-i\omega x} dx = \lim_{L, M \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-M}^L f'(x) e^{-i\omega x} dx$$

נחשב את האינטגרל האחרון על ידי אינטגרציה לפי חלקים: ($dv = f'(x)dx$, $u = e^{-i\omega x}$)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-M}^L f'(x) e^{-i\omega x} dx &= \frac{1}{2\pi} \left[f(x) e^{-i\omega x} \Big|_{-M}^L - \int_{-M}^L f(x) (-i\omega) e^{-i\omega x} dx \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[f(L) e^{-i\omega L} - f(-M) e^{i\omega M} + i\omega \int_{-M}^L f(x) e^{-i\omega x} dx \right] \end{aligned}$$

נתון לנו כי $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ ולכן

$$\lim_{L, M \rightarrow \infty} [f(L) e^{-i\omega L} - f(-M) e^{i\omega M}] = 0$$

מאחר ו- $f \in G(\mathbb{R})$ הרי ש-

$$\lim_{L, M \rightarrow \infty} \frac{i\omega}{2\pi} \int_{-M}^L f(x) e^{-i\omega x} dx = i\omega \mathcal{F}[f](\omega)$$

באופן דומה מוכיחים, כי תחת התנאים המתאימים,

$$\widehat{f^{(n)}}(\omega) = (i\omega)^n \widehat{f}(\omega)$$

תרגיל: על ידי שימוש בטור ההנדסי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ בנה סיגנל $f \in G(\mathbb{R})$ כך שלא קיים הגבול

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$$

❶ כפל בזמן ("הגברה")

תהי $f \in G(\mathbb{R})$ כך שגם הפונקציה $xf(x)$ שייכת ל- $G(\mathbb{R})$. אזי ההתמרת פוריה של f גזירה ברציפות ומתקיים השוויון

$$\mathcal{F}[xf(x)](\omega) = i \frac{d}{d\omega} \hat{f}(\omega)$$

הוכחה: נתחיל מצד ימין. אם f רציפה ב- $\mathbb{R}$ אז על פי כלל לייבניץ⁷ ניתן לבצע גזירה לפי ω מתחת לסימן האינטגרל,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\omega} \hat{f}(\omega) &= \frac{d}{d\omega} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \right] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{d\omega} [f(x) e^{-i\omega x}] dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} -ix f(x) e^{-i\omega x} dx = -\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) e^{-i\omega x} dx \\ &= -i \mathcal{F}[xf(x)] \end{aligned}$$

ונקבל את התוצאה. אחרת, אם ל- f יש נקודות אי-רציפות, אז תהי $\{(a_n, b_n)\}_{n \in I}$ משפחת כל הקטעים בהם f רציפה (a_n יכול להיות שווה $-\infty$, b_n יכול להיות שווה ∞ , והאיחוד של כל הקטעים שווה $\mathbb{R}$ ללא נקודות אי-רציפות). אזי

$$\mathcal{F}[f](\omega) = \sum_{n \in I} \frac{1}{2\pi} \int_{a_n}^{b_n} f(x) e^{-i\omega x} dx$$

כאשר הטור באגף ימין מתכנס במידה שווה מעל $\mathbb{R}$. לכן נוכל לגזור באופן דומה את $\mathcal{F}[f](\omega)$ מתחת לסימן הסכום וגם מתחת לסימן האינטגרל, ונקבל את התוצאה. ■

באופן דומה נוכל להוכיח שאם $f \in G(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$, ואם הפונקציה $x^n f(x)$ שייכת ל- $G(\mathbb{R})$, אז ההתמרת פורייה של f גזירה ברציפות n פעמים ומתקיים השוויון

$$\mathcal{F}[x^n f(x)](\omega) = i^n \frac{d^n}{d\omega^n} \hat{f}(\omega)$$

⁷ ניסוח התנאים וההוכחה של כלל לייבניץ זמינים בקישור:

❶ **דוגמא (גאוסיאן):** נחשב עכשיו את ההתמרת פוריה של $f(x) = e^{-x^2}$, $-\infty < x < \infty$. נעשה זאת בדרך עקיפה. לפי ההגדרה

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{-i\omega x} dx$$

ולכן

$$\frac{d}{d\omega} \hat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d}{d\omega} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{-i\omega x} dx$$

על פי כלל לייבניץ ניתן להחליף את סדר הגזירה והאינטגרציה⁸ לפי ω (למה?) ולכן

$$\frac{d}{d\omega} \hat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} (-ix) e^{-i\omega x} dx = \frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (-2xe^{-x^2}) e^{-i\omega x} dx$$

על ידי אינטגרציה לפי חלקים נקבל ($dv = -2xe^{-x^2}$, $u = e^{-i\omega x}$)

$$\frac{d}{d\omega} \hat{f}(\omega) = \frac{i}{4\pi} \left[e^{-x^2} e^{-i\omega x} \Big|_{x=-\infty}^{x=\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} (-i\omega e^{-i\omega x}) dx \right]$$

נחשב את הביטוי הראשון שבאגף ימין:

$$e^{-x^2} e^{-i\omega x} \Big|_{-\infty}^{\infty} = \lim_{L,M \rightarrow \infty} [e^{-L^2} e^{-i\omega L} - e^{-M^2} e^{i\omega M}] = 0$$

ולכן

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\omega} \hat{f}(\omega) &= -\frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} (-i\omega) e^{-i\omega x} dx \\ &= -\frac{\omega}{2} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{-i\omega x} dx \\ &= -\frac{\omega}{2} \hat{f}(\omega) \end{aligned}$$

לא חישבנו את $\hat{f}$, אך הראינו כי פונקציה זו מקיימת את המשוואה הדיפרנציאלית הרגילה מסדר ראשון

$$\hat{f}'(\omega) + \frac{\omega}{2} \hat{f}(\omega) = 0$$

על ידי אחת מן השיטות המתאימות לפתרון משוואות דיפרנציאליות מסוג זה נמצא כי

⁸ לחץ על הקישור:

הפתרון הכללי של משוואה זו הוא⁹

$$\hat{f}(\omega) = Ae^{-\frac{\omega^2}{4}}$$

כאשר A הוא קבוע שרירותי. בכדי לסיים את החישוב, עלינו לקבוע את A . לשם כך דרוש לנו תנאי התחלה כלשהו עבור $\hat{f}$. נציב $\omega = 0$ בהגדרה של $\hat{f}$ ונקבל

$$A = \hat{f}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^0 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

ידוע כי¹⁰

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

לכן

$$A = \hat{f}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$$

ולבסוף נקבל

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4}}$$

סעיף 6.4: ההתמרה ההפוכה

❶ ההתמרה ההפוכה מחזירה אותנו מההתמרת פורייה לסיגנל המקורי. שמה המלא: **התמרת פורייה ההפוכה (Inverse Fourier Transform)**. באופן פורמלי, הפעולה הזו נתונה על ידי הנוסחה

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega$$

הבעייה שלנו תהיה לדעת תחת איזה תנאים ניתן להשתמש בה ובאיזה מובן היא אכן ההתמרה ההפוכה להתמרת פורייה.

❷ לפני שנענה על השאלה נציין כי בספרים שונים ההגדרות של התמרת פורייה וההתמרה ההפוכה שונות משלנו. בספרים מסוימים, ההגדרה של התמרת פורייה זהה להגדרת ההתמרה ההפוכה אצלנו, עם או בלי המקדם $\frac{1}{2\pi}$ לפני סימן האינטגרל. בספרים אחרים מופיע המקדם $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ לפני סימן האינטגרל בשתי הנוסחאות. בהקשרים מסוימים משתמשים בביטוי $e^{2\pi i \omega x}$

⁹ זוהי משוואה פרידה: $\frac{d\hat{f}}{d\omega} = -\frac{\omega}{2}\hat{f} \Leftrightarrow \frac{d\hat{f}}{\hat{f}} = -\frac{\omega}{2}d\omega \Leftrightarrow \ln \hat{f} = -\frac{\omega^2}{4} + c \Leftrightarrow \hat{f}(\omega) = Ae^{-\frac{\omega^2}{4}}$
¹⁰ ראה למשל את תרגיל 6.1 בחוברת הרצאות חדו"א 2



במקום $e^{i\omega x}$ (עקב ההבדלים שבין **תדר זוויתי** ו**תדר סינוני**). ההבדלים האלה הם טכניים לגמרי, וכל מה שחשוב הוא שהביטוי $e^{-i\omega x}$ יופיע באחת משתי הנוסחאות, והביטוי $e^{i\omega x}$ יופיע בנוסחה השנייה.

➤ המשפט הבא הוא המשפט העיקרי של תחום התמרת פורייה

[Daniel lecture notes page 80a]

משפט 6.3 (התמרת פורייה ההפוכה) תהא $f \in G(\mathbb{R})$ אז בכל נקודה $x \in \mathbb{R}$ בה קיימות הנגזרות החד-צדדיות⁶⁵ מתקיים:

$$\frac{\lim_{t \rightarrow x^-} f(t) + \lim_{t \rightarrow x^+} f(t)}{2} = \frac{f(x-) + f(x+)}{2} = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^M \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega$$

⁶⁵ במקרה בו הפונקציה לא רציפה ב- x , קיום הנגזרות החד-צדדיות מוגדר מימין כגבול $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x+t) - f(x)}{t}$ ומשמאל בהתאמה.

➤ יש לשים לב לכך שבאגף ימין רשום $\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^M \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega$ ולא $\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega$! הסיבה לכך היא שהאינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega$ לא תמיד קיים, גם כאשר x היא נקודת רציפות! למשל הגבול $\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^M x dx = 0$ קיים, אבל האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} x dx$ אינו מתכנס.

➤ הוכחת משפט 6.3:

$$\begin{aligned} \int_{-M}^M \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega &= \int_{-M}^M \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i\omega y} dy \right] e^{i\omega x} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \left[\int_{-M}^M e^{-i\omega y} e^{i\omega x} d\omega \right] dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \left[\frac{e^{i\omega(x-y)}}{i(x-y)} \right]_{\omega=-M}^{\omega=M} dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \frac{2 \sin M(x-y)}{x-y} dy \\ &= \frac{1}{\pi} \int_x^{\infty} \frac{f(y) \sin M(x-y)}{x-y} dy + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^x \frac{f(y) \sin M(x-y)}{x-y} dy \end{aligned}$$

יש לשים לב לכך שהביטוי $e^{i\omega x}$ הוא בבחינת קבוע ביחס לאינטגרנד של $\int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i\omega y} dy$, ולכן בשורה השנייה לעיל הוא נכלל בתוך האינטגרל. בשורה השנייה עשינו שימוש במשפט פוביני¹¹.

¹¹ משפט Fubini עבור פונקציה מרוכבת מהצורה $g(t, z) = u(t, x, y) + iv(t, x, y)$ נובע מידידת ממשפט פוביני עבור פונקציות ממשיים באמצעות ההפרדה בין החלק הממשי והמרוכב, והפעלת משפט פוביני על כל חלק בנפרד. ראה עמוד 240 בחוברת חדו"א 2

נציב $t = y - x$ בשני האינטגרלים האחרונים ונקבל

$$\int_{-M}^M \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty f(x+t) \frac{\sin Mt}{t} dt + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 f(x+t) \frac{\sin Mt}{t} dt$$

נוכיח ש-

$$\begin{aligned} \frac{f(x+)}{2} &= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty f(x+t) \frac{\sin Mt}{t} dt \\ \frac{f(x-)}{2} &= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 f(x+t) \frac{\sin Mt}{t} dt \end{aligned}$$

נוכיח את השוויון הראשון בלבד¹². את השוויון השני מוכיחים באותה הצורה, או שניתן לקבלו מן הראשון על ידי הצבה.

