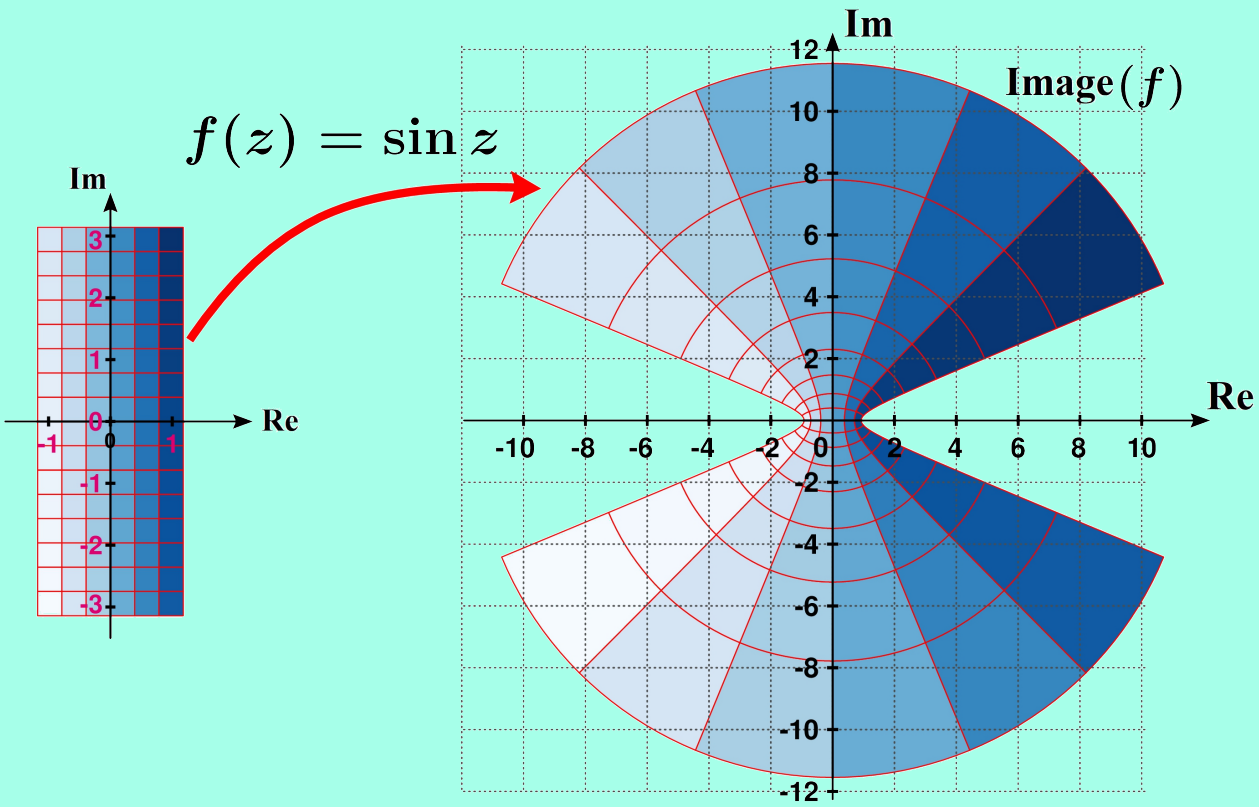
פונקציות מרוכבות



Complex Functions Course



קישור קבוע לגירסה הכי מעודכנת של החוברת: https://samyzaf.com/technion/cfit/cf.pdf

מחבר: סמי זעפרני

גירסה 2.53 - ינואר 2025

הקדמה

החוברת מקיפה את עיקר חומר הלימוד בקורס אקדמי בנושא פונקציות מרוכבות כפי שהוא בדרך כלל נלמד במוסדות להשכלה גבוהה בארץ. מטרתה לסייע לסטודנט הישראלי באשר הוא ללמוד את נושא הפונקציות המרוכבות במסגרות האקדמיות השונות (וגם מחוץ להן). היא מתבססת על נסיון ארוך בהוראת קורסים דומים בטכניון ובאוניברסיטאות. היא נכתבה בעיצומה של תקופת הקורונה, מתוך רצון לסייע במעט לתלמידים ללמוד את הנושא מהבית, ולהשלים פערים שנוצרו עקב ביטול ההרצאות הפרונטליות והקשיים בלימוד החומר באמצעות מערכת הזום. נעשה מאמץ מיוחד להנגיש את החומר בצורה ברורה ומקוצרת (באמצעות "ציוצים").

כמו כן, השתדלנו להתאים אותה לתוכניות הלימודים העדכניות במוסדות העיקריים להשכלה גבוהה בארץ, ולהעשיר אותה בקישורים לחומרים נוספים ברשת האינטרנט (טקסט ווידאו). החוברת נכתבה כתרומה לקהילה וללא מטרות רווח. ניתנת בזאת רשות לכל המעוניין להוריד את החוברת למחשבו או לכל התקן אלקטרוני אחר, להדפיסה, לאכסנה במאגרי מידע כלשהם, ולהפיצה בכל אמצעי אחר (למטרות לימוד והוראה) כל עוד לא נעשה בה שימוש מסחרי שמפר זכויות יוצרים (אין לגבות תשלום בשום מצב).

תודה מיוחדת לד"ר דניאל רבייב מהפקולטה למתמטיקה בטכניון אשר חוברת ההרצאות המעולה שלו בקורס פונקציות מרוכבות והתמרות אינטגרליות (104221) והגישה הייחודית והחדשנית שלו לנושא זה סייעה לנו מאוד, היוותה השראה, ושימשה בסיס לרוח החוברת. תודה רבה גם לכל תלמידי הקורס של סמסטר חורף תשע"ט, על תיקוני שגיאות והערות מועילות לטיוטות הראשונות של כמה מהפרקים של החוברת ששימשו בקורס זה.

החוברת הנוכחית אינה מכסה את נושא ההתמרות האינטגרליות של הקורס הטכניוני הנ"ל. נושאי התמרת פורייה ולפלס מכוסים בספר **טורי פורייה והתמרות אינטגרליות** מאת המחבר ופרופסור אלן פינקוס, שאותו ניתן להשיג דרך הקישור הבא

טורי פורייה והתמרות אינטגרליות

חלק מהמשפטים, הנוסחאות, וההגדרות, המופיעות בחוברת זו מתבסס על חומר הנלמד בקורסי חדו"א או אינפי למשתנה ממשי יחיד או למספר משתנים ממשיים. להלן קישור לחוברת הרצאות של קורס חדו"א 2 שניתן להוריד מהרשת

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2 - חוברת הרצאות

הפורמט של החוברת מוכוון בעיקר עבור קריאה נוחה באמצעות טבלטים והתקנים אלקטרוניים למיניהם הרבים (ובכך אולי להציל כמה עצים על כדור הארץ). הגופן הגדול, הקישורים, והתימצות אמורים גם להקל על הקריאה ולחסוך זמן. נשמח מאוד לקבל הערות, תיקונים, הצעות שיפור, ופתרונות לתרגילים (אשר כרגע יש לחלק קטן מהתרגילים בלבד, אך בכוונתנו להוסיף בגירסאות הבאות של החוברת).

הדרך היחידה והיעילה ללימוד מתמטיקה היא בשינון החומר יחד עם פתרון מספר רב של תרגילים. בסוף כל פרק נכללה קבוצת תרגילים מתאימה לנושאי הפרק. נעשה מאמץ מיוחד ללקט ולחבר תרגילים

מעניינים ככל האפשר וברמת קושי מגוונת ככל האפשר. לצד חלק גדול של התרגילים נוסף סימון המציין את אופי וסוג הקושי שלהם. טבלה המפרטת את משמעות הסימונים נמצאת בסוף החוברת. לרוב התרגילים הקשים מצורפת הדרכה הכוללת רמזים וקווים כלליים לפתרון אפשרי, ובמקרים רבים יש גם תשובות סופיות. מומלץ בהתחלה לנסות לפתור ללא העזרה הזו, ורק לאחר מכן לנסות להיעזר בהדרכה. נשמח מאוד לקבל הערות, תיקונים, והצעות לתרגילים נוספים (דואר אלקטרוני נמצא בתחתית כל דף). פתרונות מלאים של תרגילים יתקבלו בשמחה ובברכה, ובמידה ויצטברו לכדי כמות משביעת רצון, יתפרסמו בחוברת פתרונות מתאימה.

מרבית הטקסט בחוברת זו מנוסח בלשון זכר מטעמי נוחות בלבד, אך כמובן כל האמור מוכוון לנשים וגברים כאחד, ואנו מצרים על כך שאין בידנו פתרון יותר משביע רצון.

החוברת הנוכחית מתפרסמת בכמה אתרי אינטרנט שונים, אך מתעדכנת לעיתים קרובות. לא כל אתרי האינטרנט מתעדכנים באותו קצב, ובחלקם קיימות גירסאות ישנות של החוברת. ניתן להוריד את הגירסה הכי מעודכנת של החוברת על ידי לחיצה על הקישור הבא:

קישור לגירסה האחרונה של חוברת פונקציות מרוכבות

אנו מקווים מאוד שהחומר מובא בצורה שתאפשר למורים ומתרגלים להעביר את הקורס בצורה מיטבית, ומאחלים הצלחה לכל התלמידים הנעזרים בחוברת בלימודיהם.

סמי זעפרני, ינואר 2023

גירסאות

2.00: החל מגירסה 2.00 התבצע אירגון מחדש של פרק 5 (אינטגרציה). ההגבלה של המשפטים העיקריים בנושא (קושי-גורסה, נוסחת האינטגרל, ונוסחת הנגזרת של קושי, וכדומה) למסלולים פשוטים בלבד היא הגבלה מלאכותית ובלתי הגיונית, ולא ברור מדוע רוב ספרי הלימוד נוקטים בה. ההגבלה הזו גם מסרבלת מאוד את ההוכחות של רוב המשפטים בנושא האינטגרציה. רוב המשפטים העיקריים בנושא נכונים גם עבור מסלולים לא-פשוטים (כאלה שחותכים את עצמם בנקודות ביניים), ואין שום סיבה להסתיר את העובדה הזו מהתלמיד ולהגביל את השימוש בה. מסתבר שההוכחות של משפט קושי-גורסה עבור מסלולים לא-פשוטים בספרי הלימוד והמאמרים הנגישים ברשת האינטרנט היו ברוב המקרים חלקיות מאוד או מלאות אך ארוכות מאוד וחורגת ממסגרת הקורס. לאחר מאמצי חיפוש מאוד ממושכים לא הצלחנו למצוא הוכחה מתאימה לרמת הקורס, אך מאמצי החיפוש הובילו אותנו להצליח "לבשל" הוכחה סבירה ויפה על ידי הצלבת כמה רעיונות יפים ממספר מקורות. נדרש אומנם מאמץ מסוים בכדי לצלוח את הוכחת המשפט הזה, אבל הרווח מכך משתלם מאוד. כל הוכחות המשפטים הבאים אחריו מתקצרות ונעשות הרבה יותר מדויקות ומלאות מהגירסה הישנה. אנו מקווים שלא נפלה שום טעות בהוכחה שלנו, ונודה מאוד לכל המורים והתלמידים אם יואילו לעבור עליה בזהירות ולדווח לנו על שגיאות אפשריות.

2.20: פתרונות לתרגילים יתווספו בהדרגה במהלך הזמן. חלקם תשובות סופיות באמצעות **Python/Sympy**, תשובות מלאות שהושגו על ידי ChatGPT, ותשובות מלאות מתוך מקורות שונים. הדרך ארוכה ועזרת התלמידים מתבקשת. קישור למחברת יופיטר בסוף רשימת התרגילים של כל פרק.

2.53: נוספו פתרונות חלקיים עבור התרגילים בפרקים 3-7. התחלה צנועה, אך הדרך עוד ארוכה. תודה רבה ליפתח מעיין על תיקונים, קישורים, והצעות שיפור להמשך.

סמי זעפרני, ינואר 2025

תוכן עניינים

1 המספרים המרוכבים 8

1.1 היסטוריה של מערכת המספרים 8

1.2 שדה המספרים המרוכבים: תכונות יסוד 13

1.3 הצגה קוטבית של מספר מרוכב 20

נוסחה לחישוב הארגומנט 22

נוסחת אוילר 22

נוסחת כפל קוטבי 24

נוסחת דה-מואבר (Abraham de Moivre 1667-1754) 26

נוסחת חילוק קוטבי 27

שורשי היחידה 27

שורשי מספר מרוכב z 29

1.4 פונקציית הארגומנט והענף הראשי שלה 29

1.5 קישורים למקורות ברשת האינטרנט 33

תרגילים לפרק 1 34

2 קבוצות של מספרים מרוכבים 40

2.1 קבוצות יסודיות במישור המרוכב 40

קו ישר 40

חצי מישור 42

רביע (quadrant) 43

רצועה אינסופית 44

מלבן 44

עיגול (Disk) ומעגל (Circle) 45

גיזרת עיגול 45

אליפסה 46

מישור מחורר 46

טבעת 47
קרן 47
קטע (segment) 48
קו שבור (polyline) 48
מסלולים 50
תכונות יסוד של קבוצות 52
2.2 טופולוגיה במישור המרוכב 54
2.3 קשירות 64
2.4 סדרות של מספרים מרוכבים 72
תרגילים לפרק 2 76

3 פונקציות מרוכבות 84
3.1 מושגי יסוד 84
פונקציה רב-ערכית וענפים שלה 86
3.2 הפונקציות האלמנטריות 87
הפונקציה e^z 89
פונקציית הלוגריתם $\log z$ 90
פונקציות החזקה z^c 93
הפונקציות המעריכיות c^z 94
הפונקציות הטריגונומטריות 95
זהויות יסודיות 96
פונקציות טריגונומטריות והיפרבוליות הפוכות 98
3.3 גבול ורציפות של פונקציה מרוכבת 99
רציפות 103
פונקציה רציפה מעל קבוצה קומפקטית 109
גבול באינסוף 110
גבול אינסופי בנקודה רגילה 112
3.4 גזירות ואנליטיות 113
תרגילים לפרק 3 119

4 פונקציות אנליטיות 124
4.1 משוואות קושי-רימן 124
הערות 129
מסקנות 130

4.2 נגזרות של פונקציות אלמנטריות 132
הפונקציה e^z 132
הפונקציות הטריגונומטריות 133
פונקציית הלוגריתם $\log z$ 134
פונקציות טריגונומטריות הפוכות 134
פונקציות החזקה z^c 135
הפונקציות המעריכיות c^z 135
ענפים אנליטיים 136
4.3 פונקציות הרמוניות 139
4.4 העתקות קונפורמיות 142
הערות 146
קיום הגבול $\lim_{z\to z_0} \frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|}$ 152
4.5 הספרה של רימן 154
4.6 העתקות מביוס (Möbius) 160
שימור היחס הכפול 167
4.7 קישורים למקורות ברשת האינטרנט 172
קישורים למקורות בנושאי גזירות והעתקות קונפורמיות 172
קישורים למקורות בנושא הספרה של רימן 173
תרגילים לפרק 4 173

5 אינטגרציה 178
5.1 אינטגרציה של פונקציה מרוכבת מעל קטע ממשי 178
אורך מסלול 181
5.2 אינטגרציה של פונקציות מרוכבות לאורך מסלול 182
5.3 משפט קושי-גורסה (Cauchy-Goursat) 188
א. הוכחת משפט קושי-גורסה עבור עיגול או מלבן D 190
ב. הוכחת משפט קושי-גורסה עבור מסלול משולש 191
ג. הוכחת משפט קושי-גורסה עבור מצולע 193
ד. הוכחת משפט קושי-גורסה עבור מסלול סגור חלק למקוטעין 194
5.4 נוסחת האינטגרל של קושי ומסקנותיה 197
שיטת "הגשר" לאיחוד מסלולים 197
נוסחת האינטגרל של קושי (Cauchy) 203
משפט ליוביל (Joseph Liouville 1809-1882) 212
5.5 משפט מוררה (Giacinto Morera 1856-1909) 213

5.6 עקרון המקסימום 217
5.7 נספח: כלל לייבניץ עבור אינטגרל של פונקציה מרוכבת 220
תרגילים לפרק 5 223

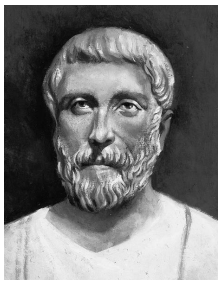
6 טורים 234
6.1 טורי מספרים 234
מבחן התבדרות יסודי 236
הקריטריון של קושי להתכנסות טור של מספרים מרוכבים 236
התכנסות בהחלט והתכנסות בתנאי 237
מבחן טורי-p 239
מבחן ההשוואה (Comparison Test) 239
מבחן המנה של דאלמבר (Jean Le Rond d'Alembert 1717-1783) 240
מבחן השורש של קושי (Cauchy) 240
6.2 סדרות של פונקציות 241
6.3 טורי פונקציות 247
מבחן-M של וויארשטראס (Weirestrass M-Test) 249
6.4 טורי חזקות 252
תחום התכנסות של טור חזקות 254
גזירה ואינטגרציה של טור חזקות 259
6.5 פיתוח פונקציה לטור חזקות (Taylor) 263
6.6 טורי לורן (Pierre Alphonse Laurent 1813-1854) 269
תרגילים לפרק 6 279

7 שימושים 287
7.1 שורשים ונקודות סינגולריות 287
7.2 משפט השארית (Residue Theorem) 297
7.3 חישוב אינטגרלים מוכללים 304
7.4 עקרון הארגומנט ומשפט רושה (Eugène Rouché 1832-1910) 310
7.5 שימושים נוספים 314
7.6 כלי תוכנה ואפליקציות 321
7.7 תם אך לא נשלם 327
תרגילים לפרק 7 327
7.8 מפתח סימון תרגילים 340

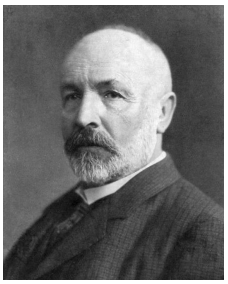
פרק 1

המספרים המרוכבים

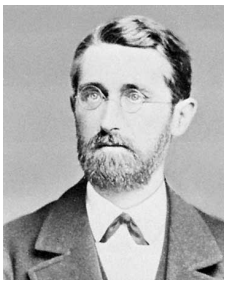
1.1 היסטוריה של מערכת המספרים



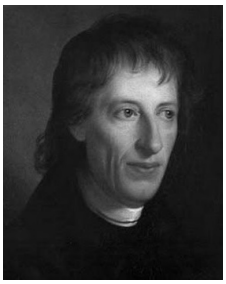
איור 1.1: Pythagoras
570BC-495BC



איור 1.2: Georg Cantor
1845-1918



איור 1.3: Richard Dedekind
1831-1916



איור 1.4: Bernard Bolzano
1781-1848

- המספרים הטבעיים והמספרים הרציונליים (שברים) היו ידועים כבר למצרים ולבבלים הקדומים, ונעשו בהם שימושים שונים (כגון בבניית הפירמידות). המספרים האלה קיבלו ייצוג וטיפול יותר מדעי בספרות היוונית של המאה השישית לפני הספירה ובהמשך.
- המספרים האי-רציונליים התגלו על ידי פיתגורס במאה השישית לפני הספירה, אך לא זכו למעמד שווה לזה של המספרים הרציונליים ונחשבו לחידתיים ובלתי מובנים. רק לאחר כ־2500 שנים ניתנה הגדרה מתימטית למהו מספר אי-רציונלי על ידי המתמטיקאים גאורג קנטור, ריכרד דדקינד, וברנרד בולצאנו, והם נכללו כמספרים ממשיים שווי מעמד.
- מושג המספר אפס הופיע בסביבות המאה החמישית בתרבות ההודית והערבית של אותם ימים, ונחשב לאחת ההמצאות הכי חשובות בהיסטוריה האנושית. הוא נכנס לשימוש באירופה לאחר הכיבוש המוסלמי של ספרד בסביבות המאה ה־11 והתקבל שם בקושי וחשדנות רבה (אנשי דת התייחסו אליו כמספר שטני). הסימון הסופי שלו (עיגול ריק) נקבע



איור 1.8: Diophantus of Alexandria approx. 210-280



איור 1.7: Hero of Alexandria 10-70



איור 1.6: Gerolamo Cardano 1501-1576



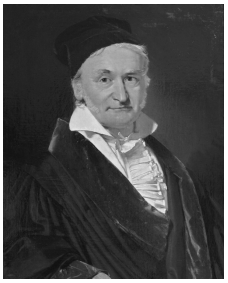
איור 1.5: Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi 780-850

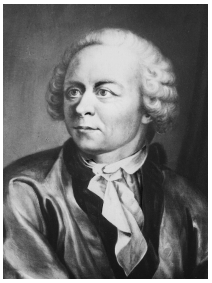
על ידי המתמטיקאי הפרסי מוחמד איבן-מוסא אלחואריזמי (**محمد بن موسى خوارزمى**) במאה התשיעית לספירה. אלחואריזמי נזקק לו להמצאת ענף האלגברה, במיוחד עבור הפיתוח של האלגוריתמים לכפל וחילוק של מספרים שלמים ומספרים רציונליים. המונח "אלגוריתם" נגזר משיבוש שמו של אלחואריזמי.

- **המספרים השליליים:** המתמטיקאי היווני דיופנטוס (Diophantus) שחי במאה השלישית לספירה, ואשר ייסוד תורת המספרים מיוחס לו, התייחס למשוואה $4x+20=0$ כמשוואה אבסורדית חסרת פתרון. למרות זאת, באותו זמן המספרים השליליים הוצגו לראשונה בספרות המתימטית הסינית. המתמטיקאים הסינים של אותה תקופה הכירו את הכללים היסודיים של פעולות החיבור והחיסור במספרים חיוביים ושליליים, וגם ידעו לפתור מערכת של משוואות עם פתרונות שליליים. במאה השביעית לספירה, ההודים השתמשו במספרים שליליים בכדי לייצג חוב. הרעיון עבר למתמטיקאים מוסלמים במאה התשיעית לספירה אבל לא נעשה בו שימוש משמעותי. למשל המתמטיקאי אלחואריזמי לא הזכיר אותם בספר האלגברה שלו (הוא נחשב למייסד התחום). רק במאה ה־12 החלו מתמטיקאים מוסלמים לנסח חוקים אריתמטיים כמו $(a\pm b)\cdot(c\pm d)$ ואפילו לקבל פתרונות שליליים של פולינומים.
- המתמטיקאים האירופיים התנגדו לרעיון של מספרים שליליים עד למאה ה־17, אך למרות זאת גם במהלך המאה ה־18 היה נהוג להתעלם מפתרונות שליליים של משוואות כפתרונות חסרי מובן. המתמטיקאי הראשון ששילב מספרים שליליים כחלק מהותי של השיטה המתימטית שבנה היה גוטפריד וילהלם לייבניץ (1646-1716), ולאחר פירסום מחקריו בנושא החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי, השימוש במספרים שליליים בכל תחומי המדע הפך להיות טבעי ונפוץ.
- המספר המדומה ("דמיוני") i הוגדר בשם זה במאה ה־17 מתוך זילזול ויחס שלילי כלפי הרעיון. הוא נחשב לאובייקט פיקטיבי וחסר כל תועלת ולפעמים כסוג של בדיחה (בדומה למספרים האי-רציונליים, השליליים, 0 לפניו).
- למרות שישנן ראיות לכך שהרעיון של המספרים המרוכבים הועלה על ידי המהנדס והמתמטיקאי הרון האלכסנדרוני (10-70 לספירה הנוצרית), הגילוי שלו מיוחס[1] למתמטיקאי

[1] הסיפור המלא הרבה יותר מסובך ומרתק. הפירוט המלא בקישור הבא: https://www.youtube.com/watch?v=cUzklzVXJwo


איור 1.9: Gottfried Wilhelm Leibniz 1646-1716


איור 1.10: Carl Friedrich Gauss 1777-1855


איור 1.11: Leonhard Euler 1707-1783


איור 1.12: Caspar Wessel 1745-1818

האיטלקי Gerolamo Cardano שחי בשנים 1501-1576.

- רוב המתמטיקאים של תקופתו וגם לאחר מכן לא הכירו במספרים המרוכבים.
- במחקרו המתימטי למציאת השורשים של פולינומים ממעלה שלישית מהצורה

$$ax^3 + bx + c = 0$$

גילה קרדנו שניתן להגיע לחלק מהשורשים באמצעות הנוסחה

$$x = \sqrt[3]{\frac{-c}{2a} + \sqrt{\frac{c^2}{4a^2} + \frac{b^3}{27a^3}}} + \sqrt[3]{\frac{-c}{2a} - \sqrt{\frac{c^2}{4a^2} + \frac{b^3}{27a^3}}}$$

בחלק מהמקרים, הביטוי שמתחת לסימן השורש הפנימי היה שלילי, ולכן ללא קבלת המספר "המדומה" i לא היה ניתן להגיע לשורשי הפולינום גם כאשר כל השורשים הם ממשיים! (הרכיבים "המדומים" התבטלו בחשבון הסופי). למשל, אחד השורשים של המשוואה (שכל שורשיה ממשיים!)

$$x^3 - 15x - 4 = 0$$

מתקבל על ידי הנוסחה

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

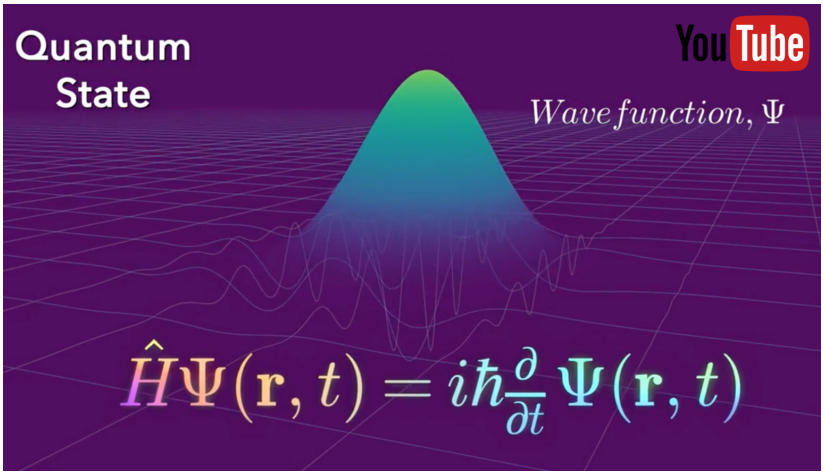
ללא שימוש במספר המדומה i לא נוכל לקבל את השורש הממשי של המשוואה!

$$x = \sqrt[3]{2 + 11i} + \sqrt[3]{2 - 11i} = 4$$

שני השורשים הנוספים הם $-2 \pm \sqrt{3}$ (כלומר, כל שלושת השורשים הם ממשיים).

- המשמעות של הגילוי הזה היתה שללא קבלת המספרים המרוכבים, לא ניתן לפתור פולינומים ממעלה גבוהה גם במקרים שכל השורשים ממשיים!

- דוגמאות נוספות מסוג זה הובילו בסופו של דבר לוודאות שלא ניתן להמשיך ולהתקדם בשטחי המתימטיקה ללא קבלה של המספרים המרוכבים כמספרים שווי מעמד.
- גישה זו החלה לתפוס תאוצה בעקבות עבודתם המתימטית של המתמטיקאים **לאונרד אוילר** (1707-1783) ו־**פרידריך גאוס** (1777-1855). הייצוג החשוב של המספרים המרוכבים כנקודות על פני המישור הדו-מימדי פותח על ידי המתמטיקאי והקרטוגרף הבלגי Caspar Wessel (1745-1818).
- בהמשך הסתבר שבעיות פיזיקאליות רבות בתורות החשמל, האלקטרומגנטיות, והקוואנטים, אינן ניתנות לפתרון ללא שימוש במספרים מרוכבים. למשל, המספר "המדומה" i מופיע באחת הנוסחאות היסודיות של תורת הקוואנטים, ובלעדיו אי אפשר בכלל לנסח את החוקים של תורה זו.