נפרק את האינטגרל שבשוויון הראשון לסכום של שני אינטגרלים:

$$\int_0^\infty f(x+t) \frac{\sin Mt}{t} dt = \int_0^\pi f(x+t) \frac{\sin Mt}{t} dt + \int_\pi^\infty f(x+t) \frac{\sin Mt}{t} dt$$

הבחירה של π בגבולות האינטגרציה היא שרירותית. ניתן להשתמש בכל קבוע חיובי אחר. נגדיר את הפונקציה

$$g(t) = \begin{cases} \frac{f(x+t)}{t}, & t > \pi \\ 0, & t \leq \pi \end{cases}$$

מן העובדה ש- $f \in G(\mathbb{R})$ נובע שגם $g \in G(\mathbb{R})$. מהלמה של רימן-לבג יוצא ש-

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^\infty g(t) \sin Mt dt = 0$$

כלומר,

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_\pi^\infty f(x+t) \frac{\sin Mt}{t} dt = 0$$

לכן נותר לנו רק לטפל בגבול

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(x+t) \frac{\sin Mt}{t} dt$$

¹² הפונקציה $\text{sinc}(t) = \frac{\sin t}{t}$ חשובה מאוד בתחום עיבוד אותות, ולכן מסגרנו את שתי הנוסאות שעומדות בפני עצמן ויש להם יישומים בתחומים שונים. ניתן לרשום אותם גם בצורה $\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{M}{\pi} \int_0^\infty f(x+t) \text{sinc}(Mt) dt = \frac{f(x+)}{2}$ ו- $\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{M}{\pi} \int_{-\infty}^0 f(x+t) \text{sinc}(Mt) dt = \frac{f(x-)}{2}$. בתחומים שונים של עיבוד אותות משתמשים במשפחת הפונקציות $\{\text{sinc}(Mt)\}_{M \in \mathbb{R}}$ כבסיס אורתונורמלי הפורש מרחבי פונקציות כגון L^2 . קישור לויקיפדיה:

הפונקציה

$$h(t) = \frac{f(x+t) - f(x+)}{t}$$

גם היא רציפה בקטע $[0, \pi]$ (בנקודה $x = 0$ על פי הנחת המשפט) ולכן מהלמה של רימן-לבג נקבל

$$\begin{aligned} & \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(x+t) \frac{\sin Mt}{t} dt \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(x+t) - f(x+)}{t} \sin Mt dt + \frac{1}{\pi} f(x+) \int_0^\pi \frac{\sin Mt}{t} dt \right] \\ &= \frac{1}{\pi} f(x+) \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^\pi \frac{\sin Mt}{t} dt \end{aligned}$$

נשאר לבדוק אם הגבול האחרון קיים ושווה $\frac{\pi}{2}$ ובכך תסתיים הוכחת המשפט. על ידי ההצבה $u = Mt$ נקבל ש-

$$\int_0^\pi \frac{\sin Mt}{t} dt = \int_0^{M\pi} \frac{\sin u}{u} du$$

ולכן

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^\pi \frac{\sin Mt}{t} dt = \int_0^\infty \frac{\sin u}{u} du$$

בהנחה שהאינטגרל שבאגף ימין מתכנס.

$$\int_0^\infty \frac{\sin u}{u} du = \frac{\pi}{2} \quad \text{טענה:}$$

הוכחת הטענה: הפונקציה $\frac{\sin u}{u}$ רציפה בקטע $(0, \infty)$ ולכן בכדי להוכיח את התכנסות האינטגרל יספיק להוכיח שהגבול

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^R \frac{\sin u}{u} du$$

קיים עבור $a > 0$ כלשהו. על ידי אינטגרציה לפי חלקים נקבל:

$$\int_a^R \frac{\sin u}{u} du = -\frac{\cos u}{u} \Big|_a^R - \int_a^R \frac{\cos u}{u^2} du$$

ברור ש-

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\cos R}{R} = 0$$

וש-

$$\left| \frac{\cos u}{u^2} \right| \leq \frac{1}{u^2}$$

הפונקציה $\frac{1}{u^2}$ אינטגרבילית בהחלט בקטע $[a, \infty)$, לכל $a > 0$, ולכן האינטגרל שלנו מתכנס. בגלל שהאינטגרל מתכנס ניתן לקבל את ערכו על ידי כל גבול מן הצורה

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^{R_m} \frac{\sin u}{u} du$$

כאשר $\{R_m\}_{m=1}^\infty$ היא סדרה כלשהיא השואפת לאינסוף. נקח את $R_m = (m + \frac{1}{2})\pi$, כאשר m הוא מספר טבעי, ונקבל

$$\int_0^\infty \frac{\sin u}{u} du = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^{(m+\frac{1}{2})\pi} \frac{\sin u}{u} du$$

על ידי ההצבה $t = \frac{u}{m+\frac{1}{2}}$ נקבל

$$\int_0^{(m+\frac{1}{2})\pi} \frac{\sin u}{u} du = \int_0^\pi \frac{\sin(m + \frac{1}{2})t}{t} dt$$

מהוכחת משפט דיריכלה (ראה הוכחת משפט 2.6 בספר של טורי פורייה והתמרות אינטגרליות)

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^\pi \frac{\sin(m + \frac{1}{2})t}{t} dt &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^\pi \frac{2 \sin \frac{1}{2}t}{t} \cdot \frac{\sin(m + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{1}{2}t} dt \\ &= \frac{\pi}{2} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{2 \sin \frac{1}{2}t}{t} = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

כאשר x היא נקדת רציפות, נקבל כתוצאת ביניים של הוכחת המשפט את הנוסחה

$$f(a) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(a+t) \frac{\sin Mt}{t} dt$$

או באופן שקול

$$f(a) = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(t) \cdot b \operatorname{sinc} b(t-a) dt$$

ביצענו הצבה $u = a + t$ ולאחר מכן החלפנו את u ב- t , ואת M ב- b .

לנוסחה האחרונה יש משמעות וחשיבות רבה בהקשר של פונקציית דלתא של דירק (Dirac) אשר נראה בהמשך. שירטוט 9 (בעמוד 30) מסביר בצורה מוחשית בתמונה אחת את החצי השני של הוכחת המשפט. זה יובן לאחר שנסביר מהי פונקציית השוק (shock wave) של דירק.

❖ **דוגמא:** בדוגמא קודמת ראינו שההתמרת פוריה של $f(x) = e^{-|x|}$ היא

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\pi(1 + \omega^2)}$$

ברור כי שתי הפונקציות האלה נמצאות במרחב $G(\mathbb{R})$, רציפות, וגזירות ברציפות. לכן מנוסחת ההתמרה ההפוכה נקבל כי

$$\begin{aligned} e^{-|x|} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi(1 + \omega^2)} e^{i\omega x} d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi(1 + \omega^2)} [\cos \omega x + i \sin \omega x] d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \omega x}{\pi(1 + \omega^2)} d\omega + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega x}{\pi(1 + \omega^2)} d\omega \end{aligned}$$

החלק המדומה מתאפס בגלל ש- $e^{-|x|}$ היא פונקציה ממשית (או בגלל ש- $\frac{\sin \omega x}{\pi(1 + \omega^2)}$ היא פונקציה אי-זוגית). לכן נקבל את הנוסחה

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \omega x}{1 + \omega^2} d\omega = e^{-|x|}$$

ובכך קיבלנו את הנוסחה הקלאסית (וגם תרגיל פופולרי)

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos \omega x}{1 + \omega^2} d\omega = \frac{\pi}{2} e^{-|x|}$$

❖ **דוגמא:** בדוגמא קודמת ראינו כי ההתמרת פוריה של הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -b \leq x \leq b \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

היא

$$\hat{f}(\omega) = \frac{\sin \omega b}{\omega \pi}$$

מנוסחת ההתמרה ההפוכה נקבל שלכל $|x| \neq b$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^M \frac{\sin \omega b}{\omega \pi} e^{i\omega x} d\omega \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^M \frac{\sin \omega b \cos \omega x}{\omega \pi} d\omega + \lim_{M \rightarrow \infty} i \int_{-M}^M \frac{\sin \omega b \sin \omega x}{\omega \pi} d\omega \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \int_0^M \frac{\sin \omega b \cos \omega x}{\omega} d\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega b \cos \omega x}{\omega} d\omega \end{aligned}$$

בנקודות $x = \pm b$, f אינה רציפה ולכן, לפי משפט ההתמרה ההפוכה, הערך של האינטגרל בנקודות אלה שווה לממוצע של הגבולות החד-צדדיים, השווה ל- $\frac{1}{2}$ בשתי הנקודות. לכן נקבל את הנוסחה

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \omega b \cos \omega x}{\omega} d\omega = \begin{cases} 1, & |x| < b \\ \frac{1}{2}, & |x| = b \\ 0, & |x| > b \end{cases}$$

אם נבחר למשל $x = 0$ אז נקבל את הנוסחה

$$\int_0^\infty \frac{\sin \omega b}{\omega} d\omega = \frac{\pi}{2}$$

או בצורה אחרת

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty b \operatorname{sinc}(\omega b) d\omega = 1$$

בתחומים מתקדמים של עיבוד אותות משתמשים לפעמים במשפחת הפונקציות $\{\operatorname{sinc}(b\omega)\}_b \in \mathbb{R}$ כבסיס אורתוגונלי מועדף בכדי לנתח סיגנלים ממשיים.

❶ **דוגמא:** מהי ההתמרת פורייה ההפוכה של $F(\omega) = 12e^{-\frac{\omega^2}{5}}$?

פיתרון: באמצעות דוגמא זו נסביר כיצד יש להשתמש בתכונת ההזזה בצורה שיטתית עבור מקרים מסוג זה (המופיעים תדיר בתרגילים שונים).

בשלב הראשון יש לזהות (בטבלת הנוסחאות) את **נוסחת הבסיס** הכי קרובה לפונקציה $F(\omega)$. נוסחת הבסיס למקרה שלנו היא נוסחה 4 של טבלת הנוסחאות בקורס (להוריד מאתר הקורס)

$$\mathcal{F}[e^{-x^2}] = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4}}$$

ברור שיש צורך להשתמש בנוסחת המתיחה (בתוספת המקדם c)

$$\mathcal{F}[c f(ax)](\omega) = \frac{c}{|a|} \hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

יש למצוא קבועים c , $a > 0$, כך ש-

$$\mathcal{F}[c e^{-(ax)^2}](\omega) = \frac{c}{a} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(\omega/a)^2}{4}} = 12e^{-\frac{\omega^2}{5}}$$

נקבל מערכת פשוטה של זוג משוואות בשני הנעלמים c , a

$$\frac{c}{2a\sqrt{\pi}} = 12, \quad -\frac{(\omega/a)^2}{4} = -\frac{\omega^2}{5}$$

ניתן לסלק את ω

$$\frac{c}{2a\sqrt{\pi}} = 12, \quad \frac{(1/a)^2}{4} = \frac{1}{5}$$

מהמשוואה הראשונה נקבל $a = \frac{\sqrt{5}}{2}$. על ידי הצבת a במשוואה השנייה נקבל $c = 12\sqrt{5\pi}$.
נרשום

$$a = \frac{\sqrt{5}}{2}, \quad c = 12\sqrt{5\pi}$$

לכן

$$\mathcal{F}^{-1} \left[12e^{-\frac{\omega^2}{5}} \right] = ce^{-(ax)^2} = 12\sqrt{5\pi} e^{-\frac{5x^2}{4}}$$

❖ הוכח שאם $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ רציפה, $f \in G(\mathbb{R})$, f' רציפה למקוטעין, $\hat{f} \in G(\mathbb{R})$ אז

$$\hat{\hat{f}}(x) = \frac{1}{2\pi} f(-x)$$

הוכחה:

$$\begin{aligned} f(-x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega \cdot (-x)} d\omega && \text{התמרת פורייה הפוכה בנקודה } -x: \\ &= 2\pi \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{-ix\omega} d\omega && \text{התמרת פורייה בהיפוך משתנים } (\omega \leftrightarrow x): \\ &= 2\pi \hat{\hat{f}}(x) \end{aligned}$$

יש להבחין שבשלב האחרון חל היפוך תפקידים: x מציין תדר ו- ω מציין זמן. לפעמים רושמים את התוצאה הזו גם כך:

$$f(-x) = 2\pi \cdot \hat{\hat{f}}(x)$$

סעיף 6.5: פונקציית דלתא של דירק (Dirac Delta)

Daniel lecture notes page 84a

נתחיל בלציין כי פונקציית דלתא היא לא פונקציה במובן הרגיל אלא פונקציה מוכללת (או פונקציונל)⁶⁸ לינארי מעל מרחב פונקציות, לכן ההגדרות וההוכחות בפרק זה לא מדויקים. עם זאת, את התכונות אותן אנו "מוכיחים" ניתן להוכיח עם הכלים הנכונים. באופן אינטואיטיבי, זוהי פונקציה אשר מקבלת את הערך אינסוף בנקודה אחת ובכל נקודה אחרת את הערך אפס. פונקציית זו היא הכללה של הדלתא של קרונקר.