איור 1.13: A 3D surface-plot Schrodinger-equation quantum wave function visualization

- כתוצאה מגילויים אלה, הכינוי "המעליב" הפך להיות פחות ופחות מאפיין והמעמד של המספרים המרוכבים בתחומי המתמטיקה והפיזיקה עלה ועלה עד לנקודה שהיום הם נחשבים לגיטימיים בדיוק כמו המספרים הממשיים (למרות הכינוי המעליב).
- המספר המדומה i (imaginary) הוגדר על ידי לאונרד אוילר (1707-1783) כשורש המשוואה $x^2+1=0$ שגם הציג לראשונה את הנוסחה הידועה[2]

$$i = \sqrt{-1}$$

- כמובן, לאחר הוספת מספר חדש למערכת המספרים יש להוסיף את כל המספרים המתקבלים על ידי הכפלתו וחיבורו ליתר המספרים. קל לראות שקבוצת המספרים שתתקבל

[2] יש בעייה פילוסופית קטנה עם הנוסחה הזו: יש **שני שורשים** למספר -1, איזה מהם הוא i? מסתבר שזה לא משנה משום שבשני המקרים מקבלים את אותו מבנה אלגברי, ולכן לא ניתן להבחין ביניהם! לאחר שסימננו אחד מהם i, השורש השני הוא $-i$.

היא **קבוצת המספרים המרוכבים**

$$\mathbb{C} = \{\, a + bi : \;\; a, b \in \mathbb{R} \,\}$$

- אבל בהגדרה התמימה הזו של $\mathbb{C}$ "הצרות" רק מתחילות. אומנם קבוצה זו סגורה תחת פעולות חיבור, חיסור, כפל, וחילוק, אך מלבד פעולות אלה קיימות גם פעולות החזקה והשורש למיניהם:
  - כיצד נגדיר את פעולת החזקה a^b כאשר a, b, הם מספרים מרוכבים?
  - למשל מהו הערך של 2^i? או הערך של i^i?
  - כיצד יוגדרו הפונקציות הטריגונומטריות והלוגריתמיות?
  - האם קיים פתרון למשוואה $x^2 + i = 0$? במידה ולא, האם נצטרך להמציא עוד מספר דמיוני בכדי לפתור אותה? ואז אולי יצוץ לנו פולינום חדש שאין לו שורשים? שגם עבורו נאלץ להמציא מספר דמיוני חדש? וכו' ...
- באופן כללי, לאחר הכנסת המספרים המרוכבים $a+bi$ למתמטיקה, יש לטפל בכל הנושאים השונים שוב מהמסד ועד לטפחות. יש לחקור מחדש את כל נושא פתרון פולינומים שמקדמיהם מרוכבים, משוואות מעריכיות וטריגונומטריות אשר עכשיו הארגומנטים והמקדמים שלהם עשויים להיות מספרים מרוכבים. האם הפעולה התמימה של הכנסת המספר המדומה i למתמטיקה אינה מתכון לאסון!?
- לאחר בדיקה ומחקר ארוך שנים כל השאלות הללו נענו בצורה מניחה את הדעת. הוספת המספרים המרוכבים אינה מסבכת אלא מפשטת את תחומי המתמטיקה המגוונים. המספרים המרוכבים מספיקים בכדי לענות על כל השאלות הנ"ל, ואין צורך בהוספה של מספרים דמיוניים חדשים בכדי לפתור את הבעיות החדשות שנוצרו! הכל בא על מקומו בשלום! יתירה מזו, הוספת המספרים המרוכבים מאפשרת פתרון של בעיות ממשיות שבלעדיהם זה לא היה אפשרי. עובדה זו מחזקת את ההנחה שמדובר בהרחבה טבעית, נכונה, והכרחית של מערכת המספרים הממשית.

1.2 שדה המספרים המרוכבים: תכונות יסוד

- מבחינה תחבירית ניתן להגדיר את קבוצת המספרים המרוכבים $\mathbb{C}$ כאוסף כל הצרופים $a+bi$ כאשר $a,b\in\mathbb{R}$, ופעולות החיבור והכפל על ביטוי זה מוגדר כך:

$$\begin{aligned}(a+bi)+(c+di) &= (a+c)+(b+d)i\\ (a+bi)\cdot(c+di) &= (ac-bd)+(ad+bc)i\end{aligned}$$

נוסחת הכפל המרוכב מתקבלת בקלות מהזהות היסודית

$$\boxed{i^2=-1}$$

- בהקשרים שונים יהיה מועיל ונוח לייצג את קבוצת המספרים המרוכבים על ידי המרחב הוקטורי הדו-מימדי $\mathbb{R}^2$, שהוא גם הייצוג האלגברי הסטנדרטי של **המישור האויקלידי**

$$\mathbb{R}^2=\{\,(a,b):\ a,b\in\mathbb{R}\,\}$$

פעולת החיבור על $\mathbb{R}^2$ היא אותה פעולת החיבור הוקטורי הרגיל. אם נוסיף גם את פעולת הכפל הוקטורי הבא, נקבל ייצוג וקטורי של המספרים המרוכבים

$$\begin{aligned}(a,b)+(c,d) &= (a+c,b+d)\\ (a,b)\cdot(c,d) &= (ac-bd,ad+bc)\end{aligned}$$

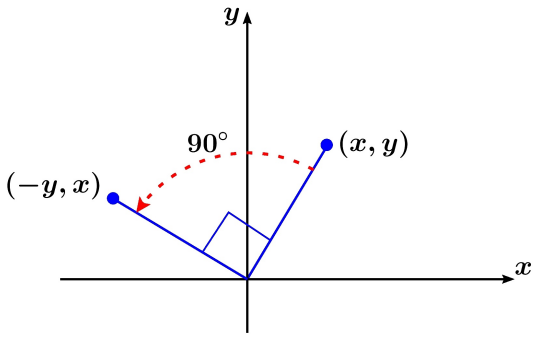
נציין כי ייצוג זה הוא רק אחת מהדרכים שבהן ניתן לייצג את קבוצת המספרים המרוכבים. המודל הזה של קבוצת המספרים המרוכבים נקרא **המישור המרוכב** והוא הוצג לראשונה על ידי הקרטוגרף Caspar Wessel בשנת 1799. לכן במהלך הקורס נתייחס לפעמים למספר מרוכב כאל וקטור במרחב הוקטורי $\mathbb{R}^2$.

- ייצוג חשוב נוסף שנפגוש בהמשך הוא על ידי **הספרה של רימן (Riemann's Sphere)**.
- בנוסף לשני המודלים הקודמים, קיים מודל חשוב נוסף של המספרים המרוכבים $a+bi$ באמצעות מטריצות ריבועיות מהצורה $\begin{bmatrix}a & -b\\ b & a\end{bmatrix}$ המייצגות גם טרנספורמציות ליניאריות של המישור הממשי. על פי המודל הזה, כל מספר מרוכב $a+bi$ ניתן לפרש כהעתקה ליניארית המבצעת פעולות כגון כיווץ, מתיחה, וסיבוב של המישור הממשי. למשל המספר המדומה i

מיוצג על ידי המטריצה $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ המייצגת כמובן פעולת סיבוב ב־$90°$ כנגד כיוון השעון.

ראה תרשים 1.14.

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$$



איור 1.14: העתקה ליניארית $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (-y, x)$ - סיבוב $90°$ כנגד כיוון השעון

פרטים נוספים ניתן למצוא בקישור הבא ובתרגילים שבסוף הפרק:

Matrix Representation of Complex Numbers

- מלבד העובדה שהמודלים הגאומטריים מסייעים לנו לחוש ולהבין יותר את המספרים המרוכבים, לתאוריה האלגברית של המספרים המרוכבים יש גם השלכות רבות ומעניינות בתחומי הגאומטריה במישור ובמרחב אשר את חלקם נפגוש בהמשך.
- בנוסף לייצוג כמרחב וקטורי, קבוצת המספרים המרוכבים מהווה **שדה** תחת פעולות החיבור והכפל שהוגדרו לעיל. נזכיר את ההגדרה של המבנה האלגברי הנקרא **שדה**.

הגדרה 1.1: שדה הוא מבנה אלגברי המורכב מקבוצת **איברים** F, ושתי פעולות בינאריות הנקראות **חיבור** ו־**כפל**, המסומנות "$+$", "$\cdot$". הקבוצה F חייבת להכיל לפחות שני איברים: **איבר האפס** 0, **איבר היחידה** 1, ומתקיימים התנאים הבאים

1. **ניטרליות של איבר האפס:** לכל $a \in F$ מתקיים

$$a + 0 = a$$

2. **ניטרליות של איבר היחידה:** לכל $a \in F$ מתקיים

$$a \cdot 1 = a$$

3. **חוק החילוף (קומוטטיביות):** לכל $a,b \in F$ מתקיים

$$\begin{aligned} a+b &= b+a \\ a \cdot b &= b \cdot a \end{aligned}$$

4. **חוק הקיבוץ (אסוציאטיביות):** לכל $a,b,c \in F$ מתקיים

$$\begin{aligned} (a+b)+c &= a+(b+c) \\ (a \cdot b) \cdot c &= a \cdot (b \cdot c) \end{aligned}$$

5. **קיום איבר נגדי:** לכל $a \in F$, קיים $b \in F$ כך ש־ $a+b=0$. האיבר b נקרא **האיבר הנגדי** של a ומסומן $-a$
6. **קיום איבר הופכי:** לכל $a \in F$, אם $a \neq 0$ אז קיים $b \in F$ כך ש־ $a \cdot b = 1$. האיבר b נקרא **האיבר ההופכי** של a ומסומן a^{-1}
7. **חוק הפילוג (דיסטריבוטיביות):** לכל $a,b,c \in F$ מתקיים

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$$

משפט 1.1: קבוצת המספרים המרוכבים $\mathbb{C}$ מהווה שדה.

הוכחה: יש להראות שהקבוצה מקיימת את כל שבעת הדרישות של השדה. כמובן איבר האפס שלנו הוא אותו איבר האפס הממשי 0, ואיבר היחידה שלנו הוא המספר הממשי 1. בדיקת קיום הדרישות 1-4 פשוטה מאוד ונשאיר אותה לתלמיד. האיבר הנגדי של המספר המרוכב $a+bi$ הוא בבירור $-a-bi$.

קיום מספר הופכי: אם $a+bi \neq 0$, יש להוכיח קיום מספר מרוכב $x+yi$ המקיים

$$(a+ib) \cdot (x+yi) = (ax-by)+(ay+bx)i = 1+0i$$

כלומר, יש להוכיח קיום פתרון למערכת

$$\begin{cases} ax-by=1 \\ bx+ay=0 \end{cases}$$

דטרמיננטת המקדמים היא

$$\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2+b^2 > 0$$

הדטרמיננטה אינה מתאפסת ולכן יש למערכת פתרון יחיד שניתן לקבלו מייד על ידי שימוש

בכלל קרמר שלמדנו באלגברה ליניארית

$$x=\frac{\begin{vmatrix}1 & -b\\ 0 & a\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a & -b\\ b & a\end{vmatrix}}=\frac{a}{a^2+b^2} \qquad y=\frac{\begin{vmatrix}a & 1\\ b & 0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a & -b\\ b & a\end{vmatrix}}=-\frac{b}{a^2+b^2}$$

קיבלנו לכן נוסחה עבור האיבר ההופכי[3]

$$(a+bi)^{-1}=\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i \tag{1.1}$$

הוכחת קיום דרישה 7 של השדה טריביאלית. ∎

- בשלב זה נוכל לקרוא לקבוצה $\mathbb{C}$ בשם המקובל **שדה המספרים המרוכבים**.
- אם $z=a+bi$ מספר מרוכב, אז
  - a נקרא **הרכיב הממשי** של z והוא מסומן על ידי $\mathrm{Re}(z)$.
  - b נקרא **הרכיב המדומה** של z והוא מסומן על ידי $\mathrm{Im}(z)$.

  קל לבדוק כי עבור כל שני מספרים מרוכבים $z_1,z_2\in\mathbb{C}$

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(z_1+z_2) &= \mathrm{Re}(z_1)+\mathrm{Re}(z_2)\\ \mathrm{Im}(z_1+z_2) &= \mathrm{Im}(z_1)+\mathrm{Im}(z_2)\end{aligned}$$

- **הערך המוחלט** או **המודול** של מספר מרוכב $z=a+bi$ מוגדר על ידי

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$$

במקרים רבים הזהות הבאה יותר שימושית

$$|z|^2=a^2+b^2 \tag{1.2}$$

[3] יש לשים לב לצבע הרקע של המסגרת שמציין כי מדובר למעשה בהגדרה!

המספר הצמוד $\overline{z}$ של מספר מרוכב $z = a + bi$ מוגדר על ידי

$$\overline{z} = a - bi$$

המספר הצמוד שימושי עבור פתרון בעיות שונות ("טכניקת ההכפלה בצמוד"). על ידי שימוש בצמוד, נוכל לרשום את נוסחת האיבר ההופכי (1.1) בצורה יותר קצרה

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} \tag{1.3}$$

חילוק מרוכב: פעולת החילוק בין שני מספרים מרוכבים $z, w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$, מוגדרת[4] על ידי

$$\frac{z}{w} = z \cdot w^{-1}$$

התכונה הכי יסודית של המספר הצמוד היא הזהות הבאה

$$z\overline{z} = |z|^2$$

נשתמש בטכניקת ההכפלה בצמוד בכדי לקבל נוסחת חילוק פרקטית

$$\begin{aligned} \frac{z}{w} &= \frac{z \cdot \overline{w}}{|w|^2} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac+bd+(bc-ad)i}{c^2+d^2} \\ &= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i \end{aligned}$$

קיבלנו את הנוסחה

$$\frac{z}{w} = \frac{z \cdot \overline{w}}{|w|^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i \tag{1.4}$$

[4] נשאיר לתלמיד לוודא שההגדרה הזו מרחיבה את פעולת החילוק הממשי (אחרת מדובר בקטסטרופה ...)

במשפט הבא נציג 12 זהויות יסודיות שימושיות של המספרים המרוכבים אשר ישמשו אותנו לבניית נוסחאות יותר מורכבות והוכחת טענות שונות.

משפט 1.2: 12 הזהויות היסודיות

(1) $|\overline{z}| = |z|$

(2) $z\overline{z} = |z|^2$

(3) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

(4) $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$

(5) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$

(6) $\mathrm{Re}\,(z) = (z + \overline{z})/2$

(7) $\mathrm{Im}\,(z) = (z - \overline{z})/2i$

(8) $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$

(9) $|\mathrm{Re}\,(z)| \le |z|$

(10) $|\mathrm{Im}\,(z)| \le |z|$

(11) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$

(12) $\overline{z_1/z_2} = \overline{z_1}\big/\overline{z_2}$

בזהויות (11), (12), יש להניח כי $z_2 \neq 0$.

הוכחה: נסתפק בהוכחת זהויות (5), (8), (9), ו־(11). יתר הזהויות קלות להוכחה ונשאיר אותן לתלמיד כתרגיל. נניח כי $z_1 = x_1 + y_1 i$, $z_2 = x_2 + y_2 i$.

זהות (5):

$$\begin{aligned}
\overline{z_1 z_2} &= \overline{(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)} = \overline{(x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)i} \\
&= (x_1x_2 - y_1y_2) - (x_1y_2 + x_2y_1)i \\
&= x_1x_2 - x_1y_2 i - y_1y_2 - y_1x_2 i \\
&= x_1(x_2 - y_2 i) - y_1(x_2 - iy_2)i \\
&= (x_1 - y_1 i)(x_2 - y_2 i) = \overline{z_1}\ \overline{z_2}
\end{aligned}$$

זהות (8): קל יותר להתעסק עם ריבוע המודול

$$|z_1 z_2|^2 = z_1 z_2 \overline{z_1 z_2} = z_1 z_2\ \overline{z_1}\ \overline{z_2} = z_1 \overline{z_1} z_2 \overline{z_2} = |z_1|^2 |z_2|^2$$

זהות (9): נניח כי $z = x + yi$

$$|\mathrm{Re}\,(z)| = |x| = \sqrt{x^2} \le \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$$

זהות (11):

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \left|\frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}}\right| = \left|\frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{|z_2|^2}\right| = \frac{|z_1 \cdot \overline{z_2}|}{|z_2|^2} = \frac{|z_1| \cdot |\overline{z_2}|}{|z_2|^2} = \frac{|z_1| \cdot |z_2|}{|z_2|^2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

השתמשנו בזהויות (1) ו־ (5). ■

להוכחת המשפט הבא נציין כי לכל מספר מרוכב z מתקיים $\overline{\overline{z}} = z$. זוהי זהות ברורה כל כך שאפילו לא טרחנו לציין אותה קודם.

משפט 1.3: אי-שוויון המשולש

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2| &\leq |z_1| + |z_2| \\ |z_1 - z_2| &\geq |z_1| - |z_2| \end{aligned}$$

הוכחה: כמו קודם נעבוד עם ריבוע המודול

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} = (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) \\ &= |z_1|^2 + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 + |z_2|^2 \\ &= |z_1|^2 + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1\overline{z_2}} + |z_2|^2 \\ &= |z_1|^2 + 2\mathbf{Re}\,(z_1\overline{z_2}) + |z_2|^2 \\ &\leq |z_1|^2 + 2\,|z_1|\,|z_2| + |z_2|^2 \\ &= (|z_1| + |z_2|)^2 \end{aligned}$$

אי-השוויון השני נובע מייד מהראשון

$$|z_1| = |z_1 - z_2 + z_2| \leq |z_1 - z_2| + |z_2|$$

לכן

$$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|$$

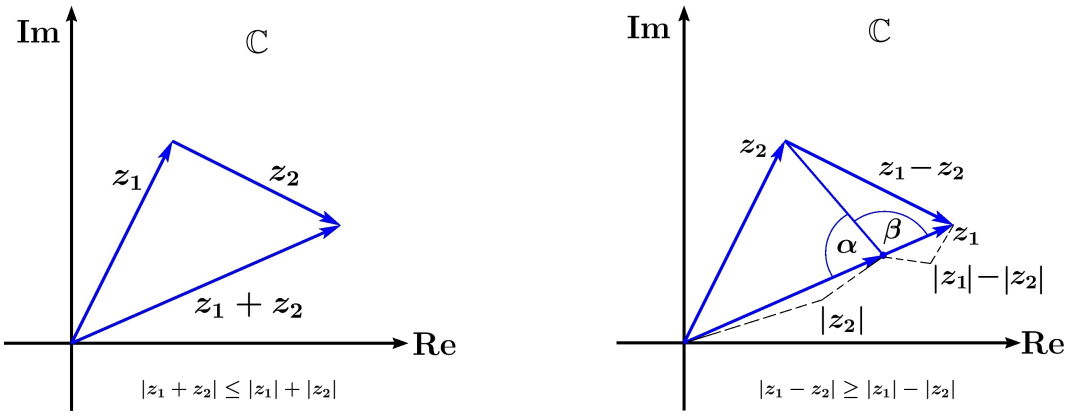
■

בספרים מסוימים אי-השוויון השני לפעמים נרשם כך

$$|z_1 - z_2| \geq \big||z_1| - |z_2|\big|$$

זה ברור כי $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_1|$.

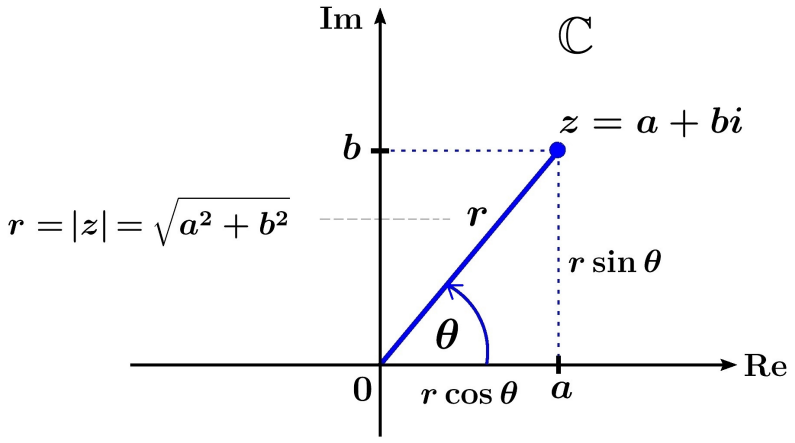
ניתן להמחיש את שני אי-השוויונים הללו במודל הוקטורי של המספרים המרוכבים. בצד שמאל של תרשים 1.15 המספרים z_1, z_2, $z_1 + z_2$ מיוצגים על ידי צלעות של משולש, ולכן אי-השוויון נובע מהמשפט הגאומטרי הידוע: סכום שתי צלעות במשולש תמיד גדול מהצלע השלישית.



איור 1.15: ייצוג וקטורי של אי-שוויון המשולש במודל הוקטורי $\mathbb{R}^2$ של המספרים המרוכבים

- בצד ימין של תרשים 1.15 רואים כי α היא זוית חדה מאחר והיא זוית בסיס במשולש שווה-שוקיים. לכן הזווית β היא הזווית הגדולה במשולש הקטן, ולכן הצלע $|z_1-z_2|$ שנמצאת מולה היא הצלע הגדולה במשולש זה.

1.3 הצגה קוטבית של מספר מרוכב



איור 1.16: המספר המרוכב $z=a+bi$ מתאפיין על ידי **המודול** $r=|z|$ **והארגומנט** θ: $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

- ההצגה הקוטבית של המספרים המרוכבים נכנסה לשימוש משמעותי על ידי המתמטיקאי השוויצרי לאונרד אוילר (1701-1783) כשעסק בפיתוח של הפונקציה e^{iz} לטור חזקות (טיילור).
- כפי שרואים בתרשים 1.16 שני השחקנים העיקריים בהצגה הם **המודול** r **והארגומנט** θ שהיא הזווית שבין המודול והחלק החיובי של ציר-x.
- את **המודול** r כבר פגשנו בסעיף הקודם

$$r=|z|=\sqrt{a^2+b^2}$$

זהו המרחק שבין הייצוג הקרטזי (a,b) של המספר המרוכב $z=a+bi$ לראשית מערכת הצירים $(0,0)$. נשתמש בסימן r גם בכדי לייצג את הקטע הגאומטרי המחבר בין ראשית הצירים לנקודה (a,b).

משרטוט 1.16 אנו למדים שניתן לבטא את הרכיבים של המספר המרוכב $z=a+bi$ על ידי

$$\begin{aligned} a &= r\cos\theta \\ b &= r\sin\theta \end{aligned}$$

ומכאן נקבל את **ההצגה הקוטבית של מספר מרוכב**

$$z=a+bi=r(\cos\theta+i\sin\theta) \tag{1.5}$$

זוג המספרים (r,θ) נקרא **הקואורדינטות הקוטביות (Polar coordinates)** של המספר המרוכב z. כפי שנראה בהמשך להצגה הקוטבית יש שימושים רבים ומגוונים בשטחי המתמטיקה והפיזיקה.

המספר הממשי האי-שלילי r נקרא **המודול** של המספר המרוכב z, והזווית θ נקראת **הארגומנט** של z.

בניגוד להצגה הקרטזית (a,b) של מספר מרוכב $a+bi$, בהצגה הקוטבית קיימות אינסוף דרכים לייצג מספר מרוכב נתון. הוספת כפולה שלמה $2n\pi$ לארגומנט θ תתאים עבור הצגה הקוטבית של $a+bi$.

$$a+bi=r(\cos\theta+i\sin\theta)=r[\cos(\theta+2n\pi)+i\sin(\theta+2n\pi)]$$

למשל את המספר המרוכב i נוכל לרשום באינסוף דרכים שונות

$$\begin{aligned} i &= \cos\tfrac{\pi}{2}+i\sin\tfrac{\pi}{2} \\ &= \cos\tfrac{5\pi}{2}+i\sin\tfrac{5\pi}{2} \\ &= \cos\tfrac{9\pi}{2}+i\sin\tfrac{9\pi}{2} \\ &= \cos\tfrac{(2k+1)\pi}{2}+i\sin\tfrac{(2k+1)\pi}{2}, \quad k\in\mathbb{Z} \end{aligned}$$

עובדה זו מייצרת לפעמים קושי, אך יש לה גם שימושים חשובים שמסייעים לפתור בעיות

אמיתיות שלא ניתנות להבנה ופתרון באמצעות ההצגה הרגילה.

נוסחה לחישוב הארגומנט

- בהינתן מספר מרוכב $z=x+yi$ ניתן לקבל את כל ערכי הארגומנט θ על ידי הנוסחה הבאה

$$\theta=\arg(z)=\begin{cases}\arctan\frac{y}{x}+2n\pi,\ n\in\mathbb{Z}, & x\neq 0\\ \frac{\pi}{2}+2n\pi,\ n\in\mathbb{Z}, & x=0,\ y>0\\ \frac{3\pi}{2}+2n\pi, n\in\mathbb{Z}, & x=0,\ y<0\\ \textbf{לא מוגדר} & x=0,\ y=0\end{cases} \tag{1.6}$$

- הביטוי $\arg(z)$ נקרא **פונקציית הארגומנט**, אך הוא למעשה **פונקציה רב-ערכית** ולא פונקציה במובן המדויק, מאחר ועבור כל $z\in\mathbb{C}$ יש אינסוף ערכים שונים של $\arg(z)$.
- בכדי לקבל התאמה חד-ערכית נאלץ להגביל את ערך הארגומנט לקטע כגון $[0,2\pi)$ או $(-\pi,\pi]$. באופן כללי, כל קטע מהצורה $[\alpha,\alpha+2\pi)$ או $(\alpha,\alpha+2\pi]$ יתאים.
- תחת הגבלה כזו לכל מספר מרוכב $z\in\mathbb{C}$ יתאים ערך אחד ויחיד θ בקטע. ברוב ספרי הלימוד מקובל להגביל את ערכי הארגומנט לקטע $(-\pi,\pi]$, ואז מקבלים פונקציה אמיתית

$$\mathrm{Arg}:\mathbb{C}-\{0\}\to(-\pi,\pi]$$

שנקראת **הענף הראשי של פונקציית הארגומנט**.

- אפשר לבטא את הפונקציה הרב-ערכית $\arg$ באמצעות הענף הראשי Arg

$$\arg(z)=\{\,\mathrm{Arg}(z)+2n\pi:\ n\in\mathbb{Z}\,\} \tag{1.7}$$

נוסחת אוילר

- בשנת 1740 המתמטיקאי השוויצרי לאונרד אוילר הוכיח כי עבור כל מספר ממשי θ

$$\boxed{e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta} \tag{1.8}$$

אוילר גילה קשר עמוק בין הפיתוחים לטור טיילור של הפונקציות המרוכבות $\sin z$, $\cos z$, e^z, $z\in\mathbb{C}$, אשר נפגוש בהמשך הקורס.

- בשלב הנוכחי אין לנו את הכלים הדרושים בכדי להגדיר את הפונקציה המרוכבת e^z, ולכן

בינתיים נשתמש בביטוי $e^{i\theta}$ כסימון בלבד של המספר המרוכב $\cos\theta + i\sin\theta$.

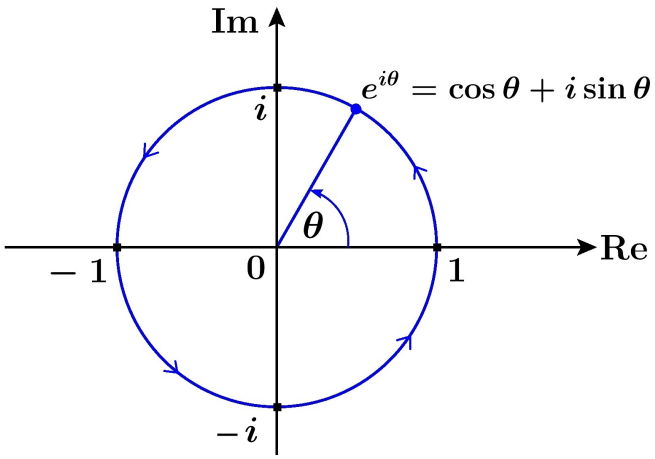
במילים אחרות בכל פעם שנפגוש בביטוי $e^{i\theta}$ הכוונה היא לביטוי $\cos\theta + i\sin\theta$! סימון מקובל נוסף עבור מספר זה שניתן למצוא בספרים רבים הוא

$$\boxed{\mathbf{cis}(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta}$$

בחוברת הנוכחית נעדיף את הסימון $e^{i\theta}$ על פני הסימון $\mathrm{cis}(\theta)$, אך התלמיד עשוי לפגוש את הסימון השני בחוברות תרגילים ומבחנים ישנים. זהו כמובן הביטוי המופיע בתוך הסוגריים של ההצגה הקוטבית (1.5). התכונה הכי בולטת של ביטוי זה היא שהמודול שלו שווה 1 עבור כל ערך של θ.

$$\left|e^{i\theta}\right| = \left|\cos\theta + i\sin\theta\right| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$$

מעגל היחידה המרוכב



איור 1.17: "**מעגל היחידה המרוכב**" מורכב מכל המספרים המרוכבים $\cos\theta + i\sin\theta$, $\theta \in \mathbb{R}$

למעגל היחידה יש חשיבות רבה בהבנת המבנה של $\mathbb{C}$ וגם שימושים רבים. במובן מסוים, מעגל היחידה הוא "התמצית" של הקבוצה $\mathbb{C}$ מאחר וכל מספר מרוכב הוא כפולה של נקודה על המעגל בסקלר ממשי ($z = re^{i\theta}$).