הגדרה 6.4 יהא a מספר ממשי. פונקציית דלתא של דירק δ_a היא פונקציה המקיימת:

$$\int_I f(t) \delta_a(t) dt = f(a)$$

עבור כל פונקציה f רציפה בסביבת a ועבור כל קבוצה I אשר בה a היא נקודה פנימית.

למי שמעוניין להעמיק ולהבין במדויק מהי דיסטריבוציה (או פונקציונל) מומלץ לקרוא את התאור הקצר הבא של פרופסור מיכאל צוויקל (טכניון)

A QUICK DESCRIPTION FOR ENGINEERING STUDENTS OF DISTRIBUTIONS

מושג הדיסטריבוציה: מדובר באחד המושגים המופשטים ביותר באנליזה מתימטית. מבחינה הנדסית, פונקציית דלתא δ_a היא סוג של טכניקה ללכידת ערך של סיגנל בנקודת זמן ספציפית $t = a$. הסיגנל עובר דרך מסנן $\delta_a(t)$ שבו הסיגנל מוכפל בפונקציית "הלם" (shock) כגון sinc שכמעט מתאפסת בכל נקודה פרט לסביבה קטנה של $t = a$ שבה היא מקבלת ערכים גבוהים במיוחד. מדובר בתהליך איטרטיבי של דגימות חוזרות של הסיגנל באמצעות פונקציות שוק יותר ויותר חדות כפי שרואים בשרטוט 9.

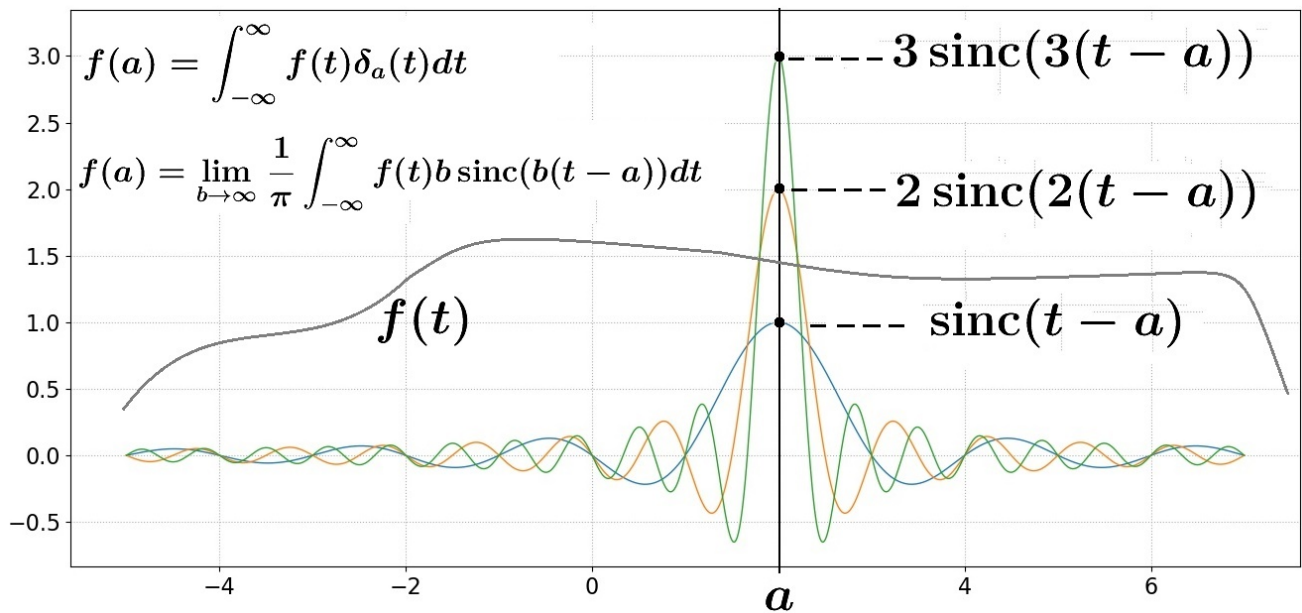
אחת מתוצאות הביניים של הוכחת משפט ההתמרה ההפוכה היתה הנוסחה הבאה (עבור נקודת רציפות)

$$f(a) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot b \text{sinc } b(t - a) dt$$

אנו רואים כאן את הסיגנל $f(t)$ מוכפל בפונקציית ההלם $\text{shock}_b(t)$

$$\text{shock}_b(t) = b \text{sinc } b(t - a)$$

שתוקפת את הנקודה $t = a$. כאשר עוצמת ההלם b תלך ותגדל הערך של האינטגרל יתלכד עם הערך של הסיגנל בנקודה a .



איור 9: לכידת הערך של הסיגנל $f(t)$ בנקודה $t = a$ באמצעות מסנן sinc: הערך של האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)b \operatorname{sinc}(b(t-a))dt$ הולך ומתקרב לערך $f(a)$ כאשר b שואף לאינסוף

❶ בתורת הדיסטרִיבוציות, **פונקציית דלתא של דירק** $\delta_a(t)$ בנקודת זמן $t = a$ מוגדרת להיות “הגבול” של פונקציות ההלם בנקודה $t = a$ כאשר עוצמת ההלם b שואפת לאינסוף

$$\delta_a(t) = \lim_{b \rightarrow \infty} \operatorname{shock}_b(t)$$

לכאורה התוצאה המתקבלת היא

$$\delta_a(t) = \begin{cases} \infty, & t = a \\ 0, & t \neq a \end{cases}$$

תוצאה שאינה תואמת את מושג הפונקציה שאנו מכירים (במובן הרגיל פונקציה אינה יכולה לקבל את הערך ∞ בנקודה ספציפית) ולכן לא ניתן לטפל בה בכלים הרגילים.

❷ המאפיין המרכזי של “פונקציית” הדלתא של דירק הוא

$$f(a) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta_a(t)dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \operatorname{shock}_b(t) dt$$

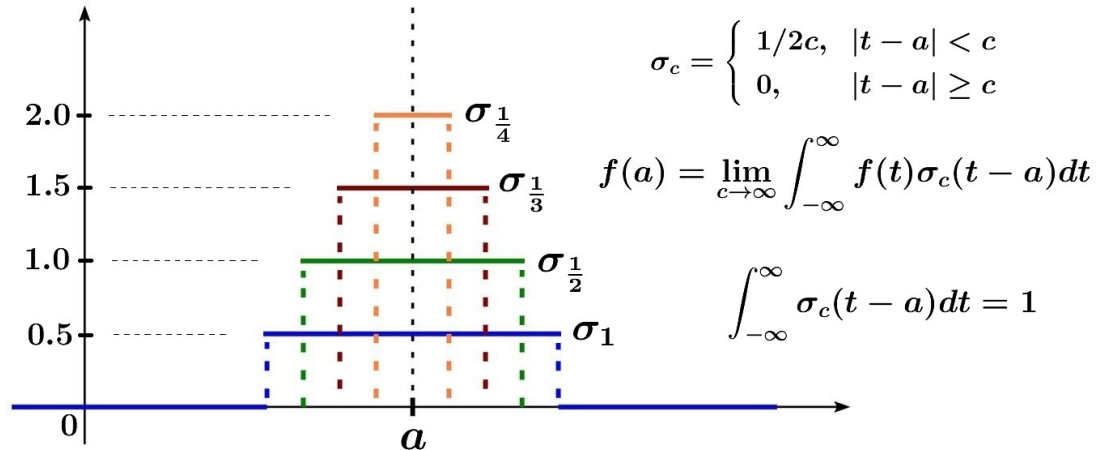
הגדרה פורמלית של מושג הגבול המיוחד הזה חורגת ממסגרת הקורס (אך מוסברת היטב במאמר הקצר של פרופסור צוויקל).

❸ בקורס הנוכחי נסתפק בפירוש מצומצם של “פונקציית” דלתא באמצעות שתי שיטות פשוטות לממש אותה: פונקציות sinc ופונקציות מדרגה. המימוש באמצעות פונקציות sinc מתבטא על ידי הנוסחה

$$f(a) = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)b \operatorname{sinc}(b(t-a))dt$$

לאחר שהבנו את שירותוט 9, נוכל להבין מה למעשה מתבצע בחצי השני של הוכחת משפט ההתמרה ההפוכה. השירותוט מסביר זאת בתמונה אחת פשוטה.

❶ דרך נוספת לתאר את פונקציית הדלתא של דירק היא באמצעות פונקציות מדרגה. במקרים רבים יותר פשוט להוכיח טענות מתמטיות שונות באמצעותן מאשר באמצעות פונקציות ה- sinc . אבל מבחינה פרקטית פונקציות sinc הן יותר יעילות וגמישות.



איור 10: לכידת הערך של הסיגנל $f(t)$ בנקודה $t = a$ באמצעות מסנן מדרגה σ_c : הערך של האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sigma_c(t-a) dt$ הולך ומתקרב לערך $f(a)$ כאשר c שואף לאפס

Daniel lecture notes page 85a

טענה 6.5 לכל $a \in \mathbb{R}$ ולכל $c > 0$ נגדיר $\sigma_{c,a}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2c} & t \in (a-c, a+c) \\ 0 & t \notin (a-c, a+c) \end{cases}$ אז $\delta_a(t) = \lim_{c \rightarrow 0^+} \sigma_{c,a}(t)$

הערה: גבול זה לא סופי בנקודה a ולכן לא יכול להיות ערך של פונקציה ועדיין, זוהי ההצגה הטובה ביותר אשר אנחנו יכולים לתת לפונקציית דלתא בשלב זה.

הוכחה: תהא f פונקציה רציפה בסביבת הנקודה a , נוכיח כי תחת סימון זה מתקיימת ההגדרה של פונקצית דלתא:

$$\begin{aligned} \int_I f(t) \left(\lim_{c \rightarrow 0^+} \sigma_{c,a}(t) \right) dt &= \lim_{c \rightarrow 0^+} \int_I f(t) \sigma_{c,a}(t) dt \\ &= \lim_{(i) \ c \rightarrow 0^+} \frac{1}{2c} \int_{a-c}^{a+c} f(t) dt \\ &= \lim_{(ii) \ c \rightarrow 0^+} \frac{1}{2c} (2cf(t_c)) = \lim_{c \rightarrow 0^+} f(t_c) \stackrel{(iii)}{=} f(a) \end{aligned}$$

(i) נקודה פנימית ו- $c \rightarrow 0^+$ לכן ניתן להניח כי $[a-c, a+c] \subseteq I$

(ii) משפט ערך הביניים האינטגרלי: אם f רציפה בקטע $[a, b]$ אז יש נקודה $t_c \in [a, b]$ עבורה מתקיים $\int_a^b f(t) dt = (b-a)f(t_c)$

(iii) $c \rightarrow 0^+$ וממשפט ערך הביניים האינטגרלי מתקיים $t_c \in [a-c, a+c]$ לכן הגבול נובע מרציפות f .

לפיכך $\lim_{c \rightarrow 0^+} \sigma_{c,a}(t)$ היא פונקציה אשר מקיימת $\int_I f(t) \left(\lim_{c \rightarrow 0^+} \sigma_{c,a}(t) \right) dt = f(a)$ ולכן $\delta_a(t) = \lim_{c \rightarrow 0^+} \sigma_{c,a}(t)$

טענה 6.6 לכל a ממשי ולכל פונקציה f הרציפה בסביבת a מתקיים:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t-a) dt = f(a)$$

הוכחה: תחת ההגדרה $\delta_a(t) = \lim_{c \rightarrow 0^+} \sigma_c(t)$, לכל a ממשי קבוע נקבל $\delta(t-a) = \delta_a(t)$. אכן, ברור מההגדרה של $\sigma_{c,a}$ כי $\sigma_{c,0}(t-a) = \sigma_{c,a}(t)$ ולכן:

$$\delta(t-a) = \lim_{c \rightarrow 0^+} \sigma_{c,0}(t-a) = \lim_{c \rightarrow 0^+} \sigma_{c,a}(t) = \delta_a(t)$$

לפיכך מתקיים:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t-a) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta_a(t) dt = f(a)$$

סעיף 6.6: נוסחת פלאנשרל (Michel Plancherel)

באנליזה מתימטית מתקדמת יותר מגדירים מרחבי פונקציות $L^p(\mathbb{R})$ (על שמו של הנרי לבג). המרחב $G(\mathbb{R})$ שלנו הוא תת-מרחב של $L^1(\mathbb{R})$ והוא נועד להכיל פונקציות פשוטות מבחינה פרקטית. מרחב נוסף שנזדקק לו בסעיף הנוכחי הוא המרחב $L^2(\mathbb{R})$.

הגדרה 6.8 נאמר כי פונקציה f היא אינטגרבילית בריבוע על $\mathbb{R}$ אם קיים האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx$.

1. אוסף כל הפונקציות הנ"ל מסומן ב- $L^2(\mathbb{R})$.

2. מסמנים את הנורמה של f ב- $\|f\|_2 = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx}$. למעשה, זהו מרחב מכפלה פנימית כאשר

מגדירים לכל f, g : $\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx$. מוכיחים כי זוהי אכן מכפלה פנימית ובפרט שהאינטגרל מתכנס.

קל להוכיח כי $G(\mathbb{R}) \subseteq L^2(\mathbb{R})$: אם $f(x)$ אינטגרבילית בהחלט אז

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ \frac{1}{|x|}, & |x| > 1 \end{cases} \quad \text{תרגיל 1: נגדיר}$$

הוכח כי $f \in L^2(\mathbb{R})$ אך $f \notin G(\mathbb{R})$.

אם $f \in L^2(\mathbb{R})$ אז היא אינה בהכרח אינטגרבילית בהחלט ולכן ההדגרה של התמרת פורייה במקרה זה היא

הגדרה 6.9 תהא f רציפה למקוטעין ואינטגרבילית בריבוע אז התמרת פורייה שלה היא:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n f(x) e^{-i\omega x} dx$$

משפט 6.10 (נוסחת פלנשראל המוכללת) אם $f, g \in G(\mathbb{R})$ וגם $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ אז מתקיים:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \overline{\hat{g}(\omega)} d\omega$$

אם $g = f$ נקבל את נוסחת פלנשראל:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega$$

דוגמא 1:

כזכור, עבור $a > 0$ ראינו $\mathcal{F}[e^{-a|x|}](\omega) = \frac{a}{\pi(\omega^2 + a^2)}$. כעת, נבחין כי:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (e^{-a|x|})^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2a|x|} dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-2ax} dx = 2 \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{-2ax} dx = 2 \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{-2at} - 1}{-2a} = \frac{1}{a}$$

מפלנשראל נקבל:

$$\frac{1}{2\pi} \frac{1}{a} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-a|x|})^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{a}{\pi(\omega^2 + a^2)} \right)^2 d\omega = 2 \int_0^{\infty} \frac{a^2}{\pi^2 (\omega^2 + a^2)^2} d\omega$$

וקיבלנו את הנוסחה:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(\omega^2 + a^2)^2} d\omega = \frac{\pi}{4a^3}$$

נכונות הנוסחה תוצדק על ידי ההסבר החלקי הבא:

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \overline{\hat{g}(\omega)} d\omega &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-i\omega x} dx \right) d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \overline{g(x)} e^{i\omega x} d\omega \right] dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega \right] \overline{g(x)} dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx
 \end{aligned}$$

דוגמא 1:

Daniel lecture notes page 89b

כזכור, עבור $a > 0$ ראינו $\mathcal{F}[e^{-a|x|}](\omega) = \frac{a}{\pi(\omega^2 + a^2)}$. כעת, נבחין כי:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (e^{-a|x|})^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2a|x|} dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-2ax} dx = 2 \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{-2ax} dx = 2 \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{-2at} - 1}{-2a} = \frac{1}{a}$$

מפלנשראל נקבל:

$$\frac{1}{2\pi} \frac{1}{a} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-a|x|})^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{a}{\pi(\omega^2 + a^2)} \right)^2 d\omega = 2 \int_0^{\infty} \frac{a^2}{\pi^2 (\omega^2 + a^2)^2} d\omega$$

וקיבלנו את הנוסחה:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(\omega^2 + a^2)^2} d\omega = \frac{\pi}{4a^3}$$

דוגמא 3: לכל קבוע ממשי $b > 0$, תהי

$$f_b(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq b \\ 0, & |x| > b \end{cases}$$

על סמך דוגמא קודמת

$$\hat{f}_b(\omega) = \frac{\sin \omega b}{\omega \pi}$$

נבחר שני קבועים $0 < a < b$. אזי מנוסחת פלנשראל המוכללת נקבל

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_a(x) f_b(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[f_a](\omega) \overline{\mathcal{F}[f_b](\omega)} d\omega$$

את האינטגרל הראשון קל לחשב:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_a(x) f_b(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a dx = \frac{a}{\pi}$$

כמו־כן

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[f_a](\omega) \overline{\mathcal{F}[f_b](\omega)} d\omega = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin a\omega \sin b\omega}{\omega^2} d\omega$$

לכן, לכל $a, b > 0$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin a\omega \sin b\omega}{\omega^2} d\omega = \pi \min(a, b)$$

סעיף 6.7: קונבולוציה (Convolution)

בדומה לפעולות החיבור, הכפל, וההרכבה בין שתי פונקציות, פעולת ה**קונבולוציה** היא פעולה נוספת בין שתי פונקציות בעלת שימושים חשובים בשטחים טכנולוגיים שונים

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - y)g(y)dy$$

דוגמא: נחשב את $f * f$ כאשר $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 2 \\ 0, & |x| > 2 \end{cases}$

$$\begin{aligned} (f * f)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x - y)f(y)dy = \int_{-2}^2 f(x - y)f(y)dy \\ &= \int_{-2}^2 f(x - y)dy = \int_{-2}^2 f(x - y)dy \\ &= \int_{x+2}^{x-2} f(t) \cdot (-dt) = \int_{x-2}^{x+2} f(t)dt = \begin{cases} 0, & |x| > 4 \\ 4 - x, & 0 \leq x \\ 4 + x, & -4 \leq x \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

ההצבה $t = x - y$, גוררת $dy = -dt$.
גבולות אינטגרציה: $x + 2 \mapsto -2$, $x - 2 \mapsto 2$.
היפוך הגבולות התאפשר עקב המינוס של $(-dt)$.

טענה 6.12 אם $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ אז $f * g$ קיימת ואינטגרבילית בהחלט מעל $\mathbb{R}$.

הוכחה:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |(f * g)(x)| dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y) dy \right| dx \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y)| \cdot |g(y)| dy dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y)| dx \right] \cdot |g(y)| dy \end{aligned}$$

נתון כי f אינטגרבילית בהחלט מעל $\mathbb{R}$, ולכן על ידי הצבה נקבל ש-

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y)| dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$$

כאשר ערך האינטגרל אינו תלוי ב- y . לכן

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |(f * g)(x)| dx &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx \right] |g(y)| dy \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} |g(y)| dy \right) < \infty \end{aligned}$$

❖ **תכונות בסיסיות**

טענה 6.13 תהייה $f, g, h \in L^1(\mathbb{R})$ אז:

1. (קיבוציות) $f * (g * h) = (f * g) * h$
2. (חילופיות) $f * g = g * f$
3. (לינאריות) לכל $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ מתקיים $f * (\alpha g + \beta h) = \alpha (f * g) + \beta (f * h)$
4. (נגזרת) אם f גזירה ואם $f * g$ קיימת וגזירה אז $(f * g)' = (f' * g)$

את רוב התכונות קל להוכיח. נדגים את הקומוטטיביות: אם נציב $u = x - y$ בהגדרה הקונבולוציה נקבל

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(x-u)dy = \int_{-\infty}^{\infty} g(x-u)f(u)dy = (g * f)(x)$$

משפט 6.14 (משפט הקונבולוציה) יהיו $f, g \in G(\mathbb{R})$, אז:

$$\mathcal{F}[f * g](\omega) = 2\pi \mathcal{F}[f](\omega) \cdot \mathcal{F}[g](\omega)$$

בצורה שקולה אפשר לרשום

$$\widehat{f * g}(\omega) = 2\pi \hat{f}(\omega) \cdot \hat{g}(\omega)$$

במונחים פיזיקליים לפעמים מבטאים זאת בצורות הבאות

קונבולוציה בתחום הזמן שקולה למכפלה בתחום התדר

קונבולוציה בתחום התדר שקולה למכפלה בתחום הזמן

ברוב המקרים, החישוב של $f * g$ הוא מסובך מאוד, ולכן השימוש השכיח במשפט הקונבולוציה הוא בכיוון ההפוך: חישוב $f * g$ באמצעות ההתמרה ההפוכה של $\hat{f}(\omega) \cdot \hat{g}(\omega)$

$$f * g = 2\pi \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)]$$

משפט הקונבולוציה נשאר נכון גם עבור המרחב $L^2(\mathbb{R})$

הוכחת משפט הקונבולוציה (6.14):

מהנתון $f, g \in G(\mathbb{R})$ נובע כי $f * g$ אינטגרבילית בהחלט. זה לא תמיד נכון ש- $f * g$ רציפה למקוטעין, אך למרות זאת ניתן לבצע את הפעולות הבאות:

$$\begin{aligned} \widehat{f * g}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(x) e^{-i\omega x} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y) dy \right) e^{-i\omega x} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) e^{-i\omega(x-y)} g(y) e^{-i\omega y} dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) e^{-i\omega(x-y)} dx \right) g(y) e^{-i\omega y} dy \end{aligned}$$

קל לבדוק (על ידי הצבה $t = x - y$) כי

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) e^{-i\omega(x-y)} dx = \hat{f}(\omega)$$

למעשה, האינטגרל באגף שמאל אינו תלוי במשתנה y . לכן

$$\widehat{f * g}(\omega) = \hat{f}(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{-i\omega y} dy = \hat{f}(\omega) \cdot 2\pi \cdot \hat{g}(\omega)$$

❖ **דוגמא 1:** תהי $f(x) = e^{-x^2}$. חשב את $f * f$.