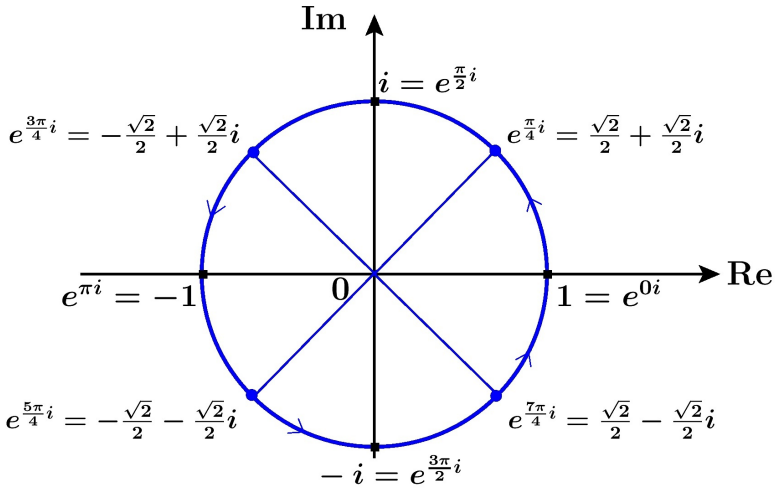
ממבט מהיר **במעגל היחידה המרוכב** (שרטוט 1.17), ניתן לרשום את הזהויות הבאות

$$\boxed{e^{0i} = 1, \qquad e^{\frac{\pi}{2}i} = i, \qquad e^{\pi i} = -1, \qquad e^{\frac{3\pi}{2}i} = -i}$$

זהויות שימושיות נוספות

(1.9)

$$e^{\frac{\pi}{4}i}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i \qquad e^{\frac{3\pi}{4}i}=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$$
$$e^{\frac{5\pi}{4}i}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i \qquad e^{\frac{7\pi}{4}i}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$$



איור 1.18: נקודות קנוניות על **מעגל היחידה המרוכב**

(1.10)

$$e^{\frac{\pi}{6}i}=\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{2}i \qquad e^{\frac{\pi}{3}i}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$
$$e^{\frac{2\pi}{3}i}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \qquad e^{\frac{5\pi}{6}i}=-\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{2}i$$
$$e^{\frac{7\pi}{6}i}=-\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{2}i \qquad e^{\frac{4\pi}{3}i}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$
$$e^{\frac{5\pi}{3}i}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \qquad e^{\frac{11\pi}{6}i}=\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{2}i$$

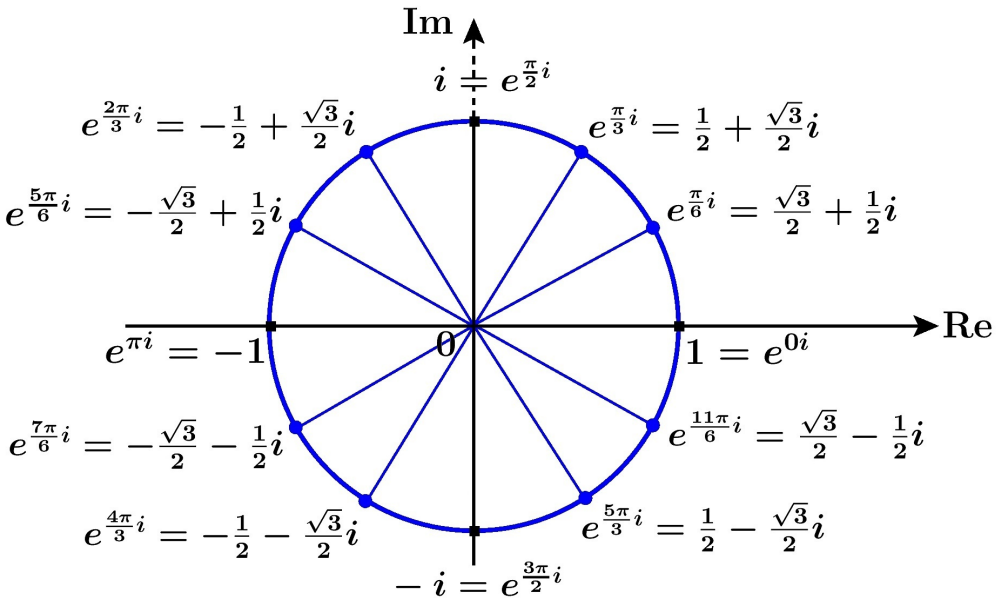
בנוסחה הבאה נראה כיצד ההצגה הקוטבית מסייעת לנו לקבל המחשה גאומטרית מעניינת למכפלה של מספרים מרוכבים.

נוסחת כפל קוטבי

יהיו $z_1=r_1e^{i\theta_1}$, $z_2=r_2e^{i\theta_2}$ שני מספרים מרוכבים בהצגה קוטבית. אזי

(1.11)

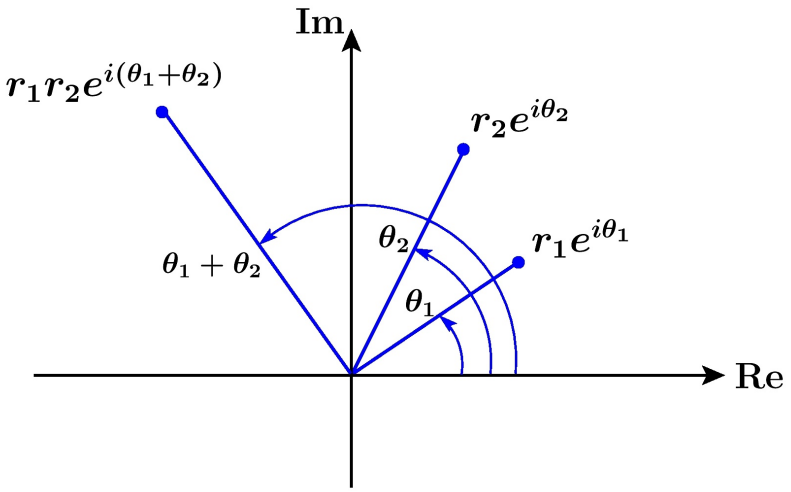
$$z_1z_2=r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$



איור 1.19: נקודות קנוניות על **מעגל היחידה המרוכב**

כלומר ההצגה הקוטבית של מכפלת שני מספרים מרוכבים מתקבלת על ידי הכפלת המודולים וחיבור הארגומנטים שלהם.

ניסוח מועיל נוסף: הכפלה במספר מרוכב $re^{i\theta}$ שקולה להכפלה במודול r וסיבוב בזווית θ נגד כיוון השעון.



איור 1.20: ההצגה הקוטבית של מכפלת שני מספרים מרוכבים מתקבלת על ידי הכפלת המודולים וחיבור הארגומנטים שלהם

הוכחה:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 e^{i\theta_1} \cdot r_2 e^{i\theta_2} \\ &= r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_2) \cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= r_1 r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)] \\ &= r_1 r_2\left[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\right] \end{aligned}$$

$$= r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

במהלך ההוכחה השתמשנו בזהויות הטריגונומטריות

$$\begin{aligned}\cos(\theta_1+\theta_2) &= \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2\\ \sin(\theta_1+\theta_2) &= \cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2\end{aligned}$$

המסקנה הבאה תהיה שימושית במספר הקשרים חשובים בהמשך.

טענה 1.4: הכפלה של מספר מרוכב z במספר $e^{i\alpha}$ שקולה לסיבוב z ב־α מעלות נגד כיוון השעון ביחס לראשית הצירים. כלומר, אם $z = re^{i\theta}$ אז

$$e^{i\alpha}z = re^{i(\theta+\alpha)} \tag{1.12}$$

הנוסחה הבאה היא תוצאה מיידית מטענה זו (אינדוקציה מתימטית).

נוסחת דה-מואבר (Abraham de Moivre 1667-1754)

עבור כל n טבעי ועבור כל זווית $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta} \tag{1.13}$$

כלומר:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \tag{1.14}$$

נדגיש שוב כי הביטוי $e^{i\theta}$ הוא רק סימון נוח למספר $\cos\theta + i\sin\theta$ ולכן איננו עדיין רשאים להשתמש בחוקי חזקות! במובן הזה נוסחת דה-מואבר טוענת טענה מעניינת ולא טריביאלית: החזקה ה־n־ית של נקודה על מעגל היחידה נותנת נקודה אחרת על מעגל היחידה שבה הזווית הוכפלה ב־n.

הוכחה: נשתמש באינדוקציה מתימטית. עבור $n = 1$ הטענה ברורה. אם $z = e^{i\theta}$, אז ברור כי $z^1 = e^{i\cdot 1\cdot\theta}$. הנחת אינדוקציה: $z^n = e^{in\theta}$

$$(e^{i\theta})^{n+1} = e^{i\theta}\cdot(e^{i\theta})^n = e^{i\theta}\cdot e^{in\theta} = e^{\theta+in\theta} = e^{i(n+1)\theta}$$

השתמשנו בהנחת האינדוקציה $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$ ולאחר מכן בטענה 1.4 (או נוסחה (1.11)).

מסקנה 1.5:

$$(re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta} \tag{1.15}$$

נוסחת חילוק קוטבי

יהיו $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ שני מספרים מרוכבים בהצגה קוטבית. אם $z_2 \neq 0$ אזי

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \tag{1.16}$$

כלומר: חילוק במספר מרוכב $re^{i\theta}$ שקול לחילוק במודול r וסיבוב בזווית θ בכיוון השעון.

הוכחה: על פי נוסחת הכפל הקוטבי

$$z_2 \cdot \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)} = r_2 e^{i\theta_2} \cdot \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)} = r_1 e^{i\theta_1} = z_1$$

אם נחלק ב־z_2 את השוויון נקבל את נוסחת החילוק.

שורשי היחידה

טענה 1.6: עבור כל מספר טבעי חיובי n קיימים n שורשים שונים למשוואה

$$z^n = 1$$

השורשים נתונים על ידי הנוסחה

$$z_k = e^{\frac{2k\pi i}{n}} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} \tag{1.17}$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

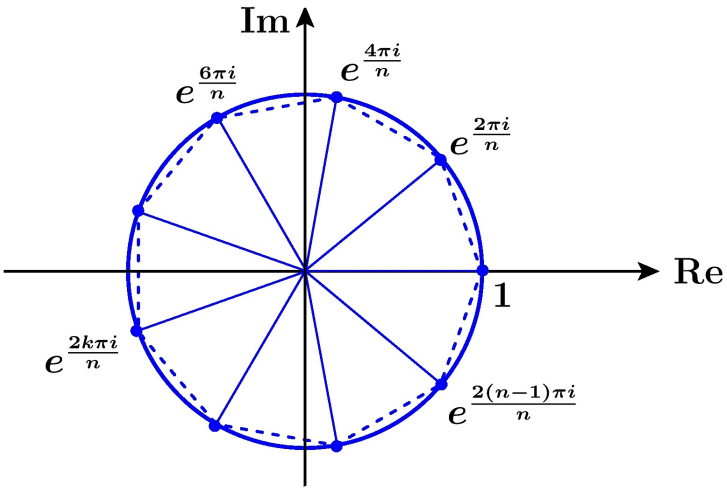
השורשים $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ נקראים **שורשי היחידה מסדר** n.

הוכחה: נשתמש בהצגה קוטבית $z = re^{i\theta}$. המשוואה $z^n = 1$ הופכת להיות המשוואה הבאה

$$r^n e^{in\theta} = 1$$

לכן

$$\left|r^n e^{in\theta}\right| = r^n \left|e^{in\theta}\right| = r^n = 1$$



איור 1.21: שורשי היחידה מסדר n פרושים על פני מעגל היחידה ויוצרים n קודקודים של מצולע משוכלל בעל n צלעות

מאחר ונתון כי r מספר ממשי חיובי, נקבל $r=1$. נותר לנו לפתור את המשוואה

$$e^{in\theta}=1$$

את המספר 1 נוכל לרשום על ידי $1=e^{2k\pi i}$ לכל מספר שלם k. לכן נקבל את המשוואה

$$e^{in\theta}=e^{2k\pi i},\quad k\in\mathbb{Z}$$

על ידי השוואת חזקות נקבל

$$\theta=\frac{2k\pi}{n},\quad k\in\mathbb{Z}$$

ולכן

$$\theta=0,\ \frac{2\pi}{n},\ \frac{4\pi}{n},\ \ldots,\ \frac{2(n-1)\pi}{n}, \tag{1.18}$$

משיקולי מחזוריות ברור שכל ערך אחר של $\frac{2k\pi}{n}$ יניב פתרון שכבר כלול ברשימה זו, לכן יש לנו בדיוק n שורשים

$$0,\ e^{\frac{2\pi i}{n}},\ e^{\frac{4\pi i}{n}},\ \ldots,\ e^{\frac{2(n-1)\pi i}{n}}$$

■

שורשי מספר מרוכב z

טענה 1.7: עבור כל מספר מרוכב $z \neq 0$ קיימים בדיוק n שורשים שונים למשוואה

$$u^n = z$$

אם $z = re^{i\theta}$, אז השורשים נתונים על ידי הנוסחה

$$u_k = \sqrt[n]{r}\, e^{\frac{\theta+2k\pi}{n}i} \tag{1.19}$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

הוכחה: יהי $u = qe^{i\alpha}$ שורש של המשוואה. על פי נוסחת דה-מואבר (1.13)

$$u^n = q^n e^{in\alpha} = re^{i\theta} = re^{i(\theta+2k\pi)}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

לכן $q = \sqrt[n]{r}$ כי q, r, ממשיים חיוביים, ובנוסף נקבל כי

$$\alpha = \frac{\theta + 2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

משיקולי מחזוריות ברור כי יש בדיוק n ערכים שונים של α

$$\alpha = \frac{\theta + 2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

ולכן יש לנו בדיוק n שורשים

$$u_k = \sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

■

1.4 פונקציית הארגומנט והענף הראשי שלה

במהלך השיעור לא ממש התעכבנו על כך (צורך זמן יקר ומבלבל). כאן המקום להשלים את החסר ולהעמיק יותר בהבנת פונקציית הארגומנט.

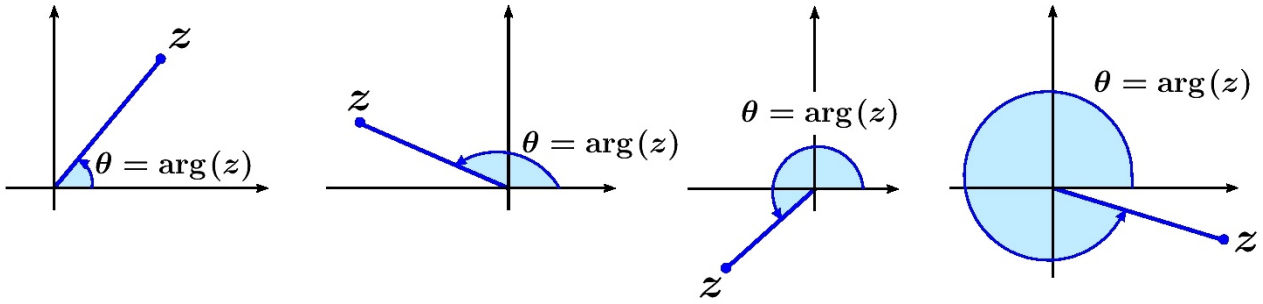
פונקציית הארגומנט $\theta = \arg(z)$ אמורה לספק לנו את כל הזויות θ שבין הציר הממשי למודול של $z = x + iy$ (יש כמובן אינסוף זויות כאלה כי הוספת כפולה שלמה של 2π מותירה את z באותה נקודה). נשאלת השאלה האם קיימת נוסחה נוחה עבור $\arg(z)$?

בכדי לענות על שאלה זו יש לחפש **ענף חד-ערכי** שנקרא לו Arg אשר מחזיר זויות במחזור

יחיד כגון $[0,2\pi)$ או $(-\pi,\pi]$. המחשבה הראשונה שעולה לראש היא להשתמש בפונקציה ההפוכה של הטנגנס

(Bad Idea!) $$\mathbf{Arg}\,(z)=\arctan\frac{y}{x}$$

נוסחה זו עובדת נכון עבור הרביע הראשון של המישור $x>0$, $y\geq 0$, אך אינה מוגדרת עבור נקודות על ציר-y (כי $x=0$). אם $z=x+iy$ נמצא ברביע השני של המישור ($x<0$, $y\geq 0$), הביטוי $\arctan\frac{y}{x}$ מחזיר זווית בטווח $(-\frac{\pi}{2},0]$ בניגוד למצופה (הזוויות של הרביע השני חייבות להיות בטווח $[\frac{\pi}{2},\pi]$). גם ברביע השלישי של המישור הפונקציה $\arctan$ מפספסת את הזווית הנכונה כי היא אינה מבחינה בין נקודות אנטיפודיות: היא מחזירה אותה זווית לנקודה (x,y) ולנקודה $(-x,-y)$. לכן הזוויות ש־$\arctan$ מחזירה עבור נקודות ברביע השלישי שייכות למעשה לרביע הראשון. ברביע הרביעי, הפונקציה $\arctan$ מחזירה זוויות בטווח $(-\frac{\pi}{2},0]$. בנוסף לכל הליקויים הללו, גם אם נגדיר את $\arctan$ על ציר-y, היא תהיה לא-רציפה על שלושה צירים.



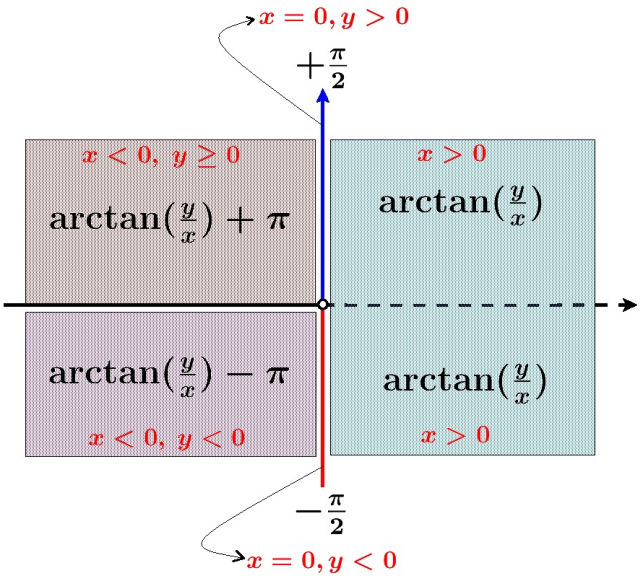
איור 1.22: הארגומנט של המספר המרוכב z היא הזווית (המכוונת) שבין הציר הממשי למודול של z

בכדי להתגבר על הליקויים האלה, חברת IBM הגדירה פונקציה חדשה בשם $\mathtt{arctan2}$, או בקיצור $\mathtt{atan2}$, במסגרת שפת התיכנות FORTRAN (בתחילת שנות החמישים). ההגדרה של $\mathtt{atan2}$ תוכננה בקפידה בכדי לספק בסיס מלא עבור ענף חד-ערכי חלק ככל האפשר לפונקציית הארגומנט $\arg$. הפונקציה $\mathtt{atan2}:\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}\to(-\pi,\pi]$ מוגדרת כך:

$$\mathtt{atan2}(y,x)=\begin{cases}\arctan\frac{y}{x}, & x>0 & \text{רביע 1 + רביע 4}\\ \arctan\frac{y}{x}+\pi, & x<0 \text{ and } y\geq 0 & \text{רביע 2}\\ \arctan\frac{y}{x}-\pi, & x<0 \text{ and } y<0 & \text{רביע 3}\\ +\frac{\pi}{2}, & x=0 \text{ and } y>0 & \text{ציר-}y\text{ חיובי}\\ -\frac{\pi}{2}, & x=0 \text{ and } y<0 & \text{ציר-}y\text{ שלילי}\\ \textbf{Undefined}, & x=0 \text{ and } y=0 & \text{ראשית הצירים}\end{cases}$$

יש לשים לב לכך שבניגוד לפונקציה $\arctan$, הפונקציה $\mathtt{atan2}$ מקבלת שני ארגומנטים! קואורדינטות של נקודה במישור בסדר הפוך. בשרטוט 1.23 ניתן לראות הצגה ויזואלית

של תחומי ההגדרה. שני האילוצים שהביאו להגדרה זו הם הגבלת ערכי הפונקציה לטווח $(-\pi,\pi]$ ובנוסף הדרישה לרציפות על מקסימום שטח. הפונקציה $\mathbf{atan2}$ אינה רציפה בחלק השלילי של ציר-x, ואינה מוגדרת בנקודה $(0,0)$!

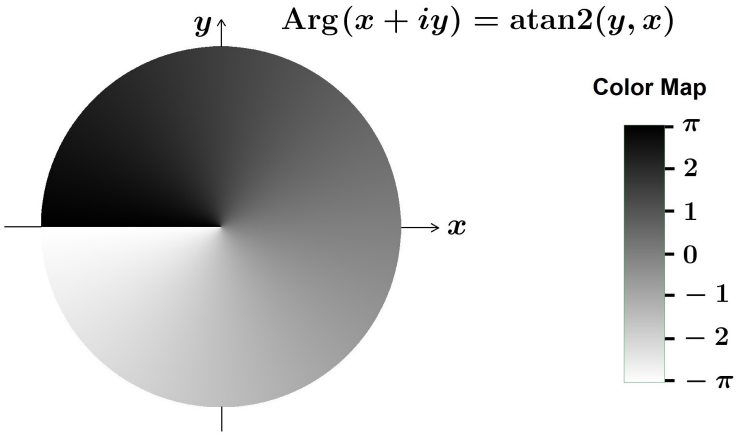


איור 1.23: הגדרת הפונקציה $\mathbf{atan2}$ על פני חמישה חלקי מישור: 1. חצי מישור ימני פתוח (לא כולל ציר-y), 2. רבע מישור שמאלי עליון סגור (כולל את ציר-x שלילי), 3. רבע מישור שמאלי תחתון פתוח (לא כולל ציר-x), 4. ציר-y חיובי, 5. ציר-y שלילי

למרות שההגדרה נראית מלאכותית ומאולצת, בשרטוט 1.24 רואים **מפת חום** (או מפה תרמית) של הפונקציה

$$\mathbf{atan2} : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \to (-\pi,\pi]$$

שמציגה תמונה רציפה (כמעט) וטבעית. במפת חום, כל נקודה (x,y) נצבעת בצבע המתאים לערך הפונקציה $\mathbf{atan2}(y,x)$ (טמפרטורה). במפה הזו הטמפרטורה נצבעת בגוון אפור שנע על הסקלה $[\pi : -\pi)$ ($-\pi$ לבן עד π שחור).



איור 1.24: מפת חום של הפונקציה $\mathbf{atan2} : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \to (-\pi,\pi]$. כל נקודה (x,y) נצבעת בגוון אפור המתאים לערך $\mathbf{atan2}(x,y)$

כפי שניתן להתרשם ממפת החום בשרטוט 1.24, הפונקציה $\mathbf{atan2}$ רציפה על פני כל המישור

מלבד החלק השלילי של ציר-x (כולל הראשית): $(-\infty,0]$ שלאורכו מתבצעת "צניחה" מהערך π לערך $-\pi$. במילים אחרות, נקודות אי-הרציפות של $\mathbf{atan2}$ הן כל הנקודות שעל הציר הממשי השלילי כולל הנקודה $x=0$ (שבה היא אינה מוגדרת). בשלב הזה אנו יכולים להגדיר את הענף הראשי של פונקציית הארגומנט.

- **הענף הראשי של פונקציית הארגומט** $\arg(z)$ מסומן $\mathrm{Arg}(z)$ ומוגדר פורמלית באמצעות המשוואה

$$\mathrm{Arg}(z)=\mathrm{Arg}(x+iy)=\mathbf{atan2}(y,x) \tag{1.20}$$

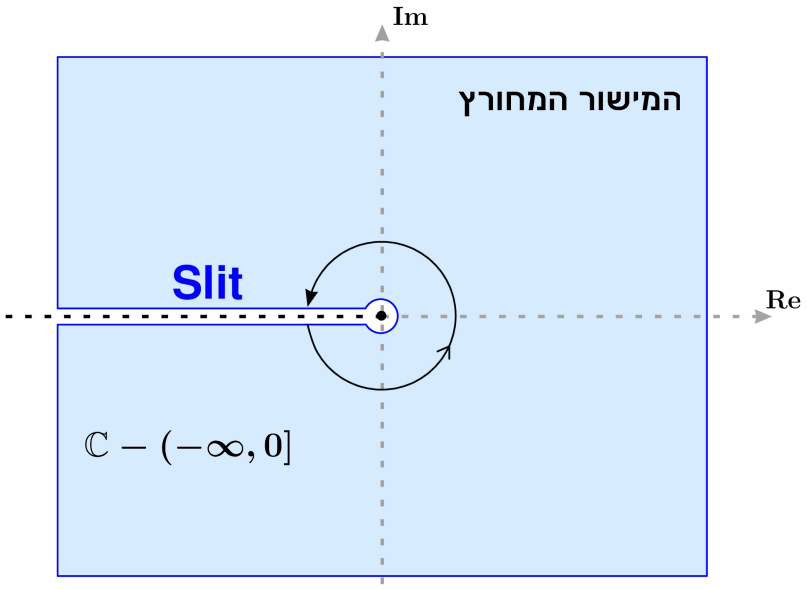
- בשלב הזה נוכל לתת הגדרה נקיה לפונקציית הארגומנט (שהיא פונקציה רב-ערכית ולא פונקציה במובן המדויק!)

$$\arg(z)=\mathrm{Arg}(z)+2n\pi,\quad n\in\mathbb{Z} \tag{1.21}$$

רואים כי לכל $z\neq 0$, $\arg(z)$ מקבלת אינסוף ערכים שונים!

- **המישור המחורץ:** קבוצת הנקודות המתקבלת מהחסרת הקרן $(-\infty,0]$ מהמישור המרוכב $\mathbb{C}$, נקראת **המישור המחורץ**, והיא נרשמת על ידי $\mathbb{C}-(-\infty,0]$.

- לסיכום: לא קשה לבדוק את הרציפות של $\mathbf{atan2}$ במישור המחורץ על פי הגדרת הגבול שלמדנו בחדו"א 2 (פונקציה של שני משתנים). נשאיר משימה פשוטה זו לתלמיד.



איור 1.25: מישור מרוכב עם חריץ לאורך ציר-x שלילי (Complex Slit Plane)

1.5 קישורים למקורות ברשת האינטרנט

להלן מספר קישורים נבחרים לחומרים שונים בנושא פונקציות מרוכבות ברשת האינטרנט. מדובר כמובן בטיפה בים המידע שניתן למצוא בנושא זה ברשת, והכוונה היא לתת את הדחיפה והטעימה הראשונה מסוגי החומרים שניתן לחפש ולמצוא. מיומנות בשיטות חיפוש בגוגל עשויה לסייע מאוד בתהליך הלמידה של כל קורס, ולכן אנו ממליצים על פיתוח מיומנות כזו על ידי תירגולה לעיתים קרובות. בנוסף לכך, לאחרונה התווספו מנועי בינה מלאכותית כגון ChatGPT אשר עשויים לספק מידע נוסף ולסייע בפתרון בעיות.