פיתרון: בדוגמא קודמת חישבנו את ההתמרת פורייה של $f(x)$

$$\mathcal{F}[e^{-x^2}] = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4}}$$

לכן על פי משפט הקונבולוציה

$$\widehat{f * f}(\omega) = 2\pi \cdot \hat{f}(\omega) \cdot \hat{f}(\omega) = 2\pi \cdot \frac{1}{4\pi} e^{-\frac{\omega^2}{2}} = \frac{1}{2} e^{-\frac{\omega^2}{2}}$$

לכן

$$(f * f)(x) = \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{\omega^2}{2}} \right]$$

על פי נוסחת ההזזה

$$\mathcal{F}[c \cdot g(ax)](\omega) = \frac{c}{|a|} \hat{g}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

יש למצוא קבועים c, a , כך ש-

$$\mathcal{F}[c \cdot e^{-(ax)^2}](\omega) = \frac{c}{|a|} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(\omega/a)^2}{4}} = \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{\omega^2}{2}}$$

כלומר

$$\frac{c}{2|a|\sqrt{\pi}} = \frac{1}{2}, \quad -\frac{(\omega/a)^2}{4} = -\frac{\omega^2}{2}$$

קל לקבל

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad c = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}$$

לכן

$$f * f = \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{\omega^2}{2}} \right] = c e^{-(ax)^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

שימוש של התמרת פורייה לפיתרון משוואת החום

התמרת פורייה עלה על ידי ג'וזף פורייה כאשר ניסה לפתור בעיות פיזיקליות הקשורות להתפשטות גלי חום. משוואת החום ההומוגנית החד-מימדית על כל הציר הממשי נתונה על ידי המשוואה

$$u_t - ku_{xx} = 0 \quad (-\infty < x < \infty, \quad 0 < t < \infty)$$

כאשר u היא פונקציה של המשתנים x ו- t , x היא נקודה על הציר, ו- t היא נקודה בזמן. ציר המספרים הממשיים $\mathbb{R}$ מייצג מוט אינסופי (משני הצדדים) העשוי מחומר אחיד בעל צפיפות אחידה. מניחים כי המוט מבודד לגמרי, ולכן אין כניסה או יציאה של חום מן המוט החוצה. הערך $u(x, t)$ הוא הטמפרטורה בנקודה x על המוט בזמן t . k הוא קבוע פיזיקלי חיובי התלוי בסוג ובצפיפות החומר ממנו עשוי המוט. המשוואה היא מודל מתמטי פשוט לתופעת ההתפשטות של החום לאורך המוט במשך הזמן. בכדי לקבוע פתרון מסוים יש לדעת את מצב הטמפרטורה על כל נקודה של המוט בזמן מסוים. לכן נניח שנתון לנו תנאי התחלה מן הצורה

$$u(x, 0) = f(x) \quad (-\infty < x < \infty)$$

כאשר $f \in G(\mathbb{R})$. הנחה זו שקולה לעובדה שכמות החום האצורה במוט היא סופית ושהתפלגות הטמפרטורות על המוט היא רציפה למקוטעין. נדרוש שתנאי זה יתקיים גם עבור u, u_x, u_t ו- u_{xx} (כל אחד מהם מגדיר פונקציה של x אם קובעים את t). הרעיון הכללי לפתרון הבעיה הוא שבמקום לנסות למצוא את u באופן ישיר, יהיה יותר קל למצוא את ההתמרת פוריה של u שנסמנה על ידי U (ההתמרה ביחס למשתנה x כמובן, למשתנה t נתייחס כאל פרמטר). הסיבה לכך היא שכשמפעילים את התמרת פוריה על u_x הנגזרת החלקית תעלם (ראה נוסחת הנגזרת). במקרה שלנו, הפעלת התמרת פוריה על משוואת החום תביא אותנו למשוואה רגילה מסדר ראשון עבור U . המחיר שנשלם מתבטא בכך שמקדמי המשוואה הרגילה אינם קבועים. בשלב השני נשתמש בנוסחת ההתמרה ההפוכה בכדי לקבל את u , ובכך יסתיים פתרון הבעיה.

נגדיר

$$U(\omega, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-i\omega x} dx$$

כלומר, $U(\omega, t)$ היא ההתמרת פוריה של $u(x, t)$ ביחס למשתנה x . נגזור את U לפי t :

$$U_t(\omega, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u_t(x, t) e^{-i\omega x} dx$$

(השתמשנו בכלל לייבניץ להחלפת סדר גזירה ואינטגרציה).

מאחר ו- $u_t = ku_{xx}$, נוכל לרשום

$$U_t(\omega, t) = \frac{k}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u_{xx}(x, t) e^{-i\omega x} dx$$

מנוסחת הנגזרת של התמרת פוריה (נוסחה נגזרת) נקבל שכל פונקציה $g \in G(\mathbb{R})$ שגזירה פעמיים מתקיים

$$\mathcal{F}[g''](\omega) = -\omega^2 \mathcal{F}[g](\omega)$$

ולכן

$$U_t(\omega, t) = k\mathcal{F}[u_{xx}](\omega, t) = -k\omega^2 U(\omega, t)$$

קבלנו משוואה דיפרנציאלית רגילה מאוד פשוטה:

$$U_t + k\omega^2 U = 0$$

זוהי משוואה דיפרנציאלית פרידה (separable) שבה מופיעה רק נגזרת ביחס למשתנה t

$$\frac{dU}{dt} = -k\omega^2 U$$

הפרדת משתנים:

$$\frac{dU}{U} = -k\omega^2 dt \implies \ln U = -k\omega^2 t + C(\omega)$$

וקיבלנו פיתרון כללי

$$U(\omega, t) = A(\omega) e^{-k\omega^2 t}$$

כאשר $A(\omega)$ היא פונקציה שרירותית של ω . בכדי לקבוע את $A(\omega)$ נשתמש בתנאי ההתחלה על u :

$$A(\omega) = U(\omega, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, 0) e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$$

לכן

$$A(\omega) = \hat{f}(\omega)$$

כאשר $\hat{f}$ היא ההתמרת פוריה של f (שנתונה לנו). מצאנו אם כן כי

$$U(\omega, t) = \hat{f}(\omega) e^{-k\omega^2 t}$$

לכן על פי משפטי ההתמרה ההפוכה והקונבולוציה

$$(*) \quad u(x, t) = \mathcal{F}^{-1} [\hat{f}(\omega) \cdot e^{-k\omega^2 t}] = \frac{1}{2\pi} \cdot f * \mathcal{F}^{-1} [e^{-k\omega^2 t}]$$

f נתונה לנו כתנאי התחלה, ולכן נשאר לנו לחשב את $\mathcal{F}^{-1} [e^{-k\omega^2 t}]$.
 בדוגמא קודמת מצאנו כי ההתמרת פוריה של $g(x) = e^{-x^2}$ היא $\mathcal{F}[g](\omega) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4}}$ בנוסף לכך יש לנו גם את נוסחת ההזזה:

$$\mathcal{F}[c \cdot g(ax)](\omega) = c \cdot \frac{1}{|a|} \mathcal{F}[g]\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

במקרה של $g(x) = e^{-x^2}$ נקבל

$$\mathcal{F}[c \cdot e^{-(ax)^2}](\omega) = c \cdot \frac{1}{|a|} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(\omega/a)^2}{4}} = \frac{c}{2\sqrt{\pi}|a|} e^{-\frac{\omega^2}{4a^2}}$$

אנו מעוניינים בקבועים a ו- c כך ש-

$$\frac{c}{2\sqrt{\pi}|a|} e^{-\frac{\omega^2}{4a^2}} = e^{-k\omega^2 t}$$

כלומר

$$\frac{c}{2\sqrt{\pi}|a|} = 1, \quad -\frac{1}{4a^2} = -kt$$

ולכן $a = \frac{1}{2\sqrt{kt}}$ ו- $c = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{kt}}$. לכן אם נקח

$$p(x, t) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{kt}} e^{-\frac{x^2}{4kt}}$$

אז על פי הבנייה, ההתמרת פורייה של p (על פי המשתנה x) היא

$$\hat{p}(\omega, t) = e^{-k\omega^2 t}$$

לכן בהמשך לשוויון (*)

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \cdot f * \mathcal{F}^{-1} [e^{-k\omega^2 t}] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) p(x - y, t) dy \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} dy \end{aligned}$$

וקבלנו את הצורה הטיפוסית של הפתרון למשוואת החום. הפונקציה $e^{-\frac{x^2}{4kt^2}}$ נקראת לפעמים **הגרעין של משוואת החום** או **גרעין גאוס**. יש לשים לב לעובדה שבשום שלב לא היינו זקוקים לחשב את $\hat{f}$! וזה לא מופיע גם בצורה הסופית של הפתרון! ההתמרת פורייה של f או של u לא היתה אלא מכשיר שבאמצעותו הגענו לנוסחת הפתרון.

דוגמא: מצא פתרון טיפוסי למשוואת החום הבאה

$$\begin{cases} u_t - 7u_{xx} = 0 & (-\infty < x < \infty, 0 < t < \infty) \\ u(x, 0) = 5e^{-3x^2} & (-\infty < x < \infty) \end{cases}$$

פיתרון: על פי הנוסחה שקיבלנו

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \cdot f * \mathcal{F}^{-1} [e^{-k\omega^2 t}] = \frac{5}{2\sqrt{7\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-3y^2} e^{-\frac{(x-y)^2}{2t^2}} dy$$

החישוב של u נעשה לרוב באמצעות שיטות חישוב נומריות (האינטגרל האחרון בדרך כלל לא פתיר).

פרק 7: התמרת לפלס (Pierre-Simon, marquis de Laplace 1749-1827)

סיכום נוסף בעברית של נושא התמרת לפלס קיים גם בחוברת ההרצאות של קורס מד"ר (104131)



חוברת הרצאות משוואות דיפרנציאליות רגילות

סעיף 7.1: הגדרה

Daniel lecture notes page 95a

הגדרה 7.1 תהא $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ רציפה למקוטעין, לכל $s \in \mathbb{R}$ נגדיר:

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

לכל $s \in \mathbb{R}$ עבורו האינטגרל קיים נקבל פונקציה $\mathcal{L}[f](s)$ אשר נקראת התמרת לפלס של f .

❶ האינטגרל בהתמרת לפלס מתכנס גם עבור פונקציות לא אינטגרביליות ולמעשה גם עבור פונקציות עם קצב גידול מעריכי. אך לא מעבר לכך.

❷ נאמר שפונקציה $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ היא **מסדר מעריכי** (exponential order) אם קיימים קבועים חיוביים K, a , כך שעבור כל $t \geq 0$, מתקיים $|f(t)| \leq Ke^{at}$.

➤ המרחב של הפונקציות שיש להן התמרת לפלס הוא מרחב הפונקציות מסדר מעריכי. הוא לפעמים מסומן על ידי $\mathcal{E}[0, \infty)$.

➤ תרגיל: הוכח כי הפונקציה $f(t) = e^{t^2}$ אינה מסדר מעריכי ואין לה התמרת לפלס בשום נקודה $s > 0$.