- When are imaginary numbers used in real life? What practical applications do they have?
- What are the applications of complex numbers?
- What are some real life applications of complex numbers in engineering and practical life?
- Do imaginary numbers have any practical applications?
- An Introduction to Complex Analysis for Engineers

ChatGPT Chat GPT

YouTube Using Harmonic functions in the animation industry (Pixar)

YouTube The Real World Uses of Imaginary Numbers

YouTube Imaginary Numbers Are Real [Part 1: Introduction]

YouTube Complex Numbers: AC Circuit Application

YouTube Divergence and curl: The language of Maxwell's equations, fluid flow, and more

YouTube L1.3 Necessity of complex numbers.

YouTube 4 APPLICATIONS OF COMPLEX NUMBERS IN REAL DAILY LIFE

YouTube Complex number fundamentals — Lockdown math ep. 3

YouTube How Imaginary Numbers Were Invented

תרגילים לפרק 1

הדרכה: בסוף הרשימה יש **קישור למחברת גוגל** המכילה פתרונות סופיים ומלאים לחלק מהתרגילים. פתרונות נוספים יתווספו במהלך הזמן (מקווה לעזרה מצד התלמידים). נשמח מאוד לקבל מהתלמידים פתרונות נוספים לתרגילים שעדיין לא פתורים!

1. פשט את הביטויים הבאים

א. $\frac{1+2i}{3-4i}+\frac{2-i}{5i}$ **ב.** $\frac{10i}{(1-i)(2-i)(3-i)}$ **ג.** $(1-i)^4$

ד. $(\sqrt{3}+i)^{38}$ **ה.** $\sqrt[4]{1-i\sqrt{3}}$ **ו.** $\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^4$

תשובה: א. $-\frac{2}{5}$ ב. -1 ג. -4

2. הבא את הביטוי הבא לצורה $x+iy$:

$$\frac{a+ib}{a-ib}-\frac{a-ib}{a+ib}$$

3. פתור את המשוואות הבאות:

א. $z^2+\sqrt{32}z-6i=0$ **ב.** $z^2=\overline{z}$ **ג.** $z^2=-|z|$

ד. $4z^2+8|z|^2-3=0$ **ה.** $z^3=2iz$ **ו.** $z^n=\overline{z}$

ז. $z^2=|z|^2-4$ **ח.** $z^2=i(|z|^2-4)$

הדרכה: סעיף ו': יש להשתמש בהצגה קוטבית $z=re^{\theta i}$. קל לקבל כי $r=0$ או $r=1$. לאחר מכן יש לפתור את $e^{(n+1)\theta i}=1$.

4. מצא פתרון קרטזי לכל אחת מהמשוואות הבאות

א. $\mathrm{Re}\left(z^2\right)=\mathrm{Im}\left(z^2\right)$ **ב.** $\mathrm{Im}\left(z^2\right)/z^2=-i$ **ג.** $\arg\left(\frac{z}{z-1}\right)=\frac{\pi}{2}$

הדרכה: פתרון קרטזי הוא ביטוי אלגברי במשתנים x, y, המתאר את כל הנקודות $z=x+iy$ במישור שמקיימות את המשוואה. לדוגמה, הפתרון של משוואה א' הוא: $y=(-1\pm\sqrt{2})x$. פתרון ב': $y=\pm x$. פתרון ג': $(x-\frac{1}{2})^2+y^2=\frac{1}{4}$, $y<0$.

5. המספר המרוכב $z=2+i$ הוא פתרון של המשוואה $z^4-6z^3+16z^2-22z+k=0$, כאשר k הוא מספר שלם. מצא את כל יתר הפתרונות והערכים המתאימים של k.

6. הוכח כי עבור כל שני מספרים מרוכבים z_1, z_2, השונים מאפס:

$$\arg\left(z_1/z_2\right)=\arg\left(z_1\right)-\arg\left(z_2\right) \tag{1.22}$$

הערה: הפונקציה $\arg$ היא פונקציה רב ערכית ולכן להפרש $\arg(z_1)-\arg(z_2)$ יש אינסוף ערכים שונים! כלומר, במובן מתימטי קפדני יש להוכיח כי קבוצת ערכי הקבוצה $\arg(z_1/z_2)$ שווה להפרשים בין איברי $\arg(z_1)$ לאיברי $\arg(z_2)$!

7. העזר בנוסחה (1.22) בכדי לחשב את זוויות המשולש הנוצר על ידי שלוש נקודות שונות z_1, z_2, z_3, אשר אינן על אותו קו ישר.

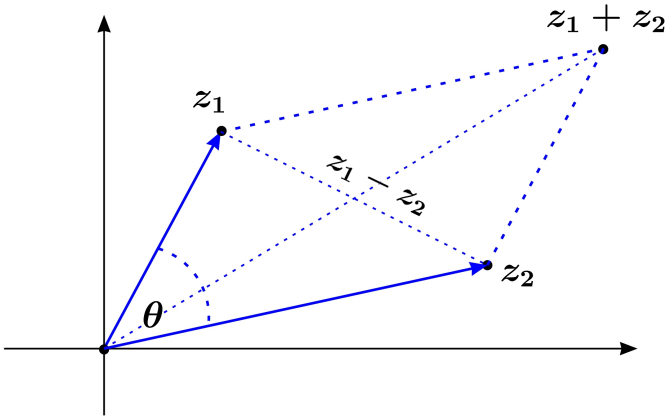
הדרכה: העתק את המשולש כך שאחד מקודקודיו יהיה ראשית הצירים. למשל על ידי העתקת הנקודה z_1 לראשית הצירים נקבל משולש חופף: $\{0, z_2-z_1, z_3-z_1\}$.

8. יהיו z_1, z_2, מרוכבים שונים מאפס ובלתי תלויים ליניארית (ראה שרטוט 1.26).

א. הוכח כי ארבעת הנקודות $\{0, z_1, z_2, z_1+z_2\}$ יוצרים מקבילית ששטחה $|\mathrm{Im}(\overline{z_1}z_2)|$.

ב. הוכח כי נוסחת הזווית θ בין הוקטורים z_1, z_2, נתונה על ידי $\theta=\arg(z_1/z_2)$.

הדרכה: כזכור, ניתן לייצג את קבוצת המספרים המרוכבים $\mathbb{C}$ באמצעות המרחב הוקטורי $\mathbb{R}^2$. שני מספרים מרוכבים z_1, z_2, הם **תלויים ליניארית**, אם קיים ממשי $r\in\mathbb{R}$ כך ש־$z_2=rz_1$. אפשר לייצג מספר מרוכב $z=x+iy$ גם על ידי וקטור תלת-מימדי $(x,y,0)\in\mathbb{R}^3$, ואז ניתן להשתמש בנוסחת שטח המקבילית שלומדים בקורס חדו"א 2: $\mathbf{Area}=|z_1\times z_2|$. כאשר הסימן $\times$ מציין את פעולת המכפלה הוקטורית (שמוגדרת רק עבור וקטורים במרחב $\mathbb{R}^3$). סעיף ב': מומלץ להציע בתרגילים 6, 7.



איור 1.26: מקבילית הנוצרת על ידי הנקודות $\{0, z_1, z_2, z_1+z_2\}$.

9. הוכח את שוויון המקבילית

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)$$

הדרכה: עבור קודם על תרגיל 8, והתבונן בשרטוט 1.26.

10. הוכח כי לכל n מספרים מרוכבים $z_1,z_2,\ldots,z_n\in\mathbb{C}$ מתקיימים השוויונים

$$\begin{aligned}|z_1\,z_2\,\cdots\,z_n| &= |z_1|\,|z_2|\,\cdots\,|z_n| \\ \overline{z_1\,z_2\,\cdots\,z_n} &= \overline{z_1}\;\overline{z_2}\;\cdots\;\overline{z_n}\end{aligned} \tag{1.23}$$

הדרכה: יש להשתמש באינדוקציה מתימטית. בסיס האינדוקציה הוא $n=2$.

11. הוכח כי לכל $z\in\mathbb{C}$, ולכל מספר טבעי n, $|z^n|=|z|^n$, $\overline{z^n}=\overline{z}^n$.

הדרכה: תוצאה מיידית של תרגיל 10.

12. הוכח כי לכל n מספרים מרוכבים $z_1,z_2,\ldots,z_n\in\mathbb{C}$ מתקיים אי-שוויון המשולש המוכלל

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \le \sum_{k=1}^{n} |z_k| \tag{1.24}$$

13. הוכח כי כל מספר מרוכב z מקיים את אי-השוויון $|\mathrm{Re}\,(z)|+|\mathrm{Im}\,(z)|\le\sqrt{2}|z|$.

14. הוכח כי לכל x ממשי $\left|\frac{x-i}{x+i}\right|=1$.

15. הוכח שאם $z=e^{\frac{2\pi k}{n}}$ הוא שורש יחידה מסדר n, כך ש־k, n, זרים, אז קבוצת החזקות שלו

$$\left\{ z^j \,:\, j=0,1,2,\ldots,n-1 \right\}$$

זהה לכל שורשי היחידה מסדר n.

הדרכה: שני מספרים שלמים k, n, נקראים **זרים**, אם המחלק המשותף היחיד שיש להם הוא 1. ניתן להסתמך על טענה בסיסית בתורת המספרים שאם $k<n$, אז הכפולות jk מודולו n, $j=0,1,2,\ldots,n-1$, יוצרים את כל המספרים 0, 1, $\ldots$, $n-1$.

16. הוכח כי עבור כל $z\neq 1$

$$1+z+z^2+\cdots+z^n=\frac{1-z^{n+1}}{1-z}$$

הדרכה: נסמן $S=1+z+\cdots+z^n$. בדוק למה שווה הביטוי $S-zS$ וחלץ את S.

17. על ידי שימוש בתרגיל הקודם, הוכח כי עבור כל זווית $0<\theta<2\pi$,

$$1+\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots+\cos n\theta=\frac{1}{2}+\frac{\sin\frac{(2n+1)\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}}$$

18. הוכח: לכל $n\ge 2$, סכום כל שורשי היחידה מסדר n הוא 0.

רמז: תרגילים 15, 16.

19. הוכח כי מכפלת כל שורשי היחידה מסדר n הוא $(-1)^{n+1}$.

20. מצא את הצורה הקוטבית $re^{i\theta}$ של $\dfrac{(1-i)^{23}}{(\sqrt{3}-i)^{13}}$.

21. יהי $P(z)$ פולינום בעל מקדמים ממשיים. הוכח כי לכל $z \in \mathbb{C}$, $\overline{P(z)} = P(\overline{z})$.

22. תהי $Q(z)$ פונקציה רציונלית בעלת מקדמים ממשיים. הוכח כי לכל $z \in \mathbb{C}$, $\overline{Q(z)} = Q(\overline{z})$.

23. יהי $P(z)$ פולינום שכל מקדמיו ממשיים. הוכח: אם z שורש של P אז גם הצמוד שלו $\overline{z}$ שורש של P.

24. חשב את $(1+i)^n + (1-i)^n$ עבור כל מספר טבעי n.

25. יהיו $z_1, z_2 \in \mathbb{C} - \{0\}$. הוכח כי $\arg(z_1) = \arg(z_2)$ אם ורק אם קיים ממשי $r > 0$ כך ש־$z_1 = rz_2$.

הדרכה: הצץ שוב בתרגילים 6, 8.

26. יהיו z_1, z_2, z_3, שלוש נקודות שונות על מעגל היחידה $|z| = 1$. הוכח: אם $z_1+z_2+z_3 = 0$ אז z_1, z_2, z_3 הן קודקודים של משולש שווה צלעות.

27. יהיו z_1, z_2, z_3, z_4, ארבע נקודות שונות במישור המרוכב. הוכח: z_1, z_2, z_3, z_4 הן קודקודי מקבילית אם ורק אם $z_1 + z_3 = z_2 + z_4$ ובנוסף $\operatorname{Im}\left(\frac{z_1-z_3}{z_1-z_2}\right) \neq 0$.

הדרכה: התנאי השני דרוש בכדי להבטיח שמדובר במקבילית לא מנוונת על ידי דרישה שהזווית בין שתי צלעות סמוכות אינה אפס. העזר בתרגילים 6, 8.

28. יהיו z_1, z_2, z_3, z_4, ארבע נקודות שונות במישור המרוכב. מצא תנאי אלגברי פשוט ככל האפשר ששקול לכך שארבעת הנקודות הנ"ל הן: **א.** קודקודי ריבוע, **ב.** קודקודי מלבן.

29. אם z_1, z_2, הן שני קודקודי ריבוע, מצא את שני הקודקודים הנותרים. קח בחשבון את כל האפשרויות.

30. נתונות z_1, z_2, z_3, שלוש נקודות שונות על מעגל במישור המרוכב. מצא נוסחה עבור המרכז והרדיוס של המעגל.

31. הוכח או הפרך על ידי דוגמה נגדית: לכל $z_1, z_2, z \in \mathbb{C} - \{0\}$ מתקיים

$$\begin{aligned} \operatorname{Arg}(z_1 z_2) &= \operatorname{Arg}(z_1) + \operatorname{Arg}(z_2) \\ \operatorname{Arg}(z_1/z_2) &= \operatorname{Arg}(z_1) - \operatorname{Arg}(z_2) \\ \operatorname{Arg}(\overline{z}) &= -\operatorname{Arg}(z) \end{aligned}$$

32. הוכח כי שלושה מספרים מרוכבים $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ מהווים קודקודים של משולש שווה צלעות אם ורק אם $z_1 + \alpha z_2 + \alpha^2 z_3 = 0$. כאשר α הוא שורש של $z^3 = 1$.

הדרכה: מומלץ להציץ בתרגילים 6, 8.

33. הוכח שאם $|z_1| = |z_2| = |z_3|$, כאשר z_1, z_2, z_3 שלושה מספרים מרוכבים שונים אז $\arg\left(\frac{z_2-z_3}{z_1-z_3}\right) = \frac{1}{2}\arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right)$.

הדרכה: מומלץ להציץ בתרגילים 6, 8.



34. יהיו z_1, z_2, z_3 שלוש נקודות שונות במישור המרוכב, ותהי $\theta \in \arg\left(\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}\right)$. הוכח כי

$$|z_3 - z_2|^2 = |z_2 - z_1|^2 + |z_3 - z_1|^2 - 2|z_2 - z_1|\,|z_3 - z_1|\cos\theta$$

הדרכה: התבונן במשולש שנוצר על ידי הנקודות z_1, z_2, z_3. היזכר בנוסחת הקוסינוס מבית הספר התיכון. הצץ שוב בתרגילים 6, 8.



35. הוכח כי $(1 + \cos\theta + i\sin\theta)^n = 2^n \cos^n\frac{\theta}{2}$ עבור כל זווית θ ומספר טבעי n.

רמז: מצא הצגה קוטבית של $1 + \cos\theta + i\sin\theta = re^{\alpha i}$.

36. הוכח כי ניתן להגדיר את פונקציית הארגומנט arg גם באופן הבא

$$\arg(x+iy) = \begin{cases} \arctan\frac{y}{x} + \frac{\pi}{2}[1 - \operatorname{sign}(x)], & x \neq 0 \\ \frac{\pi}{2}\operatorname{sign}(y), & x = 0 \text{ and } y \neq 0 \\ \text{לא-מוגדר}, & x = 0 \text{ and } y = 0 \end{cases} \tag{1.25}$$

כאשר פונקציית הסימן $\operatorname{sign}(x)$ היא פונקציה ממשית המוגדרת על ידי

$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} +1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$



37. נגדיר את קבוצת המטריצות

$$\mathbb{F} = \left\{ \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} : \; a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

א. הוכח כי הקבוצה $\mathbb{F}$ היא בו־זמנית תת-מרחב וקטורי של מרחב המטריצות $\mathbb{R}^{2\times 2}$ וגם **שדה** תחת הפעולות הסטנדרטיות של חיבור וכפל מטריצות. איבר האפס של השדה הוא **מטריצת האפס** $\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$, ואיבר היחידה של השדה הוא **מטריצת היחידה** $I=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$. עליך להוכיח כי $\mathbb{F}$ מקיימת את כל שבעת הדרישות של הגדרה 1.1 של שדה.

ב. מצא מטריצה $J\in\mathbb{F}$ אשר עבורה $J^2=-I$.

ג. הוכח כי השדה $\mathbb{F}$ **איזומורפי** לשדה המספרים המרוכבים $\mathbb{C}$. כלומר, קיימת העתקה חד-חד-ערכית ועל $T:\mathbb{C}\to\mathbb{F}$ כך שעבור כל שני איברים $z_1,z_2\in\mathbb{C}$ מתקיים $T(z_1+z_2)=T(z_1)+T(z_2)$, $T(z_1z_2)=T(z_1)T(z_2)$.

קישור לפתרונות

פרק 2

קבוצות של מספרים מרוכבים

2.1 קבוצות יסודיות במישור המרוכב

נציג רשימה של קבוצות נקודות שכיחות ובסיסיות במישור שנפגוש במהלך הקורס.

קו ישר

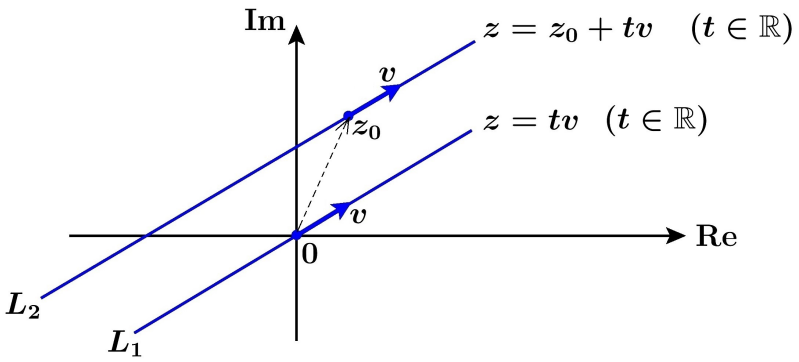
- קו ישר במישור מתאפיין על ידי נקודה $z_0 = x_0 + y_0 i$ שנמצאת עליו, ועל ידי וקטור כיוון $v = a + bi \in \mathbb{C}$. כזכור מהפרק הראשון, מספר מרוכב עשוי לייצג נקודה במישור הדו-מימדי וגם וקטור במרחב הוקטורי $\mathbb{R}^2$!
- יהי t פרמטר ממשי, אזי אוסף כל הנקודות $z = tv$, הנוצרות מהכפלת הוקטור $v = a + bi$ בפרמטר t, הוא קו ישר במישור המרוכב (ראה ישר L_1 בשרטוט 2.1). נוכל לכן לרשום

$$L_1 = \{\, tv : \ t \in \mathbb{R} \,\}$$

המשמעות הגאומטרית של הביטוי tv היא מתיחה או כיווץ של הוקטור v, ולכן כל הנקודות הנוצרות כתוצאה מכך יוצרות למעשה קו ישר L_1. כזכור מהפרק הראשון, חיבור של מספר מרוכב שקול לחיבור וקטורי, ולכן אוסף הנקודות $z = z_0 + tv$ הוא למעשה הזזה של הישר L_1 על ידי הוקטור z_0, כפי שרואים בשרטוט 2.1.

$$L_2 = \{\, z_0 + tv : \ t \in \mathbb{R} \,\}$$

הפירוש הפיזיקאלי המקובל של v וקטור מהירות (הכולל גודל וכיוון), t נקרא לפעמים **פרמטר הזמן**.



איור 2.1: משוואת הישר L_1 היא $z = tv$. משוואת הישר L_2 היא $z = z_0 + tv$. כאשר v הוא וקטור כיוון בשני המקרים.

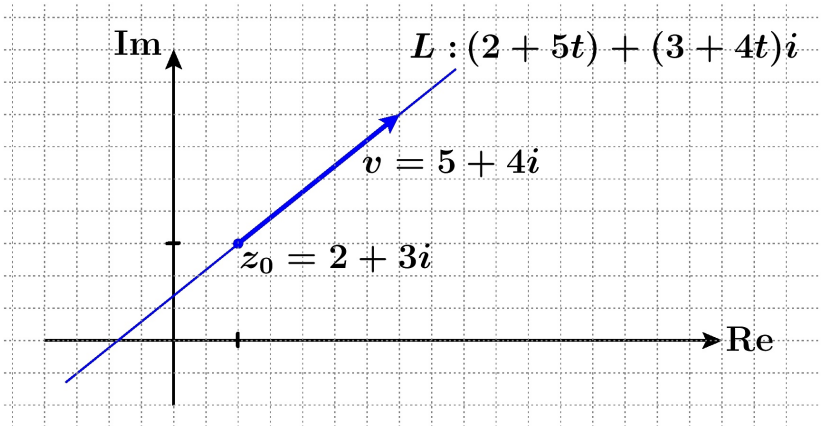
ניתן לרשום את משוואת הישר גם בצורה הפרמטרית המוכרת לנו מהגאומטריה האנליטית

$$z = z_0 + tv = x_0 + y_0 i + t(a + bi) = (x_0 + at) + (y_0 + bt)i$$

דוגמה 1: את משוואת הישר העובר דרך הנקודה $z_0 = 2 + 3i$ בכיוון $v = 5 + 4i$ נוכל לקבל על ידי

$$z = z_0 + tv = 2 + 3i + t(5 + 4i) = (2 + 5t) + (3 + 4t)i$$

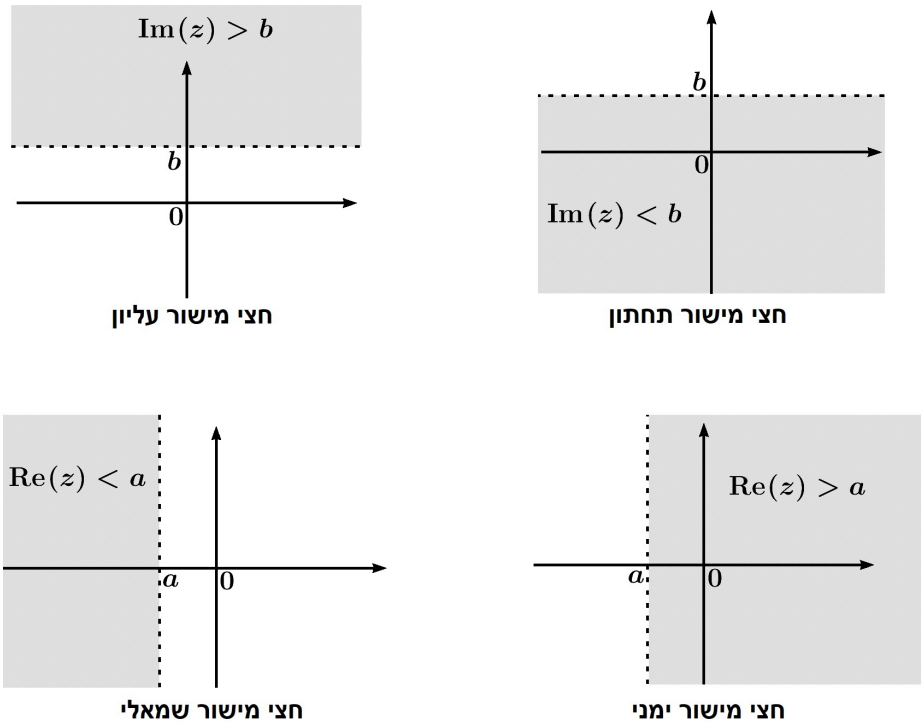
הצורה האחרונה היא למעשה ההצגה הפרמטרית של קו ישר במישור.



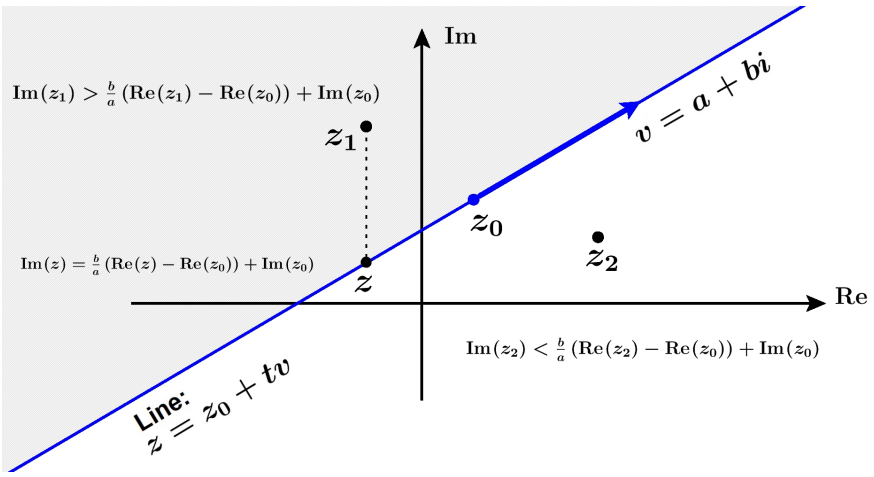
איור 2.2: משוואת הישר $2 + 3i + t(5 + 4i) = (2 + 5t) + (3 + 4t)i$

חצי מישור

כל קו ישר במישור המרוכב חוצה אותו לשני חצאי מישור. בשרטוטים 2.3, 2.4 מוצגות דוגמאות מתאימות.



איור 2.3: חצי מישור עליון ותחתון. חצי מישור ימני ושמאלי. לא כולל שפה (פתוח).



איור 2.4: חצי-מישור עליון מעל לישר $z = z_0 + tv$

קו ישר שאינו אופקי או אנכי ניתן לאפיין על ידי המשוואה

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{b}{a} \qquad (x \neq x_0)$$

כאשר $v = a + bi$ הוא וקטור כיוון של הישר (ולכן $\frac{b}{a}$ הוא **השיפוע** של הישר), ו־$z_0 = x_0 + iy_0$

היא נקודה נתונה על הישר, $z = x + iy$ נקודה כללית. המשוואה הכללית היא אם כן

$$y = \frac{b}{a}(x - x_0) + y_0$$

בסימון מרוכב נוכל לרשום

$$\mathrm{Im}\,(z) = \frac{b}{a}\left(\mathrm{Re}\,(z) - \mathrm{Re}\,(z_0)\right) + \mathrm{Im}\,(z_0)$$

בשרטוט 2.4 רואים שבכדי שנקודה z_1 תמצא מעל הישר היא צריכה לקיים

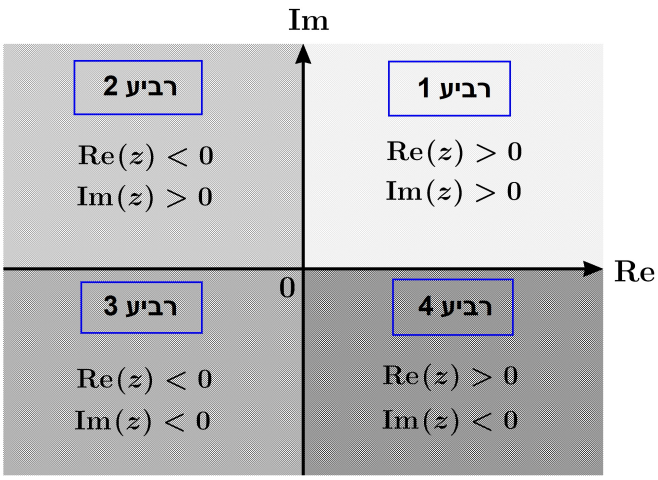
$$\mathrm{Im}\,(z_1) > \frac{b}{a}\left(\mathrm{Re}\,(z_1) - \mathrm{Re}\,(z_0)\right) + \mathrm{Im}\,(z_0)$$

בכדי שנקודה z_2 תמצא מתחת הישר היא צריכה לקיים

$$\mathrm{Im}\,(z_2) < \frac{b}{a}\left(\mathrm{Re}\,(z_1) - \mathrm{Re}\,(z_0)\right) + \mathrm{Im}\,(z_0)$$

רביע (quadrant)

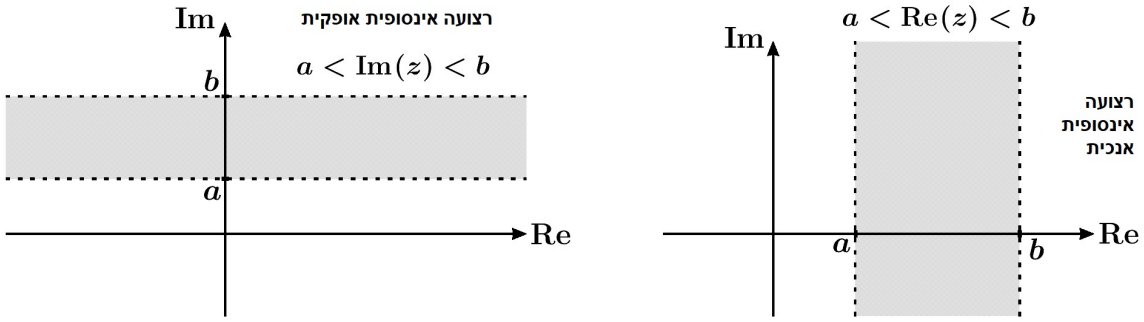
כמו המישור הממשי, גם המישור המרוכב מתחלק לארבעה **רביעים**. ראה שרטוט 2.5.