➤ הרעיון שביסוד שיטת ההתמרה הוא

1. הפעל את ההתמרה על הבעיה הנתונה בנעלם $f(t)$ (משוואה דיפרנציאלית, אינטגרלית, או בעייה מסוג אחר)

2. קבל משוואה חדשה בפונקציה $F(s)$ שהיא קלה יותר

3. פתור את הבעיה החדשה עבור הנעלם $F(s)$

4. חזור לפונקציה המקורית $f(t)$ על ידי הפעלת ההתמרה ההפוכה על $F(s)$.

➤ דוגמאות

Daniel lecture notes page 96a

עבור $f(t) = 1$ נקבל:

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \lim_{M \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^M = \lim_{M \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{s} (-e^{-sM} + 1) \right] = \frac{1}{s}$$

אם $s > 0$ הגבול קיים ושווה ל- $\frac{1}{s}$, אחרת הגבול לא קיים.

לפיכך נקבל $\mathcal{L}[1](s) = \frac{1}{s}$ לכל $s > 0$.

עבור $f(t) = e^{at}$ כאשר $a \in \mathbb{R}$, נקבל:

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^{\infty} e^{at} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} dt = \lim_{M \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)} \right]_0^M = \frac{1}{s-a} \quad (s > a)$$

ושוב, אם $s > a$ הגבול קיים ושווה ל- $\frac{1}{s-a}$, אחרת הגבול לא קיים.

$$\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a} \quad (s > a)$$

למעשה, יש גרסה כללית יותר, לכל $z \in \mathbb{C}$:

$$\mathcal{L}[e^{zt}](s) = \frac{1}{s-z}, \quad s > \operatorname{Re} z$$

עבור $f(t) = \sin at$, לכל $a \in \mathbb{R}$ נקבל:

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^{\infty} \sin at \cdot e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \frac{e^{iat} - e^{-iat}}{2i} e^{-st} dt = \frac{1}{2i} \int_0^{\infty} e^{-(s-ia)t} dt - \frac{1}{2i} \int_0^{\infty} e^{-(s+ia)t} dt$$

ומהדוגמה הקודמת נקבל כי לכל $s > 0$.

$$\mathcal{L}[\sin(at)] = \frac{a}{s^2 + a^2} \quad (s > 0)$$

נבחין למעשה כי:

$$\mathcal{L}\left[\frac{e^{iat} - e^{-iat}}{2i}\right](s) = \mathcal{L}[\sin at](s) = \frac{1}{2i} \mathcal{L}[e^{iat}](s) - \frac{1}{2i} \mathcal{L}[e^{-iat}](s)$$

כלומר התמרת לפלס היא לינארית, כפי שבקרום נציין בתכונות.

באופן דומה נוכיח כי

$$\mathcal{L}[\cos(at)](s) = \frac{s}{s^2 + a^2}$$

דוגמא לפיתרון של משוואה דיפרנציאלית באמצעות התמרת לפלס

נראה למשל איך נראה פיתרון טיפוסי של בעיית התחלה באמצעות התמרת לפלס (את

הנוסחאות הדרושות נפתח בהמשך)

$$\begin{cases} y'' - y = 1 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

נפעיל את התמרת לפלס על שני אגפי המשוואה

$$\mathcal{L}[y''] - \mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[1]$$

השתמשנו בתכונת הליניאריות של התמרת לפלס. בהמשך נוכיח את הנוסחה הראשונה ברשימה הבאה (את שתי הנוסחאות הנוספות כבר ראינו למעלה)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[y''] &= s^2 \mathcal{L}[y] - sy(0) - y'(0) \\ \mathcal{L}[1] &= \frac{1}{s} \\ \mathcal{L}[e^{at}] &= \frac{1}{s-a} \end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[y''] - \mathcal{L}[y] &= s^2 \mathcal{L}[y] - sy(0) - sy'(0) - \mathcal{L}[y] \\ &= s^2 \mathcal{L}[y] - 0 - 1 - \mathcal{L}[y] \\ &= (s^2 - 1)\mathcal{L}[y] - 1 \\ &= \frac{1}{s} \end{aligned}$$

קיבלנו

$$\mathcal{L}[y(t)] = \frac{1}{s(s-1)} = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}$$

עכשיו נפעיל התמרת לפלס הפוכה

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] = e^t - 1$$

❖ התהליך הזה יובהר היטב בהמשך ...

סעיף 7.2: תכונות בסיסיות

❖ קיום התמרה

נתחיל בתכונה המבטיחה את קיום ההתמרה:

משפט 7.2 תהא f רציפה למקוטעין בקטע $[0, \infty)$. אם קיימים קבועים ממשיים a, K המקיימים $|f(t)| \leq Ke^{at}$ לכל $t \geq 0$ אז $\mathcal{L}[f](s)$ מוגדרת לכל $s > a$ וכן:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \mathcal{L}[f](s) = 0$$

הוכחה: מההגדרה $\mathcal{L}[f](s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$, מספיק להוכיח כי האינטגרנד אינטגרביילי בהחלט לכל $s > a$. אכן:

$$\int_0^\infty |f(t) e^{-st}| dt = \int_0^\infty e^{-st} |f(t)| dt \leq \int_0^\infty e^{-st} K e^{at} dt = K \int_0^\infty e^{-(s-a)t} dt = K \lim_{M \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)} \right]_0^M$$

והגבול קיים כאשר $s > a$. כעת, מהחישוב נקבל כי לכל $s > a$:

$$|\mathcal{L}[f](s)| \leq \frac{K}{s-a} \xrightarrow{s \rightarrow \infty} 0$$

מסוף ההוכחה אנו למדים שתחת תנאי המשפט מתקיים גם אי-השוויון לכל $s > a$

$$|\mathcal{L}[f](s)| \leq \frac{K}{s-a}$$

ליניאריות (סופרפוזיציה)

לכל f, g , רציפות למקוטעין בקטע $[0, \infty)$, ולכל $a, b \in \mathbb{C}$, ולכל s בתחום ההגדרה המשותף של $\mathcal{L}[f]$, $\mathcal{L}[g]$

$$\mathcal{L}[af + bg](s) = a\mathcal{L}[f](s) + b\mathcal{L}[g](s)$$

הוכחה: נובע מייד מההגדרת של התמרת לפלס והליניאריות של האינטגרל

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[af + bg](s) &= \int_0^\infty [af(t) + bg(t)] e^{-st} dt \\ &= a \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt + b \int_0^\infty g(t) e^{-st} dt \\ &= a\mathcal{L}[f](s) + b\mathcal{L}[g](s) \end{aligned}$$

כפל בקבוע (מתיחה/כיווץ בזמן)

תהי $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ רציפה למקוטעין. לכל ממשי $a > 0$

$$\mathcal{L}[f(at)](s) = \frac{1}{a} \mathcal{L}[f]\left(\frac{s}{a}\right)$$

Daniel lecture notes page 97b

הוכחה: מההגדרה:

$$\mathcal{L}[f(at)](s) = \int_0^{\infty} f(at) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} f(x) e^{-s \frac{x}{a}} \frac{1}{a} dx = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} f(x) e^{-\left(\frac{s}{a}\right)x} dx = \frac{1}{a} \mathcal{L}[f]\left(\frac{s}{a}\right)$$

נציב $x = at$

מבחינה פרקטית הנוסחה הבאה עדיפה (במיוחד עבור חישוב התמרה הפוכה)

$$\mathcal{L}[c f(at)](s) = \frac{c}{a} \mathcal{L}[f]\left(\frac{s}{a}\right)$$

כפל בפונקציה מעריכית

תהי $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ רציפה למקוטעין. לכל ממשי a

$$\mathcal{L}[e^{at} f(t)](s) = \mathcal{L}[f](s - a)$$

Daniel lecture notes page 98a

הוכחה: לכל $a \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$\mathcal{L}[e^{at} f(t)](s) = \int_0^{\infty} e^{at} f(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} f(t) e^{-(s-a)t} dt = \mathcal{L}[f](s - a)$$

נגזרת

תהי $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ רציפה ובעלת נגזרת רציפה למקוטעין ומסדר מעריכי בקטע $[0, \infty)$. אזי

$$\mathcal{L}[f'](s) = s \mathcal{L}[f] - f(0)$$

הערות

אם f אינה רציפה בנקודה $t = 0$ אז יש לרשום $\mathcal{L}[f'](s) = s \mathcal{L}[f] - f(0^+)$.

יש לשים לב לתנאים. הדרישה ש- f' תהיה מסדר מעריכי היא הכרחית, גם אם מניחים

ש- f מסדר מעריכי. אם f רציפה, בעלת נגזרת רציפה למקוטעין, ומסדר מעריכי אז אין הכרח שהנגזרת f' תהיה מסדר מעריכי! לדוגמא $f(t) = \sin(e^{t^2})$ היא מסדר מעריכי, אך הנגזרת שלה אינה כזו.

הוכחה: אם $f'(t)$ מסדר מעריכי אז קיימים קבועים חיוביים K, a כך ש-

$$-Ke^{au} \leq f'(u) \leq Ke^{au}$$

על ידי אינטגרציה פשוטה של כל האגפים ניתן לקבל שגם $f(t)$ מסדר מעריכי

$$-K \int_0^t e^{au} du \leq \int_0^t f'(u) du \leq K \int_0^t e^{au} du$$

לכן

$$-\frac{K}{a} e^{at} \Big|_0^t \leq f(t) - f(0) \leq \frac{K}{a} e^{at} \Big|_0^t$$

ונקבל

$$-\frac{K}{a} e^{at} \leq f(t) - f(0) \leq \frac{K}{a} e^{at}$$

לכן גם הפונקציה $f(t)$ היא מסדר מעריכי.

נבצע אינטגרציה בחלקים

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f'] &= \int_0^\infty e^{-st} f'(t) dt \\ &= e^{-st} f(t) \Big|_0^\infty + s \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \\ &= s \mathcal{L}[f] + e^{-st} f(t) \Big|_0^\infty \end{aligned}$$

החישוב של הביטוי האחרון צריך להתבצע באמצעות גבול

$$\begin{aligned} e^{-st} f(t) \Big|_0^\infty &= \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st} f(t) - \lim_{t \rightarrow 0^+} e^{-st} f(t) \\ &= 0 - \lim_{t \rightarrow 0^+} e^{-st} f(t) \\ &= -f(0) \end{aligned}$$

קיבלנו אם כן כי

$$\mathcal{L}[f'] = s \mathcal{L}[f] - f(0)$$

נגזרות גבוהות

באופן כללי: אם $f(t)$, $f'(t)$, $f''(t)$, ..., $f^{(n-1)}(t)$ רציפות, והפונקציה $f^{(n)}(t)$ רציפה למקוטעין ומסדר מעריכי בקטע $[0, \infty)$, אזי

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[f'] &= s\mathcal{L}[f] - f(0) \\
\mathcal{L}[f''] &= s^2\mathcal{L}[f] - sf(0) - f'(0) \\
\mathcal{L}[f'''] &= s^3\mathcal{L}[f] - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0) \\
&\vdots \quad \quad \quad \vdots \\
\mathcal{L}[f^{(n)}] &= s^n\mathcal{L}[f] - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)
\end{aligned}$$

הוכחה: על ידי שימוש חוזר בנוסחה הקודמת. למשל

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[f''] &= s\mathcal{L}[f'] - f'(0) \\
&= s[s\mathcal{L}[f] - f(0)] - f'(0) \\
&= s^2\mathcal{L}[f] - sf(0) - f'(0)
\end{aligned}$$

■

Ⓢ כפל ב- t

תהי $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ רציפה למקוטעין ומסדר מעריכי $|f(t)| \leq Ke^{at}$. אזי $\mathcal{L}[f](s)$ מוגדרת לכל $s > a$ ומתקיים

$$\mathcal{L}[tf(t)](s) = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}[f](s)$$

Daniel lecture notes page 99a

הוכחה: מההגדרה:

$$\frac{d}{ds}\mathcal{L}[f](s) = \frac{d}{ds} \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty -tf(t)e^{-st}dt = - \int_0^\infty tf(t)e^{-st}dt = -\mathcal{L}[tf(t)](s)$$

■

השתמשנו בכלל לייבניץ בכדי לבצע החלפת סדר גזירה ואינטגרציה.