איור 2.5: חלוקת המישור המרוכב לארבעה רבעים: רביע 1, רביע 2, רביע 3, ורביע 4

רצועה אינסופית

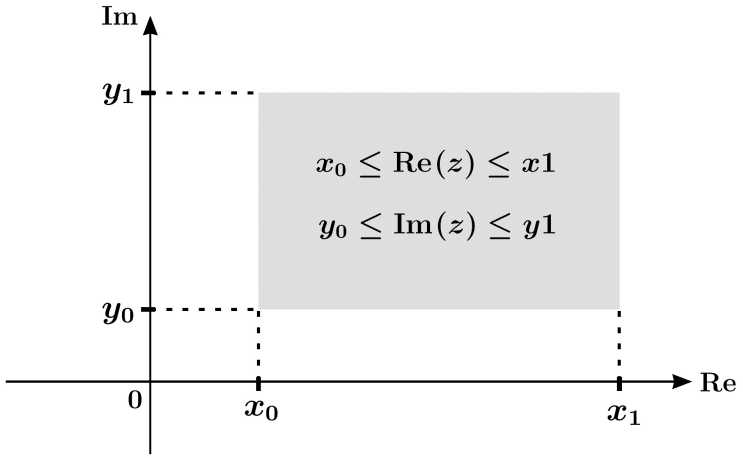
- רצועה אינסופית אנכית היא קבוצת כל הנקודות במישור המרוכב אשר הרכיב הממשי שלהם נמצא בין שני ערכים a, b.
- רצועה אינסופית אופקית היא קבוצת כל הנקודות במישור המרוכב אשר הרכיב המדומה שלהם נמצא בין שני ערכים a, b.
- בשרטוט 2.6 מוצגות רצועות **פתוחות** במובן זה שאינן כוללות את קווי הגבול שלהן. מקובל לסמן זאת על ידי קו מרוסק. רצועות **סגורות** מתקבלות אם נחליף את סימן האי-שוויון $<$ בסימן $\leq$.



איור 2.6: רצועה אינסופית אופקית ואנכית (פתוחה - ללא שפת התחום)

מלבן

- תחום מלבני קנוני במישור המרוכב מתאפיין על ידי חסם תחתון ועליון על הרכיב הממשי והרכיב המדומה

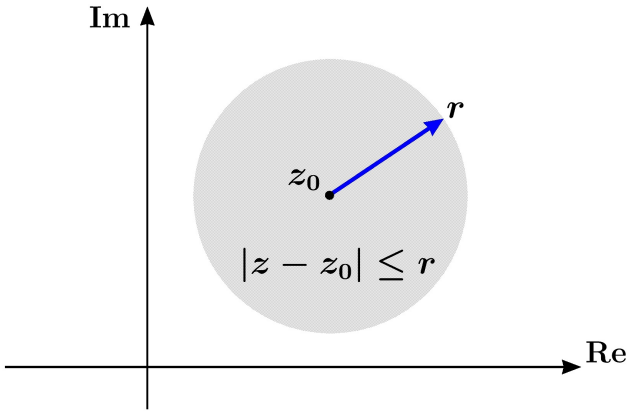


איור 2.7: תחום מלבני קנוני במישור המרוכב

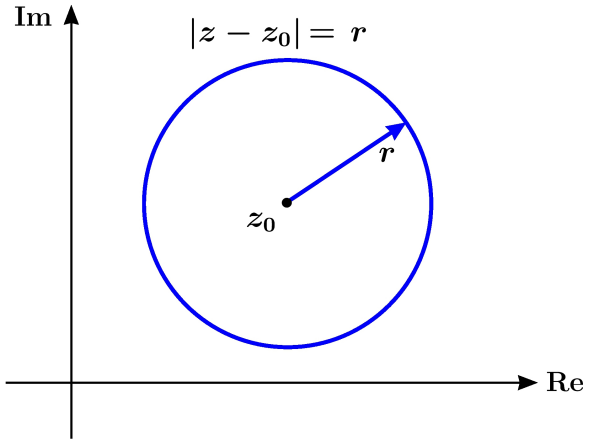
משוואת מלבן כללי במישור המרוכב היא יותר מורכבת ואנו משאירים אותה כתרגיל לתלמיד (ראה תרגיל 27 בפרק 1, ותרגיל 5 בסוף הפרק הנוכחי).

עיגול (Disk) ומעגל (Circle)

- עיגול הוא אוסף כל הנקודות z אשר מרחקן מנקודה נתונה z_0 חסום על ידי קבוע ממשי חיובי $r > 0$ (**רדיוס העיגול**).
- מעגל הוא אוסף כל הנקודות z אשר מרחקן מנקודה נתונה z_0 הוא r (**רדיוס המעגל**).



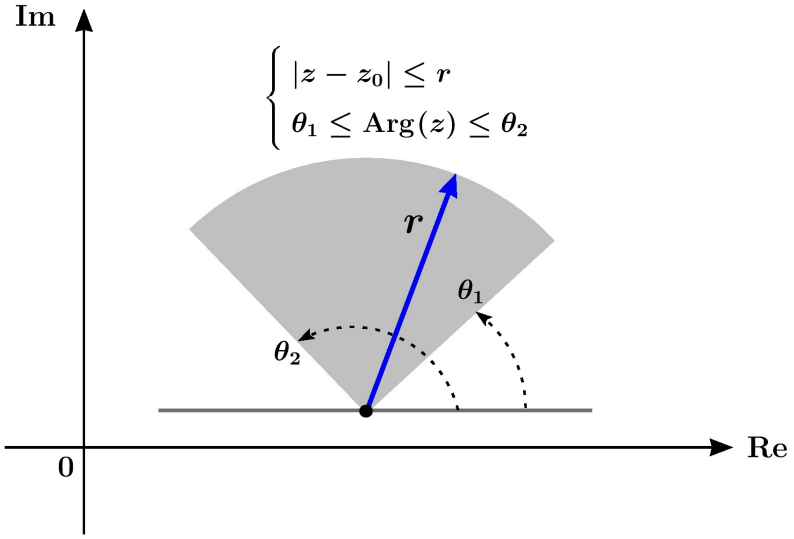
איור 2.8: משוואת עיגול סגור (דיסק) במישור המרוכב



איור 2.9: משוואת מעגל במישור המרוכב: $|z - z_0| = r$

גיזרת עיגול

- גיזרת עיגול היא השטח הכלוא בין המעגל ושני קרניים היוצאות ממרכז המעגל

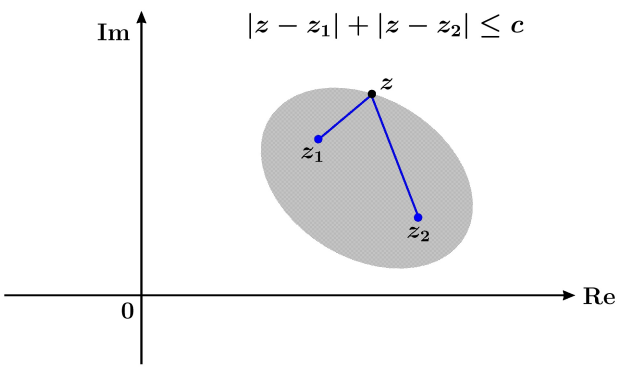


איור 2.10: משוואת גיזרת עיגול במישור המרוכב

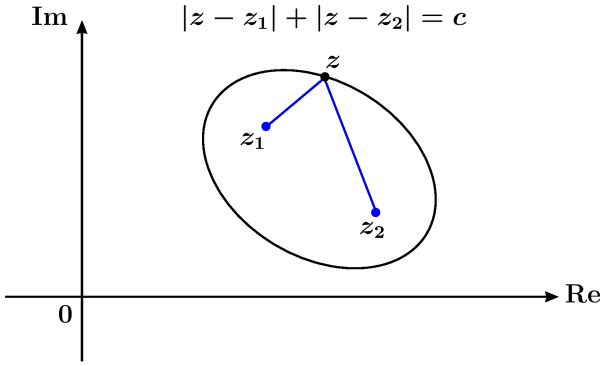
אליפסה

במישור המרוכב, למשוואה הכללית של האליפסה מלאה יש צורה פשוטה ואלגנטית. אליפסה מתאפיינת על ידי שני מוקדים z_1, z_2, וקבוע ממשי חיובי $c > 0$. היקף האליפסה היא המקום הגאומטרי של כל הנקודות במישור אשר סכום המרחקים שלהם מהמוקדים הוא c. קל להשתכנע באמצעות שיקולים גאומטריים כי האליפסה המלאה (הכוללת את הפנים שלה) מתאפיינת על ידי אי-השוויון בשרטוט 2.11.

בהמשך הפרק נפגוש גם בהצגה הפרמטרית של היקף האליפסה.



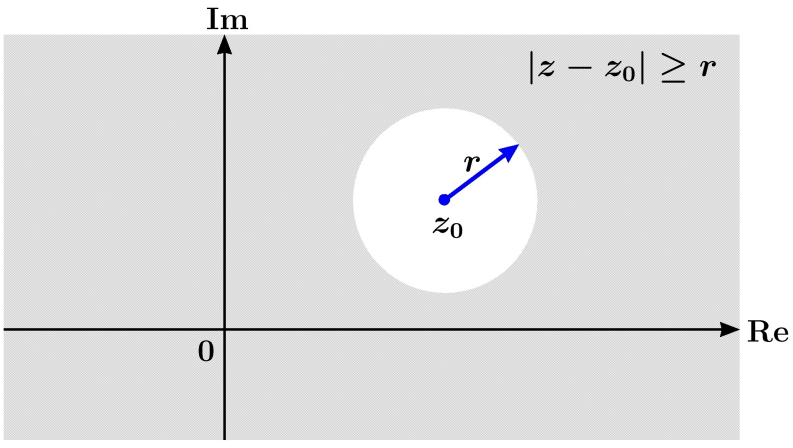
איור 2.11: משוואת אליפסה מלאה (כולל שטח פנימי)



איור 2.12: משוואת אליפסה (היקף) במישור המרוכב

מישור מחורר

מישור מחורר הוא המישור המרוכב לאחר שקדחו בו "חור" בנקודה z_0 ברדיוס r כפי שרואים בשרטוט 2.13.

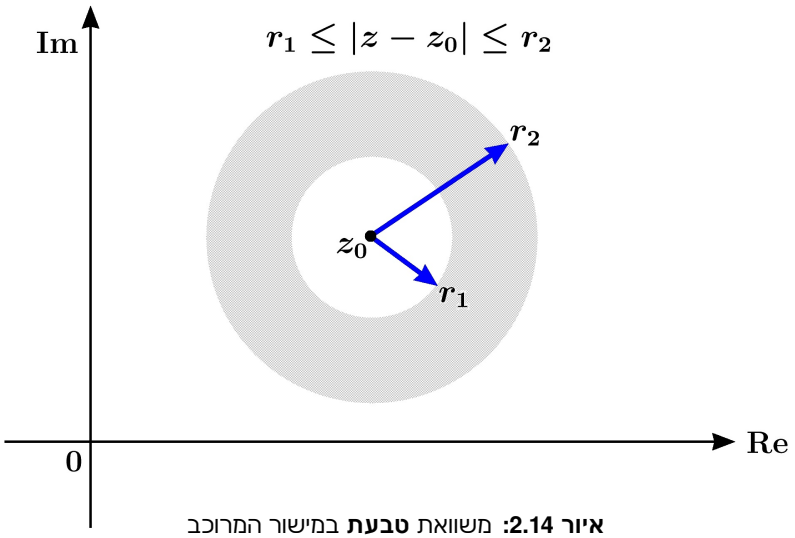


איור 2.13: איפיון מישור מחורר (הקבוצה המשלימה של עיגול)

יש כמובן להבחין בין **מישור מחורר פתוח** $|z-z_0| > r$ לבין **מישור מחורר סגור** $|z-z_0| \ge r$. הערה זהה חלה על כל הקבוצות המוצגות בסקירה זו, ולא נטרח להזכיר זאת עבור כל מקרה ומקרה.

טבעת

טבעת היא השטח הכלוא בין שני מעגלים בעלי מרכז משותף. בהקשרים שנפגוש בהמשך הקורס, רצוי לפעמים לתאר טבעת כחיתוך שבין עיגול $|z-z_0| \le r_2$ ומישור מחורר $|z-z_0| \ge r_1$.

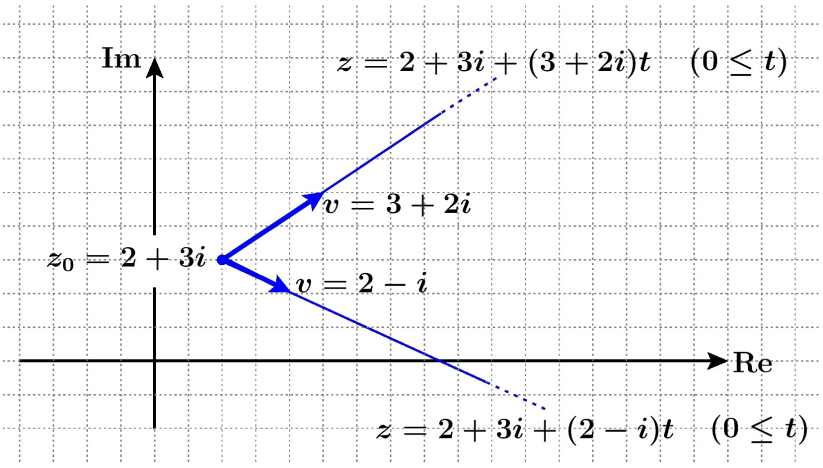


איור 2.14: משוואת **טבעת** במישור המרוכב

קרן

קרן היא למעשה חצי קו ישר וניתן להגדירה באמצעות משוואת ישר עם הגבלה על פרמטר הזמן t לחצי ישר ממשי באמצעות אחד מארבעת התנאים הבאים: $t \ge t_0$, $t > t_0$, $t \le t_0$, $t < t_0$.

דוגמה 2: בשרטוט 2.15 מוצגים שני קרניים שיוצאים מהנקודה $z_0 = 2+3i$. הקרן התחתונה נוסעת בכיוון הוקטור $v = 2-i$ והקרן העליונה בכיוון $v = 3+2i$.



איור 2.15: שתי משוואות של שני קרניים במישור המרוכב

קטע (segment)

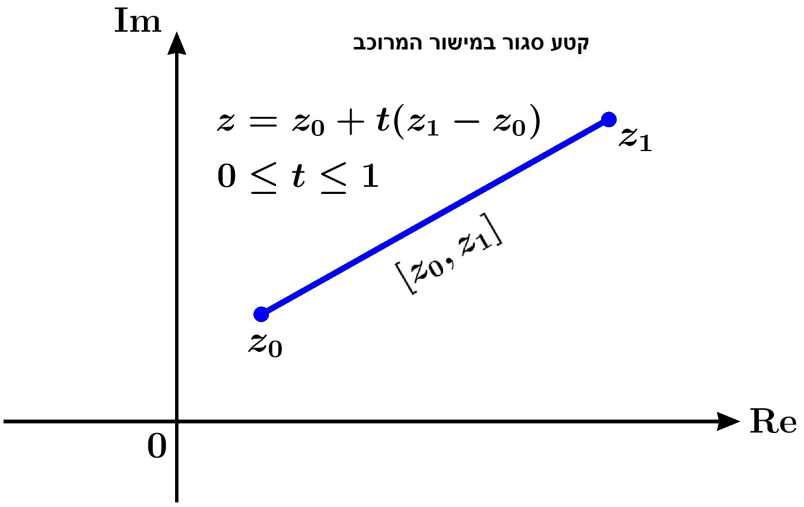
קטע במישור המרוכב ניתן לתאר על ידי משוואת ישר $z = z_0 + tv$, שבו פרמטר הזמן t מוגבל לקטע ממשי באחת מהצורות הבאות:

$$[t_0, t_1], \quad [t_0, t_1), \quad (t_0, t_1], \quad (t_0, t_1)$$

במקרה הראשון נקבל **קטע סגור**, ובמקרה הרביעי נקבל **קטע פתוח**. במקרה השני והשלישי נקבל קטע **חצי-פתוח** (או **חצי-סגור**). במקרה המיוחד שבו נתונים לנו קצות הקטע z_0, z_1 (ראה שרטוט 2.16), נוכל לקחת וקטור כיוון $v = z_1 - z_0$ ונקודת התחלה z_0. לכן משוואת הקטע (הסגור) תהיה

$$\begin{cases} z = z_0 + t(z_1 - z_0) \\ 0 \le t \le 1 \end{cases}$$

כמובן אפשר לבחור בוקטור ההפוך $u = z_0 - z_1$ ולקבל משוואה שקולה נוספת. למעשה כל כפולה של הוקטור $v = z_1 - z_0$ תתאים, ולכן קיימות אינסוף דרכים להציג את אותו ישר. בדומה לסימון לשדה המספרים הממשיים, מקובל לסמן קטע מרוכב על ידי $[z_0, z_1]$.

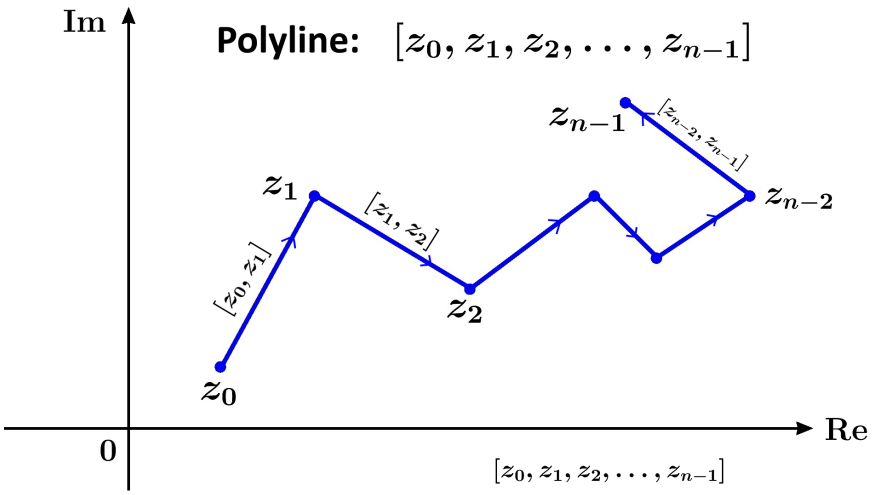


איור 2.16: פרמטריזציה של **קטע סגור** $[z_0, z_1]$ במישור המרוכב

קו שבור (polyline)

שירשור של קטעים $[z_0, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}]$ ייקרא **קו שבור**. יש לשים לב לסימון המקוצר

$$[z_0, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}] = [z_0, z_1] \cup [z_1, z_2] \cup \cdots \cup [z_{n-2}, z_{n-1}]$$

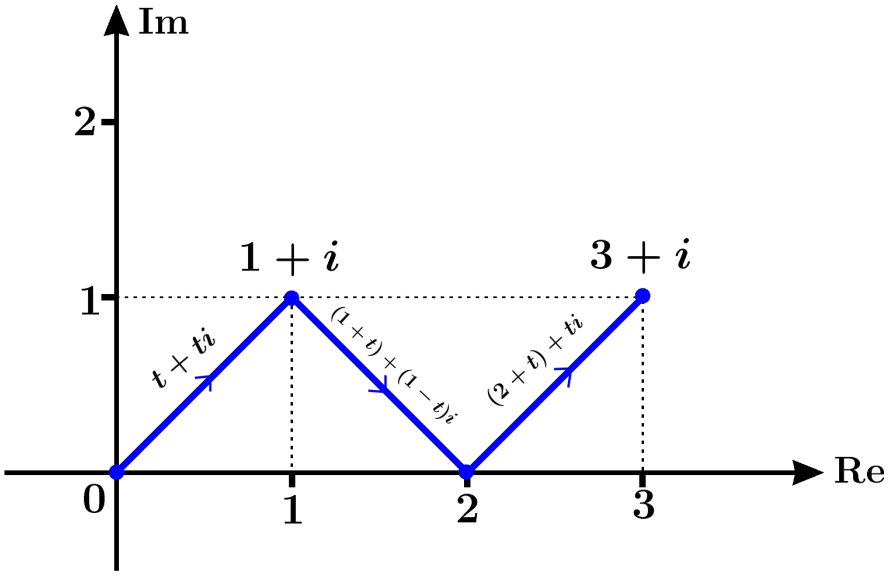


איור 2.17: משוואת **קו שבור** $[z_0, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}]$ במישור המרוכב

דוגמה 3: בשרטוט 2.18 ניתן לצפות בקו השבור $[0, 1+i, 2, 3+i]$ המורכב משלושה קטעים

$$[0, 1+i, 2, 3+i] = [0, 1+i] \cup [1+i, 2] \cup [2, 3+i]$$

$$= \{\, t+ti : \ 0 \le t \le 1 \,\} \cup \{\, (1+t)+(1-t)i : \ 0 \le t \le 1 \,\} \cup \{\, (2+t)+ti : \ 0 \le t \le 1 \,\}$$



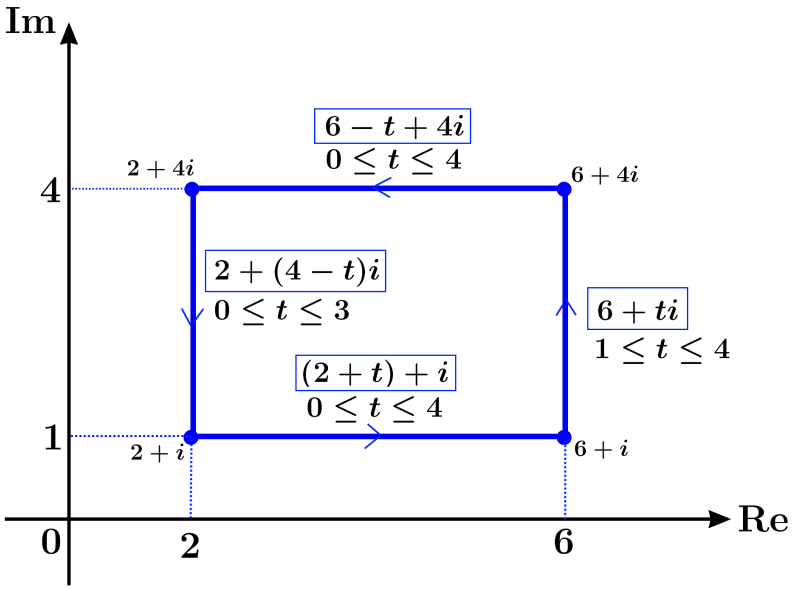
איור 2.18: קו שבור $[0, 1+i, 2, 3+i]$ המורכב משלושה קטעים סגורים

קו שבור שבו נקודת ההתחלה היא גם נקודת הסוף, נקרא **קו שבור סגור** או בקיצור **מצולע (Polygon)**.

דוגמה 4: היקף מלבן הוא מצולע בעל ארבעה קטעים. דוגמה פשוטה למלבן היא

$$[2+i, 6+i, 6+4i, 2+4i, 2+i]$$

בשרטוט 2.19 רשומים ההצגות הפרמטריות של כל אחד מצלעות המלבן



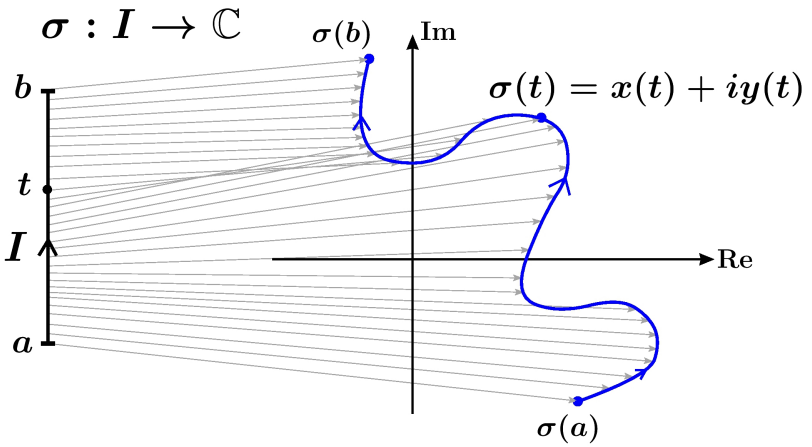
איור 2.19: משוואות הקטעים של המלבן $[2+i, 6+i, 6+4i, 2+4i, 2+i]$

מסלולים

מסלולים במישור המרוכב הם הכללה טבעית של קווים שבורים לקווים כלליים שאינם בהכרח ישרים. יש להם הצגה פרמטרית והם חד-מימדיים, אבל יש להם גם כיוון תנועה. ההגדרה הפורמלית של **מסלול** σ היא על ידי פונקציה **רציפה**

$$\sigma : I \to \mathbb{C}$$

כאשר $I \subseteq \mathbb{R}$ הוא קטע ממשי (סגור, פתוח, חצי-פתוח, סופי, אינסופי).



איור 2.20: מסלול $\sigma : I \to \mathbb{C}$ כהעתקה רציפה בין קטע ממשי I למישור המרוכב $\mathbb{C}$

יש לשים לב לכך כי דרישת **הרציפות** היא חלק מהותי של הגדרת מסלול!

- מקובל לפעמים להציג את פונקציית המסלול $\sigma(t)$ כאשר החלק הממשי הוא $x(t)$, והחלק המדומה הוא $y(t)$

$$\sigma(t) = x(t) + iy(t)$$

הפונקציות $x(t)$, $y(t)$ הן פונקציות ממשיות בקטע I.

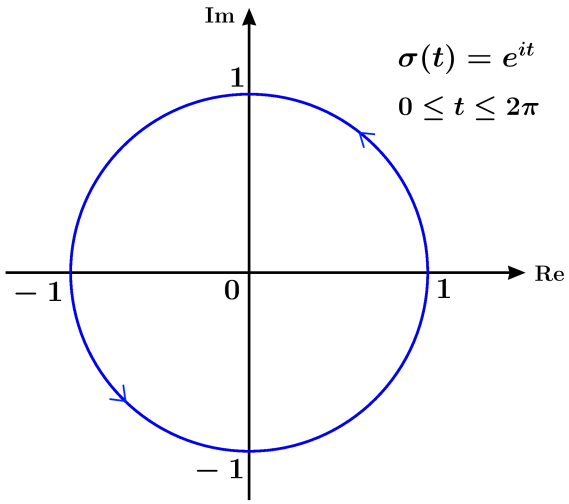
- ברוב המקרים מועיל לחשוב על σ כעל מסלול תנועה של חלקיק פיזיקלי במישור המרוכב. בכל נקודת זמן $t \in I$, $\sigma(t) = x(t) + iy(t)$ היא הנקודה שבה נמצא החלקיק בזמן t. לכן הפונקציה σ היא יותר מתאור של קבוצת נקודות במישור המרוכב. זהו למעשה תאור של תנועת חלקיק אשר ניתן לגזור ממנו את המיקום, המהירות, והתאוצה של החלקיק בכל נקודת זמן t.

- **דוגמה 5:** הדוגמה הקנונית של מסלול היא מעגל היחידה $|z| = 1$, אשר ההצגה הפרמטרית שלו היא

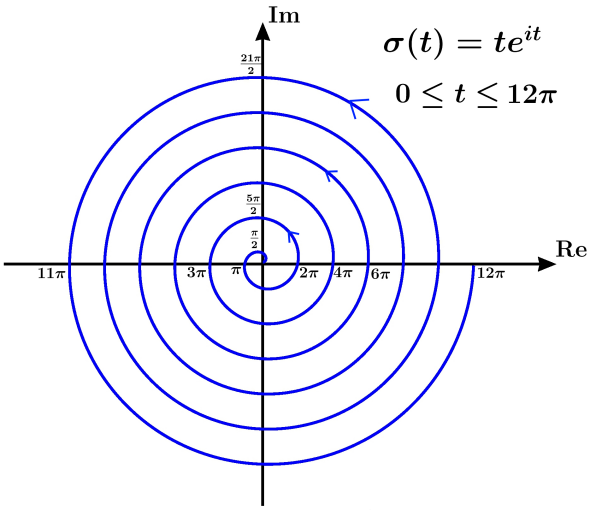
$$\sigma(t) = e^{it} = \cos t + i \sin t$$

ופרמטר הזמן t נע בתחום $[0, 2\pi]$. במונחי תנועה, זהו מסלול של חלקיק הנע לאורך מעגל היחידה $|z| = 1$ במהירות קבועה נגד כיוון השעון. ראה שרטוט 2.21.

- **דוגמה 6:** דוגמה טיפוסית נוספת היא **הספירלה** $\sigma(t) = te^{it}$. במקרה זה ניתן לבחור בקטע זמן גדול יותר כגון $I = [0, 12\pi]$ שבו הספירלה תבצע 6 סיבובים. ראה שרטוט 2.22.



איור 2.21: המסלול $\sigma(t) = e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$ - מעגל היחידה

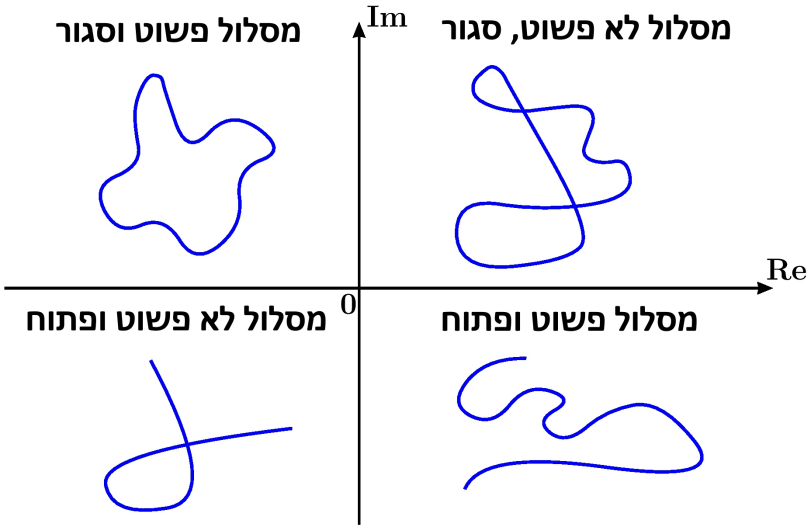


איור 2.22: המסלול $\sigma(t) = te^{it}$, $0 \le t \le 12\pi$ - ספירלה

- מסלול $\sigma : [a, b] \to \mathbb{C}$ נקרא **מסלול סגור** אם $\sigma(a) = \sigma(b)$. אחרת, הוא נקרא **מסלול פתוח**. המסלול σ נקרא **מסלול פשוט** אם הוא אינו חותך את עצמו בנקודת זמן פנימית $a < t < b$. בשרטוט 2.23 מוצגים ארבעה סוגי מסלולים טיפוסיים.

- מסלול פשוט וסגור נקרא גם **מסלול ז'ורדן** על שמו של המתמטיקאי קמיל ז'ורדן, אשר הוכיח

את המשפט היסודי לגביו (משפט 2.13 בסעיף 2.3). באופן שקול, $\sigma:[a,b]\to\mathbb{C}$ הוא מסלול ז'ורדן אם $\sigma(a)=\sigma(b)$ ו־ σ חד-חד-ערכית ב־ $[a,b)$.



איור 2.23: ארבעה סוגי מסלולים טיפוסיים

תכונות יסוד של קבוצות

- נוכל להמשיך ולמנות עוד ועוד מיני קבוצות במישור המרוכב, אך כאמור מדובר ברשימה חלקית בלבד של קבוצות בסיסיות אשר ניתן לבנות מהן קבוצות יותר מורכבות באמצעות פעולות כגון איחוד, חיתוך, וחיסור. מטרת הרשימה הזו היא רק להעביר את צורות הביטוי הפשוטות שבאמצעותן ניתן להגדיר קבוצות במישור המרוכב. בהמשך החוברת נפגוש דוגמאות נוספות.
- נציג עכשיו כמה תכונות בסיסיות שבאמצעותן נמיין קבוצות. המיון היותר חשוב על פי מבנה טופולוגי יוצג בסעיף הבא.

הגדרה 2.1: קבוצה $S\subseteq\mathbb{C}$ נקראת **קבוצה סופית** אם היא מכילה מספר סופי של נקודות. אחרת S נקראת **קבוצה אינסופית**.

הגדרה 2.2: תהי S קבוצת נקודות במישור המרוכב. הקבוצה S נקראת **חסומה** אם קיים עיגול D כך ש־ $S\subseteq D$.

- נוכל לנסח זאת גם בצורה המוכרת לנו מהישר הממשי: הקבוצה S היא **חסומה** אם קיים ממשי חיובי $R>0$ כך שלכל $z\in S$, $|z|\le R$.

הגדרה 2.3: הקוטר (diameter) של קבוצה חסומה S מוגדר להיות החסם העליון של

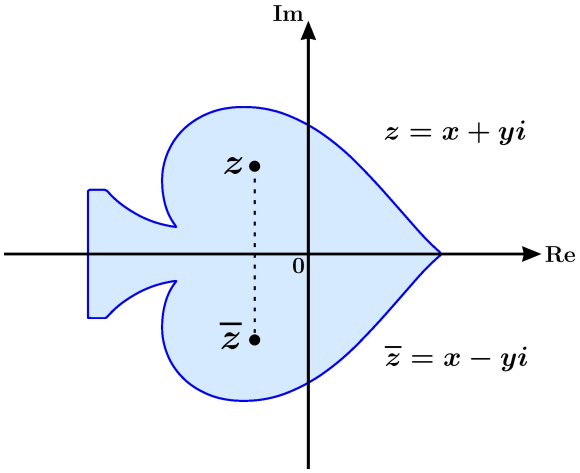
המרחק בין כל שתי נקודות בקבוצה

$$\operatorname{diam}(S) = \sup\{\,|z_1 - z_2| : \; z_1, z_2 \in S\,\}$$

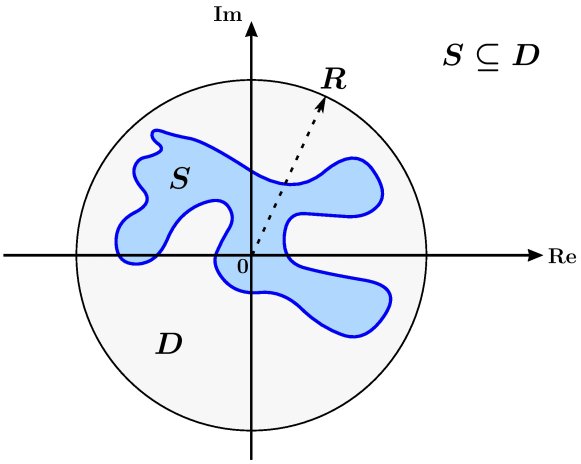
קיומו של הקוטר במקרה בו S חסומה מובטח כי S מוכלת בעיגול מסוים $\mathbb{D}(0,R)$ ולכן אם $z_1, z_2 \in S$ אז בהכרח $|z_1 - z_2| \le 2R$. לכן הקבוצה $\{\,|z_1 - z_2| : \; z_1, z_2 \in S\,\}$ חסומה מלמעלה על ידי $2R$ ולכן יש לה חסם עליון.

הגדרה 2.4: קבוצה $S \subseteq \mathbb{C}$ נקראת **קבוצה סמטרית ביחס לציר הממשי** אם

$$\forall z \in \mathbb{C}: \; z \in S \iff \overline{z} \in S$$



איור 2.24: סמטריה ביחס לציר הממשי



איור 2.25: קבוצה חסומה S

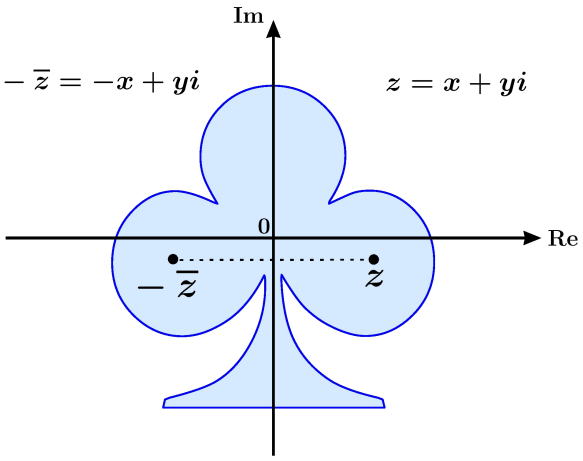
הגדרה 2.5: קבוצה $S \subseteq \mathbb{C}$ נקראת **קבוצה סמטרית ביחס לציר המדומה** אם

$$\forall z \in \mathbb{C}: \; z \in S \iff \overline{-z} \in S$$

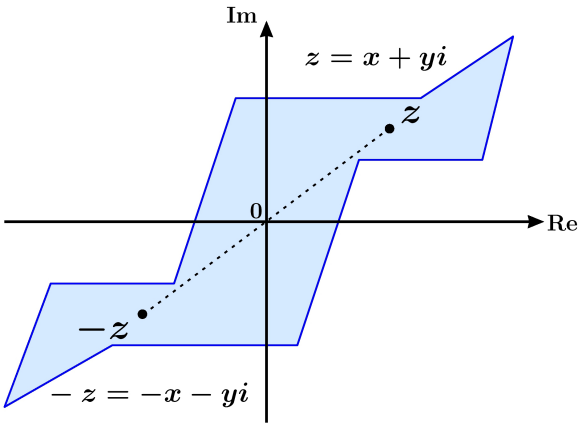
לשם הבהרה, אם $z = x + yi$ אז $\overline{-z} = -x + yi$, שהיא תמונת ראי של z ביחס לציר המדומה.

הגדרה 2.6: קבוצה $S \subseteq \mathbb{C}$ נקראת **קבוצה סמטרית ביחס לראשית הצירים** אם

$$\forall z \in \mathbb{C}: \; z \in S \iff -z \in S$$



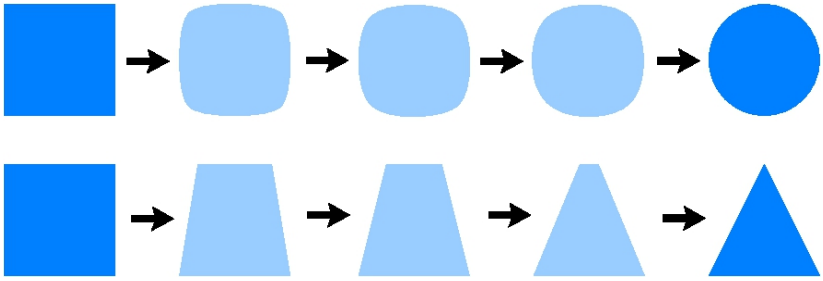
איור 2.27: סמטריה ביחס לציר המדומה



איור 2.26: סמטריה ביחס לראשית הצירים

2.2 טופולוגיה במישור המרוכב

התחום המתימטי הקרוי **טופולוגיה** חוקר את התכונות והמאפיינים של קבוצות אשר נשמרות תחת **עיוותים רציפים** כגון כיווץ, ניפוח, עיקום, סיבוב, וכדומה. למשל, מבחינה טופולוגית ריבוע ועיגול שקולים משום שניתן לבצע עיוות רציף של ריבוע לעיגול. עיגול אינו שקול טופולוגית לטבעת (ראה שרטוט 2.28).



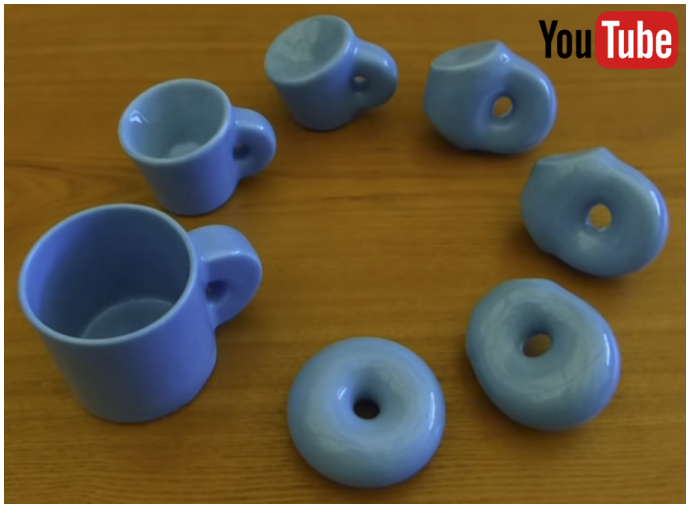
איור 2.28: ריבוע ועיגול שקולים טופולוגית כי ניתן לעוות ברציפות את הריבוע לעיגול. גם ריבוע ומשולש שקולים טופולוגית.

דוגמה נוספת לשקילות טופולוגית בין שתי צורות הנראות שונות מאוד אחת מהשניה רואים בשרטוט 2.29. מבחינה טופולוגית המנעול שבצד שמאל של השרטוט אינו אלא דיסק עם שני חורים! לכן סמל המנעול שקול טופולוגית לכפתור פשוט.



איור 2.29: סמל המנעול שקול טופולוגית לסמל הכפתור - מבחינה טופולוגית מדובר על דיסק עם שני חורים

בשרטוט 2.30 רואים כיצד ספל קפה שקול טופולוגית לסופגניה (במרחב התלת-מימדי). מומלץ לצפות בסרטון היוטיוב המקושר לשרטוט זה עבור דוגמאות מעניינות נוספות!



איור 2.30: טופולוג הוא אדם שאינו מסוגל להבחין בין סופגניה וספל קפה

ההבחנה הטופולוגית היסודית ביותר היא בין **קבוצות פתוחות וקבוצות סגורות**. באמצעות שני מושגי היסוד האלה ניתן לבנות ולנתח את רוב במשפטים בשטח הטופולוגיה ולכן התעמקות בהן דרושה להמשך הקורס. אבל לפני כן דרושים לנו מושג הדיסק הפתוח והדיסק הסגור.

הגדרה 2.7: יהיו z_0 מספר מרוכב, $r>0$ מספר ממשי חיובי. קבוצת הנקודות

$$\mathbb{D}(z_0,r)=\{\,z\in\mathbb{C}:\ |z-z_0|<r\,\}$$

נקראת **דיסק פתוח** במישור המרוכב (או **עיגול פתוח**) סביב הנקודה z_0. הנקודה z_0 נקראת **מרכז הדיסק** והמספר הממשי r נקרא **רדיוס הדיסק**. הקבוצה

$$\overline{\mathbb{D}}(z_0,r)=\{\,z\in\mathbb{C}:\ |z-z_0|\le r\,\}$$

נקראת **דיסק סגור** במישור המרוכב (או **עיגול סגור**) סביב הנקודה z_0 ורדיוסו r.

ברוב הספרים מקובל לסמן שפת קבוצה פתוחה בקו מרוסק, ושפת קבוצה סגורה בקו מלא. בשרטוט 2.32 רואים שתי דוגמאות של דיסק פתוח ודיסק סגור. יש לשים לב לקו המרוסק שמקיף את הדיסק הפתוח $\mathbb{D}(z_0,r)$.

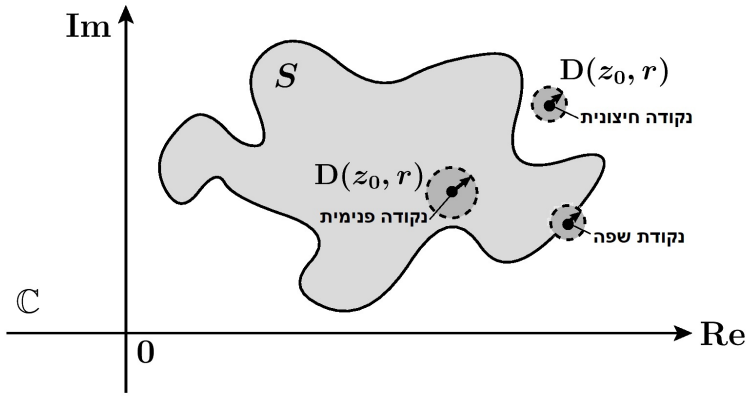
הגדרה 2.8: תהי S קבוצת נקודות במישור המרוכב $\mathbb{C}$, ותהי $z_0\in\mathbb{C}$.

א. הנקודה z_0 נקראת **נקודה פנימית של** S אם קיים דיסק פתוח סביב z_0 המוכל בשלמותו בתוך S. כלומר קיים מספר ממשי $r>0$ כך ש־$\mathbb{D}(z_0,r)\subseteq S$.

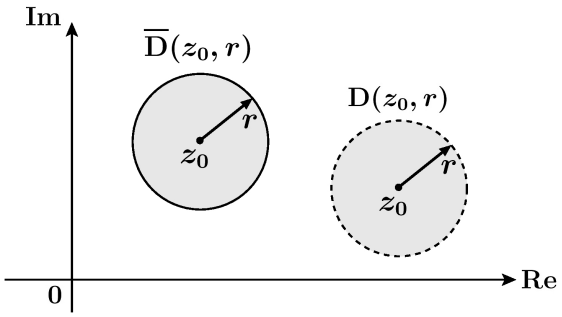
ב. הנקודה z_0 נקראת **נקודה חיצונית של** S אם קיים דיסק פתוח סביב z_0 אשר אינו חותך את S. כלומר קיים מספר ממשי $r>0$ כך ש־$\mathbb{D}(z_0,r)\cap S=\emptyset$.

ג. הנקודה z_0 נקראת **נקודת שפה של הקבוצה** S אם היא אינה נקודה פנימית וגם אינה

נקודה חיצונית של הקבוצה S.



איור 2.31: נקודה פנימית, נקודה חיצונית, ונקודת שפה



איור 2.32: דיסק פתוח $\mathbb{D}(z_0,r)$ ודיסק סגור $\overline{\mathbb{D}}(z_0,r)$

טענה 2.1: נקודה z_0 היא נקודת שפה של קבוצה S אם ורק אם לכל $r>0$ הדיסק הפתוח $\mathbb{D}(z_0,r)$ חותך את S וגם את הקבוצה המשלימה $\mathbb{C}-S$. כלומר

$$\forall r>0: \quad \mathbb{D}(z_0,r)\cap S\neq\emptyset \quad \text{and} \quad \mathbb{D}(z_0,r)\cap(\mathbb{C}-S)\neq\emptyset$$

דוגמה ציורית פשוטה לנקודה פנימית, חיצונית, ושפה, ניתן לראות בשרטוט 2.31. דוגמאות מורכבות יותר נפגוש בהמשך.

דוגמה 7: תהי $S=\mathbb{D}(z_0,r)$ עיגול פתוח ברדיוס r שמרכזו בנקודה z_0. בשרטוט 2.33 לא קשה לראות שכל נקודה בתוך הדיסק היא נקודה פנימית. שפת הדיסק היא המעגל $|z-z_0|=r$, וכל נקודה מחוץ לדיסק הסגור היא נקודה חיצונית.

$$\partial D(z_0,r)=\{\,z\in\mathbb{C}:\ |z-z_0|=r\,\}$$

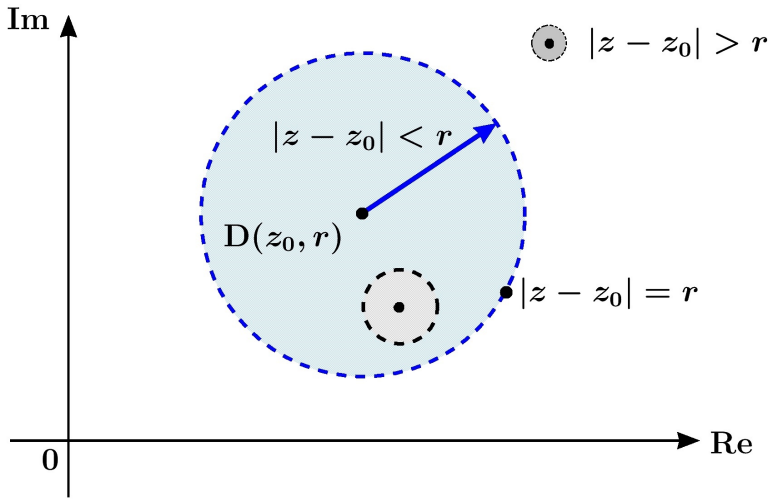
כמובן ההבדל היחיד בין הדיסק הפתוח $\mathbb{D}(z_0,r)$ לדיסק הסגור $\overline{\mathbb{D}}(z_0,r)$ הוא שהדיסק הסגור כולל את השפה שלו בעוד שהדיסק הפתוח אינו כולל את השפה. כל נקודה מחוץ לדיסק הסגור $\overline{\mathbb{D}}(z_0,r)$ היא נקודה חיצונית של S.

נציין כי כל נקודה z שעל המעגל $|z-z_0|=r$ אינה נקודה חיצונית של S למרות שאינה שייכת ל- S!

הגדרה 2.9: תהי S קבוצת נקודות במישור המרוכב $\mathbb{C}$

א. אוסף כל נקודות הפנימיות של קבוצה S נקרא **הפנים (Interior) של** S והוא מסומן על ידי $\mathrm{Int}(S)$.

ב. אוסף כל נקודות החיצוניות של קבוצה S נקרא **החוץ (Exterior) של** S והוא מסומן

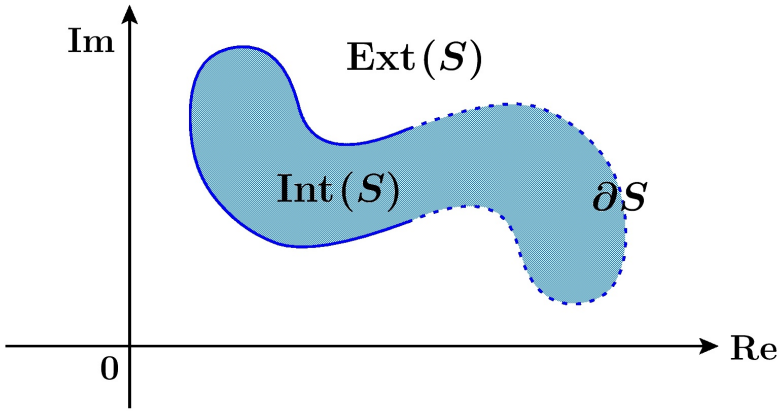


איור 2.33: כל נקודה בתוך הדיסק $\mathbb{D}(z_0,r)$ היא נקודה פנימית, כל נקודה על המעגל היא נקודה שפה, ונקודה מחוץ למעגל היא חיצונית

על ידי $\mathrm{Ext}(S)$.

ג. אוסף כל נקודות השפה של קבוצה S נקרא **השפה (Boundary) של** S והוא מסומן על ידי ∂S.

ד. האיחוד של הקבוצה S עם נקודות השפה שלה ∂S נקרא **הסגור (Closure) של** S והוא מסומן על ידי $\overline{S}$. נוכל לרשום כמובן: $\overline{S}=S\cup\partial S$.



איור 2.34: פנים, חוץ, ושפה של קבוצת נקודות S : $\mathrm{Int}(S)$, $\mathrm{Ext}(S)$, ∂S

בשרטוט 2.34 יש לשים לב לכך שחלק מהנקודות של השפה ∂S שייכות לקבוצה S (קו רציף) בעוד שחלק מנקודות השפה אינן שייכות לקבוצה S (קו מרוסק). בכל מקרה, הנקודות על הקו המרוסק של השפה אינן נקודות חיצוניות! הן אינן כלולות בחוץ של S! הן שייכות לשפה ∂S.

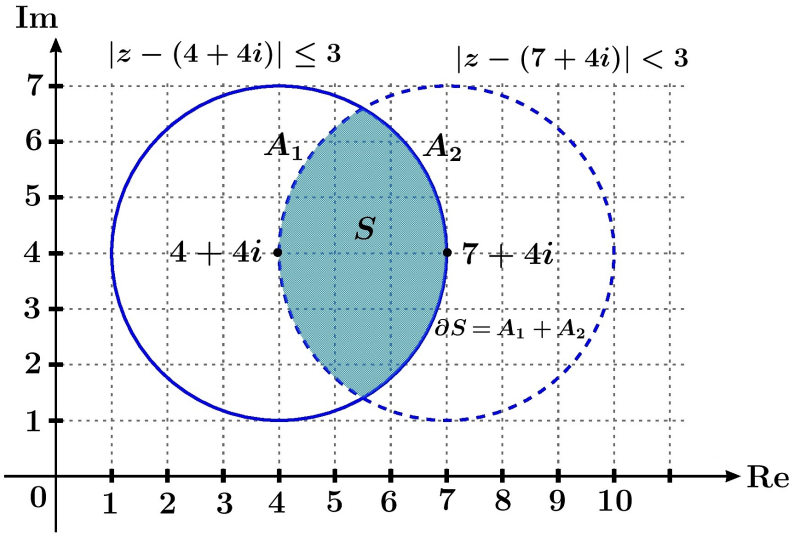
דוגמה 8: תהי S קבוצה המתקבלת על ידי חיתוך שני העיגולים הבאים

$$S=\{\,z\in\mathbb{C}:\ |z-(4+4i)|\le 3 \text{ and } |z-(7+4i)|<3\,\}$$

סקיצה של S מופיעה בשרטוט 2.35. יש לשים לב כי השפה של S מורכבת משתי קשתות של עיגולים

$$\begin{aligned} A_1 &= \{\, z \in \mathbb{C} : \ |z-(4+4i)| < 3 \text{ and } |z-(7+4i)| = 3 \,\} \\ A_2 &= \{\, z \in \mathbb{C} : \ |z-(4+4i)| = 3 \text{ and } |z-(7+4i)| \le 3 \,\} \\ \partial S &= A_1 \cup A_2 \end{aligned}$$

יש לקרוא את האיפיון של הקשת A_1 באופן הבא: הקשת A_1 מורכבת מכל הנקודות על המעגל הימני ($|z-(7+4i)| = 3$) שנמצאות בתוך המעגל השמאלי ($|z-(4+4i)| < 3$). יש לשים לב לכך שהקשת A_1 (קו מרוסק) אינה שייכת לקבוצה S!

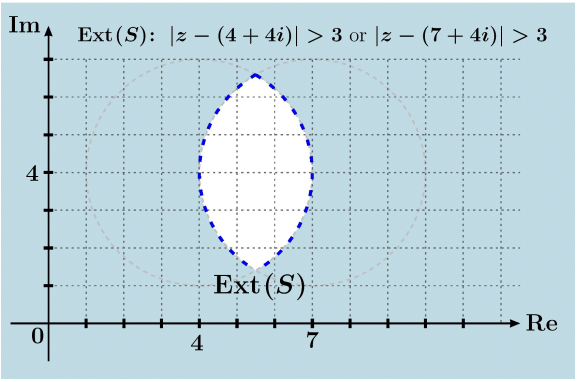


איור 2.35: פנים, חוץ, ושפה של S מדוגמה 8: $\mathrm{Int}(S)$, $\mathrm{Ext}(S)$, ∂S

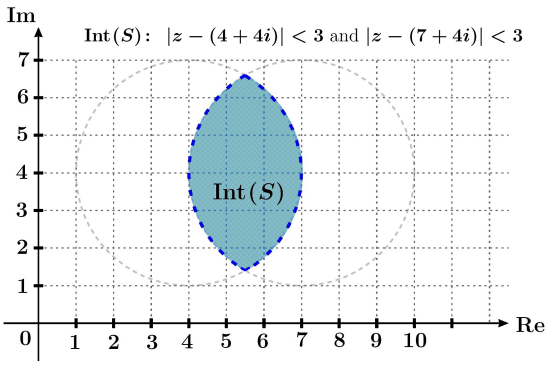
באופן דומה, לא קשה למצוא את הפנים, החוץ, והסגור של S

$$\begin{aligned} \mathrm{Int}(S) &= \{\, z \in \mathbb{C} : \ |z-(4+4i)| < 3 \text{ and } |z-(7+4i)| < 3 \,\} \\ \mathrm{Ext}(S) &= \{\, z \in \mathbb{C} : \ |z-(4+4i)| > 3 \text{ or } |z-(7+4i)| > 3 \,\} \\ \overline{S} &= \{\, z \in \mathbb{C} : \ |z-(4+4i)| \le 3 \text{ and } |z-(7+4i)| \le 3 \,\} \end{aligned}$$

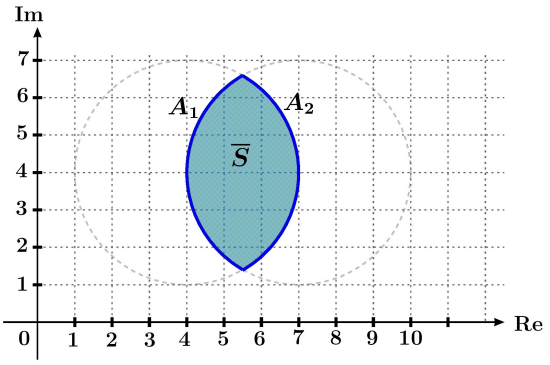
בשרטוט 2.37 רואים את הפנים של S. ההבדל בין S ל־$\mathrm{Int}(S)$ הוא בקשת A_2. בשרטוט 2.39 רואים את השפה של S. שרטוט 2.36 מציג את החוץ של S. בשרטוט 2.38 רואים את הסגור של S. יש לשים לב לכך ש־$\mathrm{Ext}(S)$ אינו כולל את שתי הקשתות A_1, A_2.