Ⓢ כפל ב- t^n , $n \in \mathbb{N}$

תהי $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ רציפה למקוטעין ומסדר מעריכי $|f(t)| \leq Ke^{at}$. אזי $\mathcal{L}[f](s)$ מוגדרת לכל $s > a$ ומתקיים

$$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \mathcal{L}[f(s)]$$

הוכחת התכונה כמו במקרה $n = 1$.

❶ חלוקה ב- t

תהי $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ רציפה למקוטעין. אם $|f(t)| \leq Ke^{at}$, אזי $\frac{f(t)}{t}$ מוגדרת לכל $s > a$ ומתקיים

$$\mathcal{L} \left[\frac{f(t)}{t} \right] (s) = \int_s^\infty \mathcal{L} [f] (u) du$$

הוכחה:

$$\mathcal{L} [f(t)] (s) = \mathcal{L} \left[t \cdot \frac{1}{t} f(t) \right] (s) = -\frac{d}{ds} \mathcal{L} \left[\frac{f(t)}{t} \right]$$

נסמן $F(s) = \mathcal{L} [f(t)] (s)$. יוצא ש- $\mathcal{L} \left[\frac{f(t)}{t} \right]$ הוא פיתרון של המשוואה הדיפרנציאלית

$$\frac{d}{ds} L(s) = -F(s)$$

על פי המשפט היסודי של החדו"א, לכל M , $L(s) = \int_s^M F(u) du$ הוא פיתרון של המשוואה כי

$$\frac{d}{ds} L(s) = \frac{d}{ds} \int_s^M F(u) du = -\frac{d}{ds} \int_M^s F(u) du = F(s)$$

בנוסף על $L(s)$ לקיים את התנאי ההכרחי $\lim_{s \rightarrow \infty} L(s) = 0$. קל לראות שהפיתרון היחיד הוא $L(s) = \int_s^\infty F(u) du$. ■

דוגמאות לחישוב התמרת לפלס באמצעות התכונות

❶ חישוב התמרת לפלס של $f(t) = t^n$, $n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{L} [t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

הנוסחה תקפה לכל $s > 0$.

Daniel lecture notes page 100a

$$\mathcal{L} [t^n] (s) = \mathcal{L} [t^n \cdot 1] (s) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \mathcal{L} [1] (s) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \frac{1}{s} = (-1)^n \frac{(-1)^n n!}{s^{n+1}} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

❷ חישוב התמרת לפלס של $f(t) = e^{bt} \sin at$

$$\mathcal{L} [e^{bt} \sin at] = \frac{a}{(s-b)^2 + a^2}$$

הנוסחה תקפה עבור $s > b$.

שימוש בהתמרת לפלס לחישוב אינטגרלים. דוגמא: חשב את

$$\int_0^\infty \frac{t \cos t}{e^t} dt$$

פיתרון: ברור כי

$$\int_0^\infty \frac{t \cos t}{e^t} dt = \mathcal{L}[t \cos t] \quad (1)$$

לכן יש לחשב את $\mathcal{L}[t \cos t]$

$$\mathcal{L}[t \cos t] = -\frac{d}{ds} \mathcal{L}[\cos t] = -\frac{d}{ds} \left[\frac{s}{s^2 + 1} \right] = \frac{s^2 - 1}{(s^2 + 1)^2}$$

ולכן

$$\int_0^\infty \frac{t \cos t}{e^t} dt = \frac{s^2 - 1}{(s^2 + 1)^2} \Big|_{s=1} = 0$$

תהי $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ רציפה למקוטעין. אם $|f(t)| \leq Ke^{at}$, ותהי

$$g(t) = \int_0^t f(x) dx$$

אזי $\mathcal{L}[g(t)]$ קיימת לכל $s > a$, ובנוסף

$$\mathcal{L}[g(t)] = \frac{1}{s} \mathcal{L}[f(t)]$$

הוכחה:

Daniel lecture notes page 101a

$$\mathcal{L}[f](s) = \mathcal{L}[g'](s) = s\mathcal{L}[g](s) - g(0) = s\mathcal{L}[g](s) - \int_0^0 f(x) dx = s\mathcal{L}[g](s)$$

סעיף 7.3: שימושים למשוואות דיפרנציאליות

[Daniel lecture notes page 101b]

נראה כעת איך התמרת לפלס עוזרת למצוא פתרון פרטי למשוואה דיפרנציאלית רגילות עם מקדמים קבועים. לשם כך נציין כי מוכיחים שיש התמרת לפלס הפוכה המסומנת ב- $\mathcal{L}^{-1}$ שהיא גם כן לינארית. אנחנו נשתמש בה באופן פורמלי ולא חישובי ונבצע התמרה הפוכה לפונקציות שאנו יודעים מהו המקור.

[Daniel lecture notes page 102a]

משוואה לא הומוגנית

$$1. \text{ נמצא פתרון פרטי למשוואה: } \begin{cases} y''(t) + 4y'(t) + 5y(t) = 10e^t & 0 < t \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

נפעיל התמרת לפלס על שני האגפים ונקבל:

$$\mathcal{L}[y'' + 4y' + 5y] = \mathcal{L}[10e^t] = \frac{10}{s-1}$$

מתכונת הלינאריות ונוסחת הנגזרת נקבל:

$$\frac{10}{s-1} = \mathcal{L}[y''] + 4\mathcal{L}[y'] + 5\mathcal{L}[y] = s^2\mathcal{L}[y] - sy(0) - y'(0) + 4(s\mathcal{L}[y] - y(0)) + 5\mathcal{L}[y]$$

נציב את תנאי ההתחלה:

$$\frac{10}{s-1} = s^2\mathcal{L}[y] - s - 2 + 4(s\mathcal{L}[y] - 1) + 5\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[y](s^2 + 4s + 5) - s - 6$$

וקיבלנו כי:

$$\mathcal{L}[y] = \frac{s+6}{s^2+4s+5} + \frac{10}{(s-1)(s^2+4s+5)} = \frac{s^2+5s+4}{(s-1)(s^2+4s+5)}$$

[Daniel lecture notes page 103a]

נשלים את המכנה לריבוע ונקבל:

$$\mathcal{L}[y](s) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{(s+2)^2+1}$$

לפיכך:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right](t) + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+2)^2+1}\right](t)$$

כזכור ראינו כי $\mathcal{L}[e^{at}](s) = \frac{1}{s-a}$ ו- $\mathcal{L}[e^{bt}\sin(at)](s) = \frac{a}{(s-b)^2+a^2}$ לכל $s > a$ ולכל $b \in \mathbb{R}$, לכן:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right](t) = e^t \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+2)^2+1}\right](t) = e^{-2t}\sin(t)$$

וקיבלנו את הפתרון הפרטי:

$$y(t) = e^t + e^{-2t}\sin(t)$$

סעיף 7.4: פונקציית הביסייד (Oliver Heaviside 1850-1925)

Daniel lecture notes page 104a

הגדרה 7.3 לכל קבוע ממשי $c \geq 0$, הפונקציה:

$$u_c(t) = \begin{cases} 1 & c \leq t \\ 0 & 0 \leq t < c \end{cases}$$

נקראת פונקציית הביסייד (Heaviside).

Daniel lecture notes page 105a

קל לראות כי התמרת לפלס של u_c היא:

$$\mathcal{L}[u_c](s) = \int_0^{\infty} u_c(t) e^{-st} dt = \int_c^{\infty} e^{-st} dt = \frac{e^{-cs}}{s}$$

נסיק רישום נוסף לתכונת ההזזה:

טענה 7.4 אם $\mathcal{L}[f](s)$ מוגדרת לכל $s > a$ אז לכל $c > 0$ קבוע, מתקיים:

$$\mathcal{L}[u_c(t) f(t-c)](s) = e^{-sc} \mathcal{L}[f](s) \quad (s > a)$$

(“הזזה בזמן שקולה לסיבוב בתדר”)

Daniel lecture notes page 105b

הוכחה: לכל $s > a$ מתקיים:

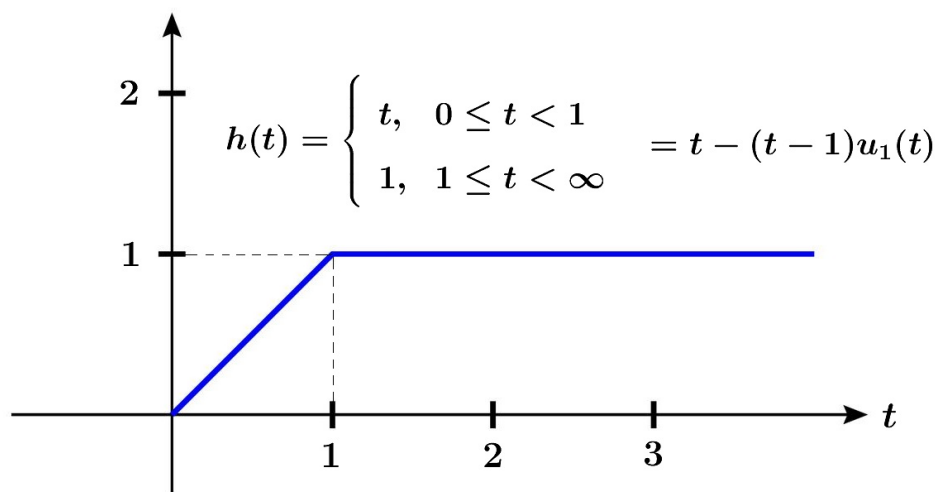
$$\begin{aligned} \mathcal{L}[u_c(t) f(t-c)](s) &= \int_0^{\infty} u_c(t) f(t-c) e^{-st} dt = \int_c^{\infty} f(t-c) e^{-st} dt \\ &= \int_0^{\infty} f(x) e^{-s(x+c)} dx = \int_0^{\infty} e^{-sc} f(x) e^{-sx} dx \\ &= e^{-sc} \int_0^{\infty} f(x) e^{-sx} dx = e^{-sc} \mathcal{L}[f](s) \end{aligned}$$

Daniel lecture notes page 105c

$$1. \text{ לכל } 0 < c < d, \text{ התמרת לפלס של } f(t) = \begin{cases} 1 & t \in [c, d) \\ 0 & t \notin [c, d) \end{cases} \text{ היא:}$$

$$\mathcal{L}[f](s) = \mathcal{L}[u_c](s) - \mathcal{L}[u_d](s) = \frac{e^{-cs} - e^{-ds}}{s}$$

2. נחשב את התמרת לפלס של הפונקציה $h(t)$ המתוארת בשרטוט 11



איור 11: ייצוג הפונקציה $h(t)$ באמצעות פונקציית הביסיד

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[h(t)] &= \mathcal{L}[t - (t-1)u_1(t)] = \mathcal{L}[t] - \mathcal{L}[(t-1)u_1(t)] \\ &= \frac{1}{s^2} - e^{-s} \mathcal{L}[t] = \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s^2} \end{aligned}$$

3. נפתור את המשוואה:

$$\begin{cases} y''(t) + y'(t) = h(t) & t > 0 \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

$$h(t) = \begin{cases} 1 & 1 \leq t \\ t & 0 \leq t < 1 \end{cases} \quad \text{כאשר}$$