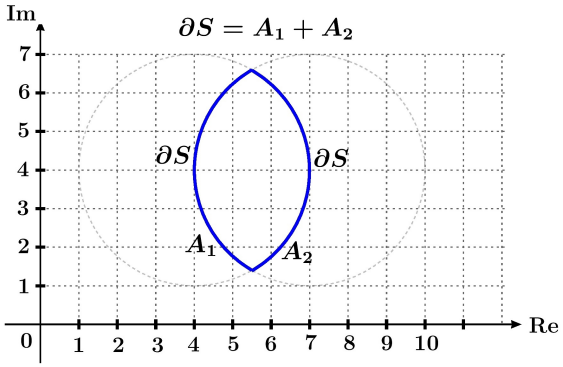
איור 2.36: החוץ של הקבוצה S



איור 2.37: הפנים של הקבוצה S



איור 2.38: הסגור של הקבוצה S



איור 2.39: השפה של הקבוצה S

טענה 2.2: תהי S קבוצת נקודות במישור המרוכב $\mathbb{C}$. אזי הפנים, השפה, והחוץ של S הוא תמיד פירוק של $\mathbb{C}$ לשלוש קבוצות זרות.

$$\operatorname{Int}(S) \cup \partial S \cup \operatorname{Ext}(S) = \mathbb{C} \tag{2.1}$$

$$\operatorname{Int}(S) \cap \partial S = \emptyset \tag{2.2}$$

$$\operatorname{Ext}(S) \cap \partial S = \emptyset \tag{2.3}$$

$$\operatorname{Int}(S) \cap \operatorname{Ext}(S) = \emptyset \tag{2.4}$$

הוכחה: מההגדרה ברור כי $\operatorname{Int}(S)$, $\operatorname{Ext}(S)$, ∂S הן קבוצות זרות. על פי ההגדרה, כל נקודה שאינה פנימית או חיצונית היא אוטומטית נקודת שפה. לכן ההגדרה גוררת שאיחוד הפנים, החוץ, והשפה הוא בהכרח $\mathbb{C}$.

מסקנה 2.3: תהי S קבוצת נקודות במישור המרוכב $\mathbb{C}$. אזי

$$\overline{S} = \operatorname{Int}(S) \cup \partial S \tag{2.5}$$

$$\partial S = \overline{S} - \operatorname{Int}(S) \tag{2.6}$$

$$\operatorname{Ext}(S) = \mathbb{C} - \overline{S} \tag{2.7}$$

כלומר:

- הסגור של S הוא איחוד זר של הפנים והשפה
- השפה של S היא ההפרש בין הסגור והפנים של S
- החוץ של S הוא המשלים של הסגור של S

דוגמה פשוטה לכל שבעת השוויונים האלה ניתן לראות בשרטוטים 2.36-2.39.

הגדרה 2.10: תהי S קבוצת נקודות במישור המרוכב $\mathbb{C}$. הקבוצה S תקרא **קבוצה פתוחה** אם כל נקודה ששייכת לה היא גם נקודה פנימית שלה. הקבוצה S תקרא **קבוצה סגורה** אם הקבוצה המשלימה שלה $\mathbb{C}-S$ היא קבוצה פתוחה.

דוגמה 9:

א. מההגדרה ברור כי הקבוצה הריקה $S=\emptyset$ והקבוצה $S=\mathbb{C}$ הן קבוצות פתוחות וסגורות בו-זמנית (התלמיד מתבקש לברר לעצמו מדוע?).

ב. כל עיגול פתוח ($|z-z_0|<r$) הוא קבוצה פתוחה, וכל עיגול סגור ($|z-z_0|\le r$) הוא קבוצה סגורה.

ג. חצאי המישור $\mathrm{Im}(z)>0$, $\mathrm{Im}(z)<0$, $\mathrm{Re}(z)>0$, $\mathrm{Re}(z)<0$, הן קבוצות פתוחות.

ד. חצאי המישור $\mathrm{Im}(z)\ge 0$, $\mathrm{Im}(z)\le 0$, $\mathrm{Re}(z)\ge 0$, $\mathrm{Re}(z)\le 0$, הן קבוצות סגורות.

ה. כל ארבעת רביעי המישור הכוללים את הצירים הן קבוצות סגורות.

ו. כל ארבעת רביעי המישור (שאינם כוללים את הצירים) הן קבוצות פתוחות.

ז. כל גיזרת עיגול מהצורה

$$\{\,z\in\mathbb{C}:\ 0<|z|<r,\quad \theta_1<\mathrm{Arg}(z)<\theta_2\,\}$$

היא קבוצה פתוחה.

טענה 2.4: קבוצה S היא קבוצה פתוחה אם ורק אם היא אינה מכילה שום נקודת שפה שלה.

הוכחה: יש להוכיח שני כיוונים.

כיוון ראשון: נניח כי S פתוחה. אם z היא נקודת שפה של S אז עבור כל $r>0$, $\mathbb{D}(z,r)\cap(\mathbb{C}-S)\neq\emptyset$. כלומר, לא קיים $r>0$ כך ש־$\mathbb{D}(z,r)\subseteq S$. לכן z אינה נקודה פנימית של S, ולכן $z\notin S$.

כיוון שני: נניח כי הקבוצה S אינה מכילה אף נקודת שפה שלה. תהי $z\in S$. אזי z אינה נקודה חיצונית כי על פי טענה 2.2, $\mathrm{Int}(S)\cap\mathrm{Ext}(S)=\emptyset$. לכן על פי הגדרה 2.8 נותרה רק האפשרות ש־z היא נקודה פנימית. הוכחנו אם כן שכל נקודה $z\in S$ היא גם נקודה

פנימית של S, ולכן S היא קבוצה פתוחה. ∎

בדוגמה 8, הקבוצה S אינה פתוחה וגם אינה סגורה. לכן לא כל קבוצה במישור המרוכב היא בהכרח פתוחה או סגורה! במובן מסוים, רוב הקבוצות אינן פתוחות או סגורות. לפעמים קבוצה מסוג זה נקראת קבוצה **חצי-פתוחה** (או **חצי-סגורה**). אבל מדובר במונח לא ממש מוצלח מאחר והמונח "חצי" לא מתאים ברוב המקרים.

טענה 2.5: תהי S קבוצת נקודות במישור המרוכב $\mathbb{C}$. אזי

א. הפנים של S הוא קבוצה פתוחה

ב. החוץ של S הוא קבוצה פתוחה

ג. הסגור של S הוא קבוצה סגורה

הוכחה:

א. על פי טענה 2.2, $\mathrm{Int}(S) \cap \partial S = \emptyset$. כלומר הפנים $\mathrm{Int}(S)$ אינו כולל שום נקודת שפה, ולכן על פי טענה 2.4 הוא קבוצה פתוחה.

ב. מטענה 2.1 נובע מייד כי $\partial \mathrm{Ext}(S) = \partial S$. מאחר ועל פי טענה 2.2 שפת S זרה לחוץ של S, הרי שהחוץ $\mathrm{Ext}(S)$ אינו כולל אף אחת מנקודות השפה שלו, ולכן על פי טענה 2.4 $\mathrm{Ext}(S)$ היא קבוצה פתוחה.

ג. על פי מסקנה 2.3, המשלים של $\overline{S}$ הוא $\mathrm{Ext}(S)$, אשר על פי הסעיף הקודם הוא קבוצה פתוחה. לכן על פי ההגדרה, $\overline{S}$ היא קבוצה סגורה.

תזכורת קצרה מתורת הקבוצות: תהי I קבוצת אינדקסים. לכל $\alpha \in I$ תהי S_α קבוצה של מספרים מרוכבים. הסימן $\{S_\alpha\}_{\alpha \in I}$ מסמן את **משפחת הקבוצות** S_α, עבור $\alpha \in I$. קבוצת האינדקסים I עשויה להיות סופית או אינסופית, סדורה או לא סדורה. **האיחוד** של משפחת הקבוצות מוגדר על ידי

$$\bigcup_{\alpha \in I} S_\alpha = \{\, z \in \mathbb{C} : \ \exists \alpha \in I \ [z \in S_\alpha] \,\}$$

החיתוך של משפחת הקבוצות מוגדר על ידי

$$\bigcap_{\alpha \in I} S_\alpha = \{\, z \in \mathbb{C} : \ \forall \alpha \in I \ [z \in S_\alpha] \,\}$$

פעולת **החיסור** בין שתי קבוצות S_1, S_2, מוגדרת על ידי

$$S_1 - S_2 = \{\, z \in \mathbb{C} : \ z \in S_1 \text{ and } z \notin S_2 \,\}$$

פעולות האיחוד, חיתוך, וחיסור, בין קבוצות הן הפעולות העיקריות שבאמצעותן אנו בונים קבוצות חדשות מקבוצות קיימות. בכל טקסט בסיסי בנושא תורת הקבוצות ניתן למצוא הוכחות עבור שתי הנוסחאות הבאות, הקרויות לפעמים **חוקי דה-מורגן**

$$S - \bigcup_{\alpha\in I} S_\alpha = \bigcap_{\alpha\in I} (S - S_\alpha)$$
$$S - \bigcap_{\alpha\in I} S_\alpha = \bigcup_{\alpha\in I} (S - S_\alpha) \tag{2.8}$$

משפט 2.6: תהי $\{S_\alpha\}_{\alpha\in I}$ משפחה של קבוצות במישור המרוכב $\mathbb{C}$

א. אם כל הקבוצות S_α פתוחות, אז גם האיחוד $\cup_{\alpha\in I} S_\alpha$ קבוצה פתוחה.

ב. אם כל הקבוצות S_α סגורות, אז גם החיתוך $\cap_{\alpha\in I} S_\alpha$ קבוצה סגורה.

הוכחה:

א. נסמן $S = \cup_{\alpha\in I} S_\alpha$ ונניח שכל הקבוצות S_α פתוחות. נוכיח כי S קבוצה פתוחה. תהי $z \in S$ נקודה כלשהי. אזי קיים אינדקס $\alpha \in I$ כך ש־ $z \in S_\alpha$. מאחר ש־ S_α קבוצה פתוחה, קיים $r > 0$ כך ש־ $\mathbb{D}(z,r) \subseteq S_\alpha$. מאחר ו־ $S_\alpha \subseteq S$, הרי ש־ $\mathbb{D}(z,r) \subseteq S$. הוכחנו שכל נקודה $z \in S$ היא נקודה פנימית של S, ולכן S קבוצה פתוחה.

ב. נסמן $S = \cap_{\alpha\in I} S_\alpha$ ונניח שכל הקבוצות S_α סגורות. נוכיח כי הקבוצה $\mathbb{C} - S$ היא קבוצה פתוחה, ולכן S קבוצה סגורה. על פי חוקי דה-מורגן (2.8)

$$\mathbb{C} - S = \mathbb{C} - \bigcap_{\alpha\in I} S_\alpha = \bigcup_{\alpha\in I} (\mathbb{C} - S_\alpha)$$

מאחר ש־ S_α קבוצה סגורה, $\mathbb{C} - S_\alpha$ היא קבוצה פתוחה, ולכן על פי הסעיף הקודם האיחוד שבאגף ימין נותן קבוצה פתוחה. ∎

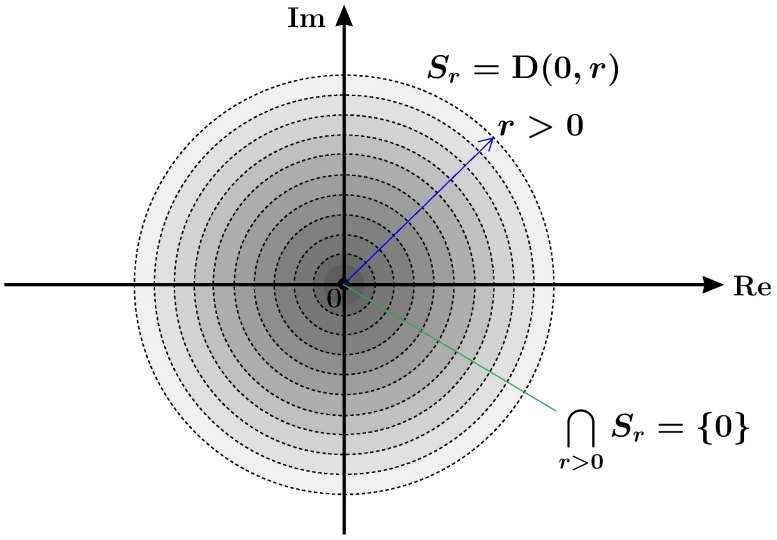
לסיכום הראינו כי איחוד של קבוצות פתוחות יוצר קבוצה פתוחה, וחיתוך של קבוצות סגורות יוצר קבוצה סגורה. נשאלת השאלה לגבי חיתוך של קבוצה פתוחות ואיחוד של קבוצות סגורות?

מסתבר שחיתוך של קבוצות פתוחות אינו תמיד קבוצה פתוחה אלא אם מדובר במשפחה סופית של קבוצות פתוחות.

דוגמה 10: לכל מספר ממשי $r > 0$ נגדיר את הקבוצה $S_r = \mathbb{D}(0,r)$. כלומר, S_r היא העיגול הפתוח שמרכזו בראשית הצירים $z = 0$ ורדיוסו r. לא קשה להוכיח כי

$$\bigcap_{r>0} S_r = \{0\}$$

ברור כי היחידון $\{0\}$ אינו קבוצה פתוחה, אך S_r פתוחה עבור כל $r > 0$. קיבלנו אם כן דוגמה למשפחה של קבוצות פתוחות אשר החיתוך שלה אינו קבוצה פתוחה.



איור 2.40: תוצאת החיתוך של כל העיגולים הפתוחים $S_r = \mathbb{D}(0,r)$, $r > 0$ הוא היחידון $\{0\}$

באופן דומה האיחוד של קבוצות סגורות אינו תמיד קבוצה סגורה אלא אם מדובר במשפחה סופית של קבוצות סגורות. קל לבדוק כי איחוד העיגולים הסגורים $\overline{\mathbb{D}}(0,r)$, $0 \le r < 1$, יוצר את עיגול היחידה הפתוח

$$\mathbb{D}(0,1) = \bigcup_{0\le r<1} \overline{\mathbb{D}}(0,r)$$

קיבלנו דוגמה למשפחה של קבוצה סגורה אשר האיחוד שלה יוצר קבוצה שאינה סגורה! במשפט הבא נוכיח כי אם מדובר במשפחה סופית של קבוצות, אז התשובה לשתי השאלות חיובית.

משפט 2.7: תהי $\{S_k\}_{k=1}^n$ משפחה סופית של קבוצות במישור המרוכב $\mathbb{C}$

א. אם כל הקבוצות S_k פתוחות, אז גם החיתוך $\bigcap_{k=1}^n S_k$ קבוצה פתוחה.

ב. אם כל הקבוצות S_k סגורות, אז גם האיחוד $\bigcup_{k=1}^n S_k$ קבוצה סגורה.

הוכחה:

א. נסמן $S = \{S_k\}_{k=1}^n$. נניח כי כל הקבוצות S_k פתוחות. תהי $z \in S$, אזי עבור כל

k קיים ממשי $r_k > 0$ כך ש־$\mathbb{D}(z, r_k) \subseteq S_k$. יהי $r = \min\{ r_k : 1 \le k \le n \}$. אזי $\mathbb{D}(z, r) \subseteq \mathbb{D}(z, r_k) \subseteq S_k$. לכן הדיסק $\mathbb{D}(z, r)$ כלול בחיתוך S, ולכן z נקודה פנימית של S. הוכחנו כי כל נקודה z של S היא נקודה פנימית, ולכן S היא קבוצה פתוחה.

ב. כמו בהוכחת המשפט הקודם, סעיף זה נובע מהסעיף הקודם ומחוק דה-מורגן

$$\mathbb{C} - \bigcup_{k=1}^{n} S_k = \bigcap_{k=1}^{n} (\mathbb{C} - S_k)$$

■

2.3 קשירות

תכונת הקשירות מאפשרת לנו למיין את הקבוצות במישור המרוכב לרמות מורכבות שונות ועל ידי כך לאפשר את הלימוד והמחקר שלהן על פי סדר מורכבות. הקבוצות הקשירות הן פשוטות יותר לטיפול והבנה ומשמשות אבני בניין לקבוצות יותר מורכבות. אחת הפרקטיקות החשובות בהבנה וטיפול בקבוצות מורכבות היא הפירוק שלהן למרכיבי קשירות פשוטים יותר.

בקורס הנוכחי יהיו לנו שלושה סוגי קשירות:

א. קשירות טופולוגית, או בקיצור: קשירות (connected)

ב. קשירות מסילתית (pathwise connected)

ג. קשירות פשוטה (Simply connected)

הגדרה 2.11: תהי $S \subseteq \mathbb{C}$ קבוצת נקודות במישור המרוכב. זוג קבוצות (A, B) יקרא **פירוק של** S אם מתקיימים הדברים הבאים:

א. $A \cap B = \emptyset$

ב. $S \subseteq A \cup B$

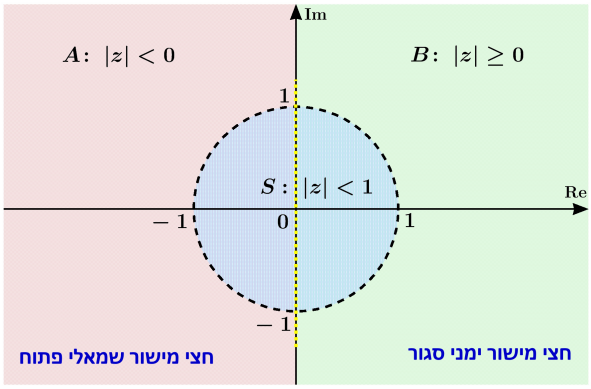
ג. $A \cap S \neq \emptyset$

ד. $B \cap S \neq \emptyset$

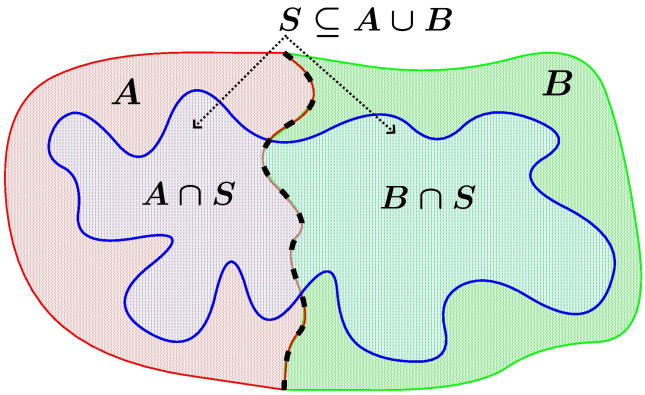
דוגמה 11: אם A היא חצי המישור השמאלי הפתוח, B חצי המישור הימני הסגור, אז (A, B) הוא פירוק של עיגול היחידה $|z| < 1$

פירוק (A, B) של קבוצה S נקרא **פירוק פתוח** אם הקבוצות A, B, הן קבוצות פתוחות.

יש להבחין כי הפירוק של עיגול היחידה בשרטוט 2.41 אינו פירוק פתוח! למעשה תיכף נגלה כי לא קיים פירוק פתוח של עיגול היחידה!



איור 2.41: פירוק של עיגול היחידה הפתוח על ידי חצאי מישור



איור 2.42: פירוק (A,B) של קבוצה S

הגדרה 2.12: תהי $S\subseteq\mathbb{C}$ קבוצת נקודות במישור המרוכב. הקבוצה S נקראת **קשירה טופולוגית** אם לא קיים פירוק פתוח שלה.

במילים אחרות: הקבוצה S היא קשירה טופולוגית אם עבור כל פירוק (A,B) של S, לפחות אחת משתי הקבוצות A, B, אינה פתוחה.

בדרך כלל מקובל לקצר את המונח **קשירה טופולוגית** למונח **קשירה**.

טענה 2.8: כל מסלול במישור המרוכב הוא קבוצה קשירה[1].

הוכחה: נוכיח את הטענה עבור מסלול סופי ונשאיר לתרגילים את הוכחת הטענה עבור יתר סוגי המסלולים. יהי $\sigma:[a,b]\to\mathbb{C}$ מסלול סופי, ותהי $S=\sigma([a,b])$ התמונה של σ. נניח בשלילה כי S אינה קבוצה קשירה. כלומר, קיים פירוק פתוח (A,B) של S. ללא הגבלת הכלליות נניח כי $\sigma(a)\in A$, ונגדיר

$$t_0=\inf\{\,t\in[a,b]:\ \sigma(t)\in B\,\}$$

ברור כי $t_0>a$, כי A כוללת סביבה של $\sigma(a)$ ולכן כוללת התחלה מסוימת של המסלול. אם $\sigma(t_0)\in B$, אז קיים $r>0$ כך ש־$D=\mathbb{D}(\sigma(t_0),r)\subseteq B$. הנקודה $\sigma(t_0)$ היא מרכז העיגול D, ולכן D כולל נקודה $\sigma(t)$ עבור $t<t_0$ בסתירה להגדרה של t_0. באותו אופן נוכיח שאם $\sigma(t_0)\in A$, אז קיים $\delta>0$ כך שלכל t בקטע $[t_0,t_0+\delta]$, $\sigma(t)\in A$, בסתירה להגדרה של t_0. ∎

מסקנה 2.9: כל קטע $[z_0,z_1]$ במישור המרוכב הוא קבוצה קשירה[2].

[1] ליתר דיוק יש להבחין בין מסלול שהוא פונקציה $\sigma:[a,b]\to\mathbb{C}$ ובין קבוצת הנקודות השייכות לו שזו למעשה התמונה שלו $\sigma([a,b])$. הטענה כמובן מתייחסת לקבוצה זו.

[2] הטענה כמובן נכונה גם לקטע פתוח, חצי-פתוח, קרן, וישר

הוכחה: קטע $[z_0, z_1]$ הוא מקרה פרטי של מסלול $\sigma : [0,1] \to \mathbb{C}$ אשר נוסחתו

$$\sigma(t) = z_0 + t(z_1 - z_0)$$

הטענה כמובן נכונה גם לקטע פתוח, חצי-פתוח, קרן, וישר. ∎

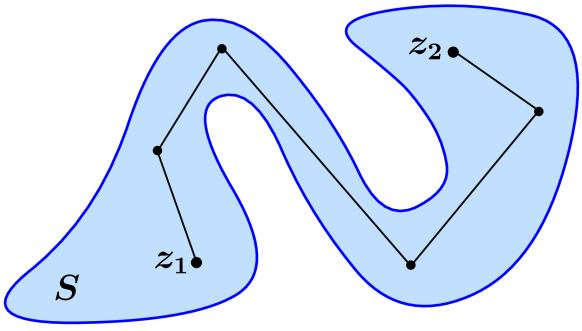
מסקנה 2.10: כל עיגול סגור במישור המרוכב הוא קבוצה קשירה.

הוכחה: המשפט יינבע בקלות ממשפט 2.11 שנוכיח תיכף, לכן נציג רק את רעיון ההוכחה בקצרה. נניח כי (A, B) הוא פירוק פתוח של הדיסק הסגור $\overline{\mathbb{D}}(z_0, r)$. נבחר נקודה $z_1 \in A \cap \overline{\mathbb{D}}(z_0, r)$, ונקודה $z_2 \in B \cap \overline{\mathbb{D}}(z_0, r)$. מאחר ו־$z_1$, z_2, נקודות בתוך הדיסק, אז גם הקטע $[z_1, z_2]$ כלול בדיסק. ברור ש־(A, B) הוא גם פירוק פתוח של הקטע $[z_1, z_2]$ בסתירה למסקנה הקודמת. ∎

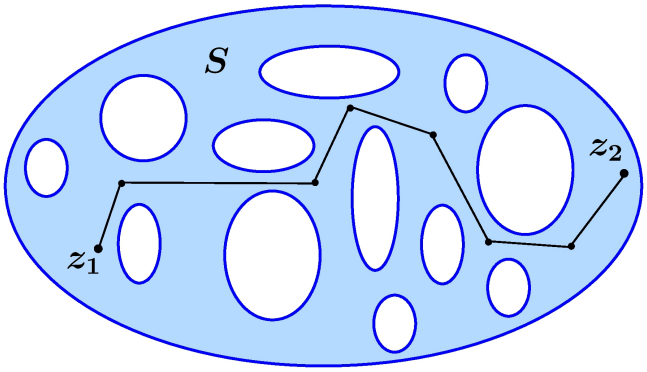
הוכחה דומה עבור אליפסה, ריבוע, משולש וכדומה עשויה להסתבך יותר. העניין מסתבך עוד יותר עבור קבוצות קעורות או קבוצות שיש בהן "חורים" (ראה שרטוטים 2.43, 2.44). לכן נדרש לאמצעי נוסף שיסייע לנו להוכיח שהקבוצות הפשוטות מחיי היום יום הן אכן קשירות. האמצעי הנוסף הוא מושג הקשירות הפוליגונלית (ולאחר מכן מושג הקשירות המסילתית).

הגדרה 2.13: קבוצה S נקראת **קשירה פוליגונלית** אם לכל שתי נקודות $z_1, z_2 \in S$ קיים קו שבור בתוך S המחבר בין z_1 ל־z_2.

בשרטוטים 2.43, 2.44, מוצגות שתי דוגמאות של קבוצות קשירות פוליגונלית. נציין כי בשרטוט 2.44 הקבוצה אינה כוללת את החורים הלבנים שבתוכה, ולכן נדרש מאמץ בכדי לחבר כל שתי נקודות בתוכה על ידי קו שבור.



איור 2.43: קבוצה קשירה פוליגונלית



איור 2.44: קבוצה קשירה פוליגונלית

משפט 2.11: קבוצה פתוחה $S \subseteq \mathbb{C}$ היא קשירה אם ורק אם היא קשירה פוליגונלית.

הוכחה: יש להוכיח שני כיוונים.