מדוגמה קודמת, $h(t) = t \cdot u_0(t) - (t-1)u_1(t)$ וכך $\mathcal{L}[h](s) = \frac{1-e^{-s}}{s^2}$. נפעיל את התמרת לפלס על שני האגפים ונקבל:

$$\mathcal{L}[y'' + y'](s) = \mathcal{L}[h](s) = \frac{1-e^{-s}}{s^2}$$

מלינאריות ותכונת הנגזרת נקבל:

$$\mathcal{L}[y'' + y'](s) = s^2 \mathcal{L}[y](s) - sy'(0) - y(0) + s \mathcal{L}[y](s) - y(0) = s^2 \mathcal{L}[y](s) + s \mathcal{L}[y](s)$$

ולכן:

$$\mathcal{L}[y](s) = \frac{1-e^{-s}}{s^3(s+1)} = \frac{1}{s^3(s+1)} - \frac{e^{-s}}{s^3(s+1)}$$

נפעיל את התמרת לפלס ההפוכה:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^3(s+1)} \right] (t) - \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{e^{-s}}{s^3(s+1)} \right] (t)$$

מפירוק לשברים חלקיים נקבל $\frac{1}{s^3(s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^3} - \frac{1}{s+1}$ ומכך ש:

$$\mathcal{L}[1](s) = \frac{1}{s} \quad \mathcal{L}[t](s) = \frac{1}{s^2} \quad \mathcal{L}\left[\frac{1}{2}t^2\right](s) = \frac{1}{s^3} \quad \mathcal{L}[e^{-t}](s) = \frac{1}{s+1}$$

נסיק כי:

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^3(s+1)} \right] (t) = 1 - t + \frac{t^2}{2} - e^{-t}$$

עבור הגורם השני, נסמן $f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^3(s+1)} \right] (t)$ ומטענה 7.4 נקבל:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{e^{-s}}{s^3(s+1)} \right] (t) &= u_1(t) \cdot f(t-1) \\ &= \left(1 - (t-1) + \frac{(t-1)^2}{2} - e^{-(t-1)} \right) u_1(t) \\ &= \left(\frac{t^2}{2} - 2t + \frac{5}{2} - e^{1-t} \right) u_1(t) \end{aligned}$$

לסיכום:

$$y(t) = 1 - t + \frac{t^2}{2} - e^{-t} - \left(\frac{t^2}{2} - 2t + \frac{5}{2} - e^{1-t} \right) u_1(t)$$

סעיף 7.5: קונבולוציה

Daniel lecture notes page 108a

הגדרה 7.5 תהיינה f, g פונקציות עם תחום הגדרה $[0, \infty)$ אז לכל $t \geq 0$ נגדיר:

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-y) g(y) dy$$

לכל $t \geq 0$ עבורו האינטגרל קיים.

Daniel lecture notes page 109a

טענה 7.6 תהיינה f, g, h עם תחום הגדרה $[0, \infty)$ אז בכל מקום בו קיימת הקונבולוציה מתקיים:

1. קיבוציות: $f * (g * h) = (f * g) * h$

2. חילופיות: $f * g = g * f$

3. לינאריות: לכל $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ מתקיים $f * (\alpha g + \beta h) = \alpha (f * g) + \beta (f * h)$

Daniel lecture notes page 109b

משפט הקונבולוציה דומה למשפט בהתמרת פורייה, פרט לקבוע 2π .

משפט 7.7 (משפט הקונבולוציה) יהיו f, g עם תחום הגדרה $[0, \infty)$. נניח כי קיימים קבועים a, K_1, K_2 כך שלכל $t \geq 0$ מתקיים $|g(t)| \leq K_2 e^{at}, |f(t)| \leq K_1 e^{at}$ אז:

1. לכל $t \geq 0$ מתקיים: $|(f * g)(t)| \leq K_1 K_2 t e^{at}$

2. לכל $s > a$ התמרת לפס של $f * g$ קיימת ומתקיים:

$$\mathcal{L}[f * g](s) = \mathcal{L}[f](s) \cdot \mathcal{L}[g](s)$$

הערה מהמשפט נובע מיידית כי $\mathcal{L}^{-1}[\mathcal{L}[f](s) \cdot \mathcal{L}[g](s)](t) = (f * g)(t)$

השימוש דומה לזה של קונבולוציה בהתמרת פורייה.

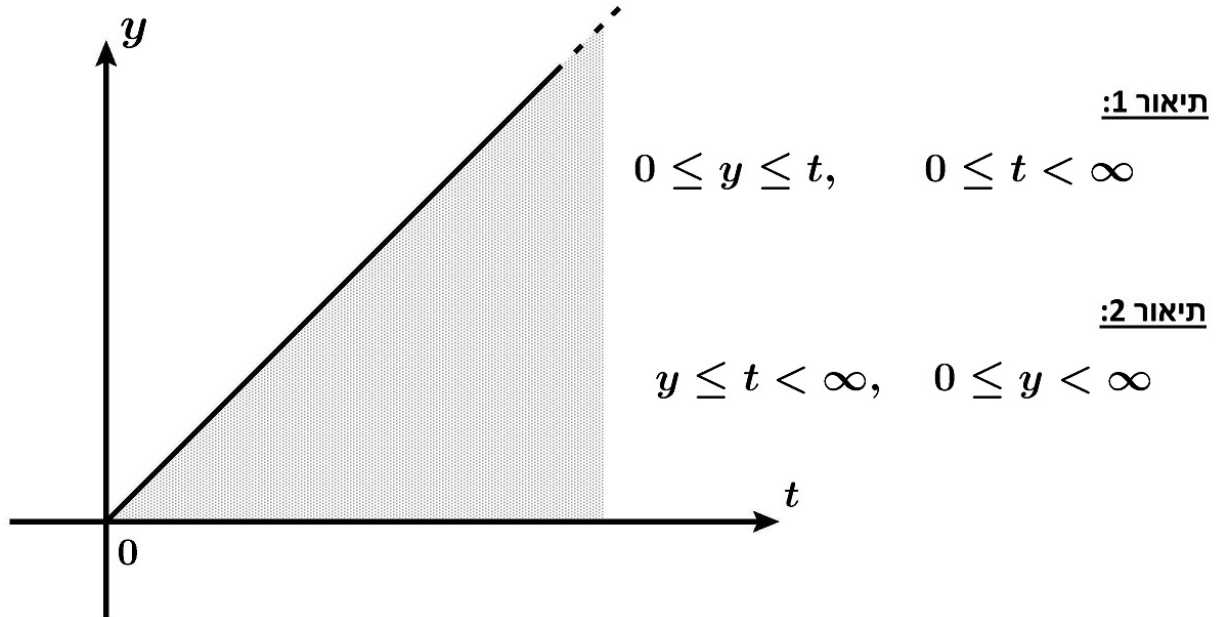
הוכחה: החלק הראשון פשוט:

$$\begin{aligned} |(f * g)(t)| &\leq \int_0^t |f(t-y)| \cdot |g(y)| dy \leq \int_0^t K_1 e^{a(t-y)} K_2 e^{ay} dy \\ &\leq K_1 K_2 e^{at} \int_0^t dy = K_1 K_2 t e^{at} \leq K_1 K_2 e^{(a+1)t} \end{aligned}$$

חלק 2: על פי הגדרת התמרת לפלס

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[(f * g)(t)] &= \mathcal{L}\left[\int_0^t f(t-y)g(y)dy\right] = \int_0^\infty e^{-st} \left(\int_0^t f(t-y)g(y)dy\right) dt \\ &= \int_0^\infty \int_0^t e^{-st} f(t-y)g(y) dy dt\end{aligned}$$

האינטגרציה הכפולה מתבצעת מעל התחום המתואר בתרשים הבא



איור 12: תחום האינטגרציה של אינטגרל הקונבולוציה במישור ה- ty עם שני תיאורים שונים

על פי התרשים ניתן לראות כי את תחום האינטגרציה ניתן להגדיר בשני אופנים שונים, ולכן את האינטגרל הכפול הקודם ניתן לחשב גם באופן הבא:

$$\int_0^\infty \int_y^\infty e^{-st} f(t-y)g(y) dt dy$$

או

$$\int_0^\infty g(y) \left(\int_y^\infty e^{-st} f(t-y) dt \right) dy$$

נבצע החלפת משתנה $u = t - y$ בביטוי $\int_y^\infty f(t-y) dt$

$$\int_y^\infty e^{-st} f(t-y) dt = \int_0^\infty e^{-s(u+y)} f(u) du$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} \left[\int_0^t f(t-y)g(y)dy \right] &= \int_0^\infty g(y) \left(\int_0^\infty e^{-s(u+y)} f(u) du \right) dy \\
&= \int_0^\infty e^{-sy} g(y) \left(\int_0^\infty e^{-su} f(u) du \right) dy \\
&= \left(\int_0^\infty e^{-su} f(u) du \right) \left(\int_0^\infty e^{-sy} g(y) dy \right) \\
&= \mathcal{L}[f(t)] \mathcal{L}[g(t)]
\end{aligned}$$

שימושים לפיתרון משוואות אינטגרליות

❖ התמרות פורייה ולפלס מסייעות לפעמים בפיתרון של משוואות אינטגרליות. משוואה אינטגרלית טיפוסית שניתן לפתור על ידי התמרת לפלס היא

$$\int_0^t f(t-y)g(y) dy = h(t)$$

כאשר g, h , הן פונקציות נתונות והפונקציה הנעלמת היא f .

❖ **דוגמא 1:** פתור את המשוואה האינטגרלית

$$\int_0^t f(y) \cos(y-t) dy = t \sin t$$

Daniel lecture notes page 112a

נבחין כי:

$$\int_0^t f(y) \cos(y-t) dy = \int_0^t \cos(t-y) f(y) dy = (\cos(x) * f(x))(t)$$

נפעיל את התמרת לפלס על שני האגפים וממשפט הקונבולוציה נקבל:

$$\mathcal{L}[f](s) \cdot \mathcal{L}[\cos t](s) = \mathcal{L}[t \cdot \sin t](s) = -\frac{d}{ds} \mathcal{L}[\sin t](s) = -\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s^2+1} \right) = \frac{2s}{(s^2+1)^2}$$

מכך ש- $\mathcal{L}[\cos t](s) = \frac{s}{s^2+1}$ נקבל:

$$\mathcal{L}[f](s) = \frac{2s}{(s^2+1)^2} \cdot \frac{s^2+1}{s} = \frac{2}{s^2+1}$$

ומכאן:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{2}{s^2+1} \right] (t) = 2 \sin t$$

דוגמא 2: פתור את המשוואה האינטגרלית

$$\int_0^t e^{t-y} f(y) dy = f(t) - 1$$

Daniel lecture notes page 113a

$$(e^x * f(x))(t) = \int_0^t e^{t-y} f(y) dy = f(t) - t \quad \text{נבחין כי}$$

נפעיל את התמרת לפלס על שני האגפים וממשפט הקונבולוציה נקבל:

$$\mathcal{L}[e^t](s) \cdot \mathcal{L}[f](s) = \mathcal{L}[f](s) - \mathcal{L}[1](s)$$

מכאן:

$$\frac{1}{s-1} \cdot \mathcal{L}[f](s) = \mathcal{L}[f](s) - \frac{1}{s}$$

נבודד ונבצע פירוק לשברים חלקיים:

$$\mathcal{L}[f](s) = \frac{s-1}{s(s-2)} = \frac{\frac{1}{2}}{(s-2)} + \frac{\frac{1}{2}}{s}$$

נפעיל את ההתמרה ההפוכה ונקבל:

$$f(t) = \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s-2)} \right] (t) + \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} \right] (t) = \frac{1}{2} e^{2t} + \frac{1}{2}$$