כיוון 1: נניח כי S קשירה. נוכיח כי S קשירה פוליגונלית. אם S ריקה אז הטענה נכונה באופן ריק. לכן נניח כי $S \neq \emptyset$. נבחר נקודה $z_0 \in S$ ונגדיר

$$S_0 = \{\, z \in S : \quad z \text{ ו־} z_0 \text{ המחבר את } S \text{ ב־} \text{קיים קו שבור}\}$$

כלומר S_0 היא אוסף כל הנקודות $z \in S$ שניתן להגיע אליהן מהנקודה z_0 באמצעות קו שבור הכלול ב־S. נוכיח כי S_0 היא קבוצה פתוחה: אם $z_1 \in S_0$ אז $z_1 \in S$ ולכן קיים דיסק פתוח $\mathbb{D}(z_1,r) \subseteq S$. אם $z \in \mathbb{D}(z_1,r)$ אז נוכל להתחבר לנקודה z_1 בקו ישר ומשם לנקודה z_0. לכן $\mathbb{D}(z_1,r) \subseteq S_0$, ולכן S_0 קבוצה פתוחה. בשלב הבא נוכיח $S_0 = S$, ואז כל שתי נקודות $z_1, z_2 \in S$ ניתן לחבר באמצעות קו שבור שעובר דרך z_0, וסיימנו. נניח בשלילה כי $S_0 \neq S$. נוכיח כי $S - S_0$ קבוצה פתוחה ונקבל פירוק פתוח $(S_0, S-S_0)$ של S בסתירה לנתון ש־S קשירה. תהי $z_2 \in S - S_0$. כלומר לא ניתן לחבר את z_2 ל־z_0 באמצעות קו שבור. קיים דיסק פתוח $\mathbb{D}(z_2,r) \subseteq S$. כל נקודה $z \in \mathbb{D}(z_2,r)$ אינה יכולה להתחבר לנקודה z_0, כי אז ניתן להגיע מ־z_2 לי־z בקו ישר ומשם ל־z_0. לכן $\mathbb{D}(z_2,r) \cap S_0 = \emptyset$, ולכן $\mathbb{D}(z_2,r) \subseteq S - S_0$. לכן $S - S_0$ קבוצה פתוחה וקיבלנו פירוק פתוח $(S_0, S-S_0)$ של S בסתירה לנתון.

כיוון 2: נניח כי S קשירה פוליגונלית. נוכיח כי S קשירה. נניח בשלילה ש־S אינה קשירה. כלומר קיים פירוק פתוח (A,B) של S. נבחר נקודה $z_1 \in A$, ונקודה $z_2 \in B$. על פי הנתון קיים קו שבור $[w_1, w_2, \ldots, w_n]$ המוכל ב־S כך ש־$w_1 = z_1$, $w_n = z_2$. נעבור על כל אחד ואחד מהקטעים $[w_k, w_{k+1}]$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$. במידה ואחד מהם חותך את שתי הקבוצות A, B, נקבל ש־(A,B) הוא גם פירוק פתוח של הקטע $[w_k, w_{k+1}]$, בסתירה למסקנה 2.9. לכן האפשרות הנותרת היא שלכל k, $[w_k, w_{k+1}] \subseteq A$ או $[w_k, w_{k+1}] \subseteq B$. ברור שלא ייתכן שכל הקטעים נמצאים באותו צד של הפירוק, ולכן קיים k כך ש־$[w_k, w_{k+1}] \subseteq A$ ו־$[w_{k+1}, w_{k+2}] \subseteq B$ (או להיפך). קיבלנו כי $w_{k+1} \in A$ וגם $w_{k+1} \in B$ בסתירה לנתון כי $A \cap B = \emptyset$. ∎

הגדרה 2.14: קבוצה פתוחה וקשירה טופולוגית נקראת **תחום (Domain)**.

הגדרה 2.15: תחום D המכיל נקודה z נקרא **סביבה של הנקודה** z. תחום D המכיל קבוצה S נקרא **סביבה של הקבוצה** S.

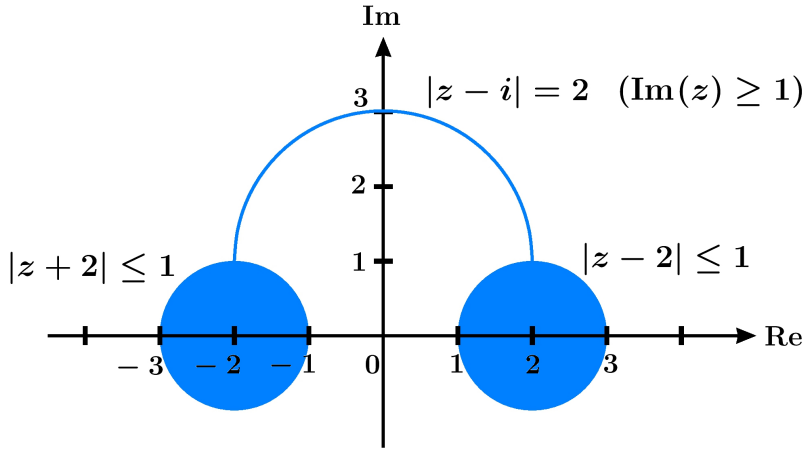
מושג הסביבה שלנו הוא קצת יותר כללי ממה שמקובל[3], אך יותר פרקטי.

חובה להדגיש כי השקילות שבין קשירות טופולוגית וקשירות פוליגונלית במשפט 2.11, חלה על קבוצות פתוחות בלבד! בקבוצות כלליות (שאינן בהכרח פתוחות) מושג הקשירות

[3] בדרך כלל מקובל להגדיר סביבה כדיסק פתוח סביב הנקודה

הפוליגונלית מפסיק לתפקד כפי שניתן לראות בדוגמה הבאה. בכדי לכסות קבוצות כלליות נזדקק למושג היותר כללי של **קשירות מסילתית**.

דוגמה 12: נגדיר קבוצה S המורכבת משני העיגולים $|z-2|\leq 1$, $|z+2|\leq 1$, והחצי העליון של המעגל $|z-i|=2$ (ראה שרטוט 2.45). ברור לנו כי קבוצה זו אמורה להיות קשירה אך היא אינה קשירה פוליגונלית, משום שכל מסלול שמחבר בין נקודה בעיגול השמאלי לעיגול הימני חייב לעבור דרך הקשת העליונה ולכן אינו יכול להיות קו שבור.



איור 2.45: הקבוצה S קשירה מסילתית אך אינה קשירה פוליגונלית

הגדרה 2.16: קבוצה S נקראת **קשירה מסילתית** אם עבור כל שתי נקודות $z_1, z_2 \in S$, קיים מסלול $\sigma:[a,b]\to S$ כך ש־ $z_1=\sigma(a)$, $z_2=\sigma(b)$.

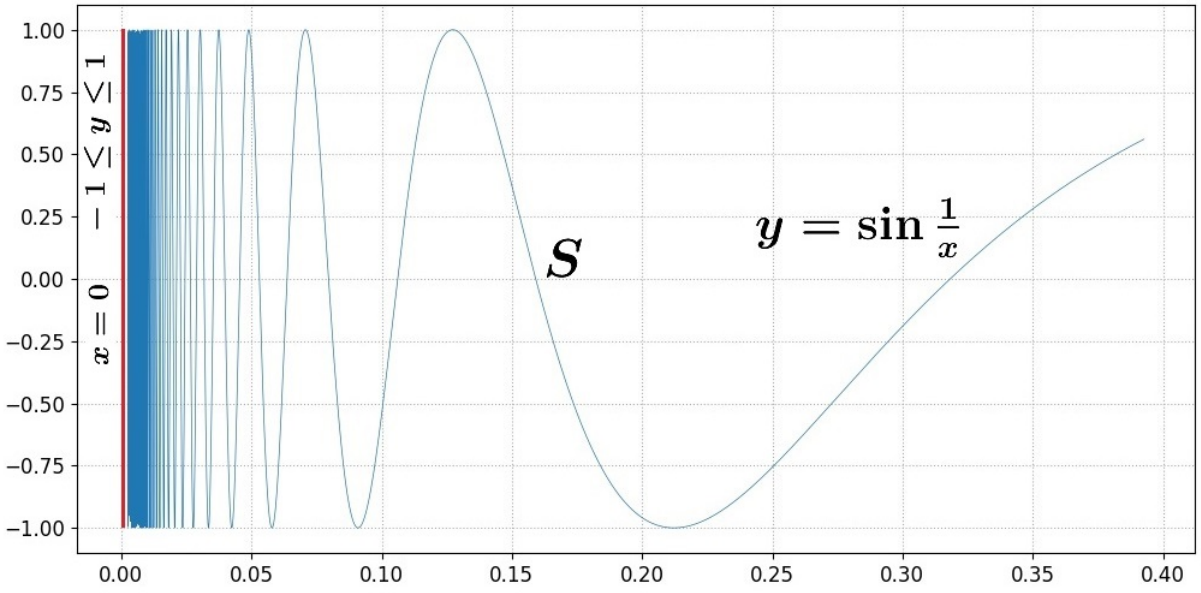
לא קשה להוכיח כי הקבוצה S מהדוגמה 12 היא קשירה מסילתית (למרות שאינה קשירה פוליגונלית). כמו כן, הקבוצה S היא גם קשירה טופולוגית. נשאלת השאלה האם קשירות מסילתית וקשירות טופולוגית שקולות עבור קבוצות כלליות? התשובה לשאלה זו היא שלילית. קשירות מסילתית גוררת קשירות טופולוגית אך לא להיפך כפי שהדוגמה הבאה מוכיחה.

דוגמה 13: נגדיר את הקבוצה S על ידי איחוד הגרף של הפונקציה $y=\sin\frac{1}{x}$ בציר ה־ x החיובי, והקטע $x=0$, $-1\leq y\leq 1$ (הקטע האדום שעל ציר־y בשרטוט 2.46).

$$S=\left\{x+yi\in\mathbb{C}:\ y=\sin\frac{1}{x},\ 0<x<\infty\right\}\cup\{yi:\ -1\leq y\leq 1\}$$

מההגדרה ברור כי הקטע האדום $I=\{yi:\ -1\leq y\leq 1\}$ מנותק מגרף הפונקציה $\sin\frac{1}{x}$ ולכן הקבוצה S אינה קשירה מסילתית, אבל S קשירה טופולוגית. כי אם (A,B) הוא פירוק פתוח של S אז ממסקנה 2.9 מתחייב שהקטע I חייב להיות כלול בשלמותו בקבוצה A או בקבוצה B. ללא הגבלת הכלליות נניח כי $I\subseteq A$. הנקודה $z=0$ כלולה ב־ A ולכן

קיים $r > 0$ כך ש־$\mathbb{D}(0,r) \subseteq A$. ברור כי הדיסק $\mathbb{D}(0,r)$ חותך את גרף הפונקציה, ולכן הקבוצה A חותכת את הגרף גם כן. קיבלנו כי (A,B) הוא גם פירוק פתוח של המסלול $\sigma(t) = t + i\sin\frac{1}{t}$, בסתירה לטענה 2.8.



איור 2.46: הקבוצה S המורכבת מגרף הפונקציה והקטע על ציר־y קשירה טופולוגית אך אינה קשירה מסילתית

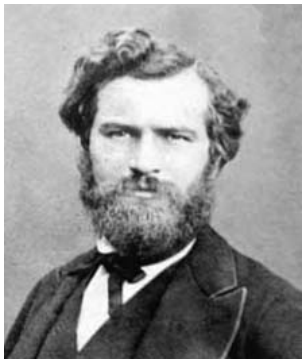
משפט 2.12: כל קבוצה קשירה מסילתית היא גם קשירה טופולוגית.

הוכחה: זוהי תוצאה מיידית של טענה 2.8. תהי S קבוצה קשירה מסילתית. נניח בשלילה ש־S אינה קשירה טופולוגית. כלומר קיים פירוק פתוח (A,B) של S. נבחר נקודה $z_1 \in A$ ונקודה $z_2 \in B$. על פי הנתון קיים מסלול σ בין z_1 ל־z_2 הכלול בתוך S. ברור כי (A,B) יהיה פירוק פתוח של המסלול בסתירה לטענה 2.8. ∎

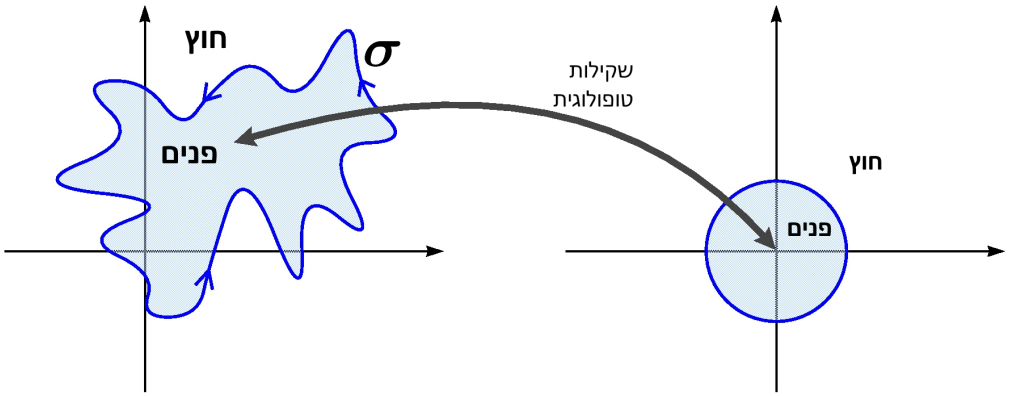
נסיים את הסעיף במושג השלישי של קשירות פשוטה (simply connected). קשירות פשוטה היא תכונה הרבה יותר חזקה משני סוגי הקשירות הקודמים. מדובר בתחום ללא חורים.

אך לפני ההגדרה אנו זקוקים למושגי הפנים והחוץ של מסלול סגור ופשוט. למרות ששני מושגים אלה נראים לנו מאוד טבעיים ומובנים, ההוכחה המתימטית שמבטיחה את קיומם מסובכת מאוד וחורגת ממסגרת הקורס. נסתפק בניסוח של משפט ז'ורדן עבור מסלולים סגורים ופשוטים.

משפט 2.13: משפט ז'ורדן למישור המרוכב (Camille Jordan 1838-1922)
כל מסלול סגור ופשוט σ מחלק את המישור המרוכב לשני תחומים זרים הנקראים **הפנים של σ** **והחוץ של σ**. הפנים של σ הוא קבוצה חסומה ושקולה טופולוגית לעיגול פתוח. החוץ של σ קבוצה לא-חסומה ושקולה טופולוגית למישור מחורר.



איור 2.47: Camille Jordan
1838-1922



איור 2.48: כל מסלול סגור ופשוט מחלק את המישור לפנים וחוץ

- נזכיר כי המונח "תחום" המופיע במשפט מציין קבוצה פתוחה וקשירה (טופולוגית)!
- בדיון הבא ניתן למצוא מספר הוכחות למשפט זה. כולן חורגות ממסגרת הקורס והתלמיד המעוניין מוזמן לעיין בהם:

Nice proofs to the Jordan curve theorem

הגדרה 2.17: קבוצה S במישור המרוכב נקרא **פשוטת קשר (simply connected)** אם היא קשירה מסילתית ואם עבור כל מסלול פשוט וסגור (מסלול ז'ורדן) הכלול בתוך S, גם הפנים של σ כלול ב־S.

- במילים פשוטות: קבוצה S היא פשוטת קשר אם היא קשירה מסילתית ואינה מכילה חורים.
- מההגדרה נובע כי כל קבוצה פשוטת קשר היא גם קשירה מסילתית, אבל ההיפך אינו נכון. בשרטוט 2.44 (עמוד 66) מוצגת קבוצה שהיא קשירה מסילתית אך אינה פשוטת קשר. הקבוצה בשרטוט 2.43 (עמוד 66) לעומת זאת היא קבוצה פשוטת קשר.
- מהתבוננות בדוגמאות הנ"ל ניתן להבחין כי השפה של קבוצה שאינה פשוטת קשר אינה קשירה (החורים מנותקים מהמעטפת). מסתבר שזהו איפיון שקול לקשירות פשוטה, וספרים מסוימים משתמשים בו כהגדרה לסוג זה של קשירות. אנו ננסח זאת כמשפט.

משפט 2.14: קבוצה קשירה מסילתית S היא פשוטת קשר אם ורק אם השפה שלה ∂S היא קבוצה קשירה.

- **הוכחה:** נסתפק בהוכחה לא פורמלית: אם S אינה פשוטת קשר אז יש לה לפחות חור אחד, ולכן ∂S יכיל גם את שפת החור במנותק מהמעטפת. אם אין חורים בקבוצה S אז השפה שלה היא עקום ז'ורדן, שהוא כמובן עקום סגור ופשוט ולכן על פי טענה 2.8 הוא קבוצה קשירה.

הגדרה 2.18: תהי S קבוצה נתונה. תת-קבוצה לא-ריקה $C \subseteq S$ נקראת **מרכיב קשירות של** S אם C קשירה ולא קיימת תת-קבוצה קשירה גדולה יותר $C \subset D \subseteq S$.

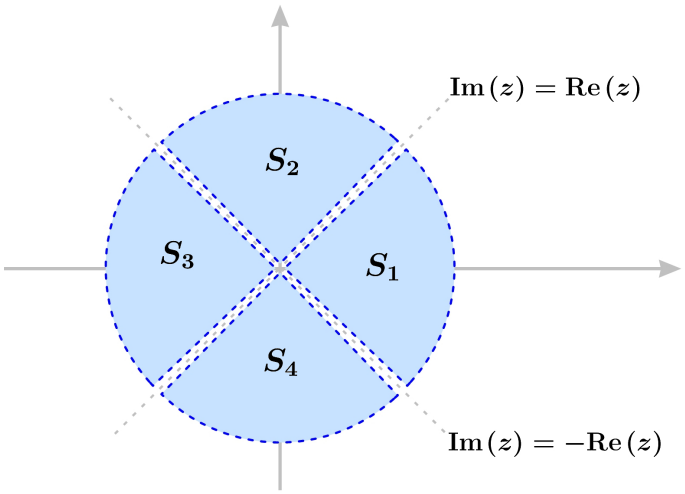
בקצרה: **מרכיב קשירות של** S הוא תת-קבוצה קשירה מקסימלית של S.

דוגמה 14: תהי S קבוצת כל הנקודות בעיגול היחידה $|z| < 1$ אשר מקיימות

$$\mathrm{Im}\,(z) \neq \pm \mathrm{Re}\,(z)$$

כלומר z אינה נמצאת על הישר $y = x$ או $y = -x$. לא קשה לראות כי S מורכבת מארבעה מרכיבי קשירות שונים כמתואר בשרטוט 2.49. נתאר למשל את המרכיב S_1

$$S_1 = \left\{ z \in \mathbb{C} : \ |z| < 1 \text{ and } -\frac{\pi}{2} < \mathrm{Arg}\,(z) < \frac{\pi}{2} \right\}$$



איור 2.49: הקבוצה S אינה קשירה אך יש לה ארבעה מרכיבי קשירות

הגדרה 2.19: משפחה של קבוצות $\{S_\alpha\}_{\alpha \in I}$ נקראת **פירוק למרכיבי קשירות** של קבוצה $S \subseteq \mathbb{C}$, אם

א. לכל אינדקס $\alpha \in I$, S_α היא מרכיב קשירות של S.

ב. לכל שני אינדקסים שונים $\alpha, \beta \in I$, $S_\alpha \cap S_\beta = \emptyset$.

במשפט הבא נוכיח כי קיימת דרך אחת ויחידה לפרק קבוצה למרכיבי קשירות.

משפט 2.15: תהי $S \subseteq \mathbb{C}$. אזי קיים פירוק אחד ויחיד של S למרכיבי קשירות.

הוכחה: עבור כל נקודה $z \in S$ נגדיר את הקבוצה:

$$S_z = \{ w \in S : \text{ קיים מסלול } \sigma \text{ בין } w \text{ ל־} z \text{ כך ש־} \sigma \subseteq S \}$$

ברור כי S_z היא קבוצה קשירה: אם $w_1, w_2 \in S_z$ אז קיים מסלול σ_1 בתוך S בין w_1 ל־z, וקיים מסלול σ_2 בתוך S בין w_2 ל־z. אם נשרשר את σ_1 עם ההיפוך של σ_2 נקבל מסלול בין w_1 ו־w_2. ברור שבמשפחת הקבוצות $\{S_z\}_{z\in S}$ יהיו המון כפילויות. אם קיים מסלול בתוך S בין z_1 ל־z_2 אז $S_{z_1} = S_{z_2}$. מצד שני, אם אין מסלול בין z_1 ו־z_2 אז $S_{z_1} \cap S_{z_2} = \emptyset$ (למה?). אם ניפטר מכל הכפילויות הללו, נשאר עם משפחה זרה של קבוצות קשירות $\{S_z\}_{z\in I}$. ברור כי $S = \cup_{z\in I} S_z$. ∎

תרגיל 2.1: הוכח שאם S היא קבוצה סגורה אז כל מרכיבי הקשירות של S חייבות להיות קבוצות סגורות.

2.4 סדרות של מספרים מרוכבים

הסוג האחרון של קבוצות שנדון בהן הן סדרות של מספרים מרוכבים. כזכור מהמקרה הממשי, נושא הסדרות הוא קריטי לשם הבנה וטיפול במושגי הפונקציה, רציפות, גזירות, אינטגרביליות וכדומה. המקרה המרוכב אנלוגי לחלוטין. נתחיל בהגדרת הגבול של סדרת מספרים מרוכבים.

הגדרה 2.20: סדרה של מספרים מרוכבים $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ **מתכנסת לגבול** z אם סדרת המרחקים $\{|z - z_n|\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת לאפס.

סדרת המרחקים היא סדרה ממשית ולכן הגבול שלה מובן לנו.

כל המשפטים העיקריים אודות סדרות בשדה המספרים הממשיים נכונים גם עבור סדרות מרוכבות, וכל ההוכחות הן כמעט זהות, ולכן לא נטרח לנסח את המשפטים האלה. ההבדלים העיקריים הן בכך שלסדרות מרוכבות היבט של דו-מימד, ויש להן ייצוג ויזואלי עשיר ומורכב יותר מאשר לסדרות ממשיות.

התכונה היסודית שעליה מבוססים כל שאר התכונות של סדרות מרוכבות היא העובדה שסדרה מרוכבת היא למעשה צרוף פשוט של שתי סדרות ממשיות: $z_n = a_n + ib_n$. זה מאפשר לפרק כל טענה על סדרה מרוכבת לשתי טענות שקולות על סדרות ממשיות.

טענה 2.16: סדרה מרוכבת $z_n = a_n + ib_n$ מתכנסת לגבול $z = a + bi$ אם ורק אם $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$.

הוכחה:

כיוון 1: נניח כי $\lim_{n\to\infty} z_n = z$. על סמך זהות 9 במשפט 1.2

$$|a - a_n| = |\mathrm{Re}\,(z - z_n)\,| \le |z - z_n|$$

לכן $\lim_{n\to\infty} |a - a_n| = 0$, ולכן $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. באותו אופן נוכיח ש־$\lim_{n\to\infty} b_n = b$.

כיוון 2: נניח כי $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. אזי

$$|z - z_n| = |(a - a_n) + (b - b_n)i| \le |a - a_n| + |b - b_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

השתמשנו באי-שוויון המשולש. ∎

דוגמה 15:

א. הסדרה $\left\{\frac{2n}{n+1} + ie^{-\frac{1}{n}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת לגבול $2 + i$ כי

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+1} = 2, \quad \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{1}{n}} = 1$$

ב. נחשב את גבול הסדרה $\left\{\frac{n+i}{n-i}\right\}_{n=1}^{\infty}$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{n+i}{n-i} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+i)^2}{(n-i)(n+i)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - 1 + 2ni}{n^2+1} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{n^2+1} + \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n^2+1}\, i = 1\end{aligned}$$

ניתן להכליל באופן טבעי את רוב ההגדרות ומשפטי הגבולות מהחשבון הדיפרנציאלי הממשי לתחום המספרים המרוכבים. לא נטרח לעשות זאת במסגרת הקורס מקוצר זמן ועניין. נדגים את הרעיון באמצעות הוכחת משפט בולצאנו-ויארשטראס עבור שדה המספרים המרוכבים.

משפט 2.17: אם הסדרה $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת לגבול z אז

א. הסדרה $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ חסומה

ב. $\lim_{n\to\infty} \overline{z_n} = \overline{z}$

ג. $\lim_{n\to\infty} |z_n| = |z|$

הוכחה: **א.** הסדרה $\{|z-z_n|\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ולכן חסומה על ידי ממשי M.

$$|z_n| = |z_n - z + z| \leq |z_n - z| + |z| \leq M + |z|$$

ב. נניח כי $z_n = x_n + iy_n$, $z = x + iy$. על פי הנתון, $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim_{n\to\infty} y_n = y$, ולכן

$$\lim_{n\to\infty} \overline{z_n} = \lim_{n\to\infty} (x_n - iy_n) = \lim_{n\to\infty} x_n - i\lim_{n\to\infty} y_n = x - iy = \overline{z}$$

ג. על סמך אי-שוויון המשולש (משפט 1.3) $\big||z_n| - |z|\big| \leq |z_n - z| \to 0$. ∎

משפט 2.18: (בולצאנו-ווייארשטראס)
לכל סדרה חסומה של מספרים מרוכבים יש תת-סדרה מתכנסת.

הוכחה: תהי $z_n = a_n + ib_n$ סדרה חסומה של מספרים מרוכבים. כלומר קיים ממשי חיובי $R > 0$ כך שלכל n, $|z_n| \leq R$. מאחר ו־$|a_n| \leq |z_n| \leq R$ וגם $|b_n| \leq |z_n| \leq R$, יוצא שהסדרות $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ חסומות. על פי משפט בולצאנו-ווייארשטראס עבור סדרות ממשיות קיימת תת-סדרה מתכנסת $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ של $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. תהי $u_n = c_n + id_n$ תת-הסדרה של $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ המתאימה לסדרה $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$. לאחר שימוש חוזר במשפט בולצאנו-ווייארשטראס עבור הסדרה הממשית d_n נקבל תת-סדרה מתכנסת של $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$. ∎

משפט 2.19: קבוצה $S \subseteq \mathbb{C}$ היא קבוצה סגורה אם ורק אם לכל סדרת נקודות $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ ב־S המתכנסת לגבול $z = \lim_{n\to\infty} z_n$ גם $z \in S$.

הוכחה: כיוון 1: אם S סגורה ואם $z_n \in S$ מתכנסת לנקודה $z \notin S$, אז מהגדרת הגבול לכל $\varepsilon > 0$ הסביבה $\mathbb{D}(z,\varepsilon)$ חותכת את S, ולכן z היא נקודת שפה של S ולכן צריכה להיות ב־S.

כיוון 2: נניח כי לכל סדרה מתכנסת $z_n \in S$ גם $\lim_{n\to\infty} z_n \in S$. נוכיח כי הקבוצה $\mathbb{C} - S$ פתוחה. תהי $z \in \mathbb{C} - S$. יש להוכיח כי z נקודה פנימית. כלומר קיים $r > 0$ כך ש־$\mathbb{D}(z,r) \subseteq \mathbb{C} - S$. נניח בשלילה שאין כזה r. כלומר לכל n, הסביבה $\mathbb{D}(z,\frac{1}{n})$ חותכת את S. כלומר, לכל n קיים $z_n \in \mathbb{D}(z,\frac{1}{n}) \cap S$, ולכן $z_n \to z$. על פי ההנחה $z \in S$. סתירה. ∎

הגדרה 2.21: קבוצה S נקראת **קבוצה קומפקטית** אם S היא קבוצה סגורה וחסומה.

תרגיל 2.2: תהי S קבוצה קומפקטית, ותהי $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת קבוצות פתוחות כך ש־$S \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. הוכח כי קיים m כך ש־$S \subseteq \bigcup_{n=1}^{m} A_k$.

הדרכה: זוהי אחת התכונות החשובות של קבוצה קומפקטית: **לכל כיסוי פתוח יש תת-כיסוי סופי**. הנח בשלילה שזה לא נכון ובנה סדרת נקודות $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ בקבוצה S כך שלכל n, $z_n \notin \bigcup_{k=1}^{n} A_n$.

טענה 2.20: (הלמה של קנטור) תהי $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה יורדת של קבוצות קומפקטיות לא ריקות. אזי

א. $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \emptyset$.

ב. אם בנוסף, $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(K_n) = 0$, אז קיימת נקודה z_0 כך ש־$\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \{z_0\}$.

הוכחה: בסדרה יורדת הכוונה לכך ש־$K_{n+1} \subseteq K_n$. נציג את רעיון ההוכחה ונשאיר לתלמיד להשלים את הפרטים כתרגיל. לכל n, נבחר נקודה $z_n \in K_n$. בגלל הקומפקטיות, לסדרה $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ יש תת-סדרה מתכנסת. לכן ללא הגבלת הכלליות נוכל להניח כי $z_n \to z_0$. לא קשה להוכיח כי לכל n, $z_0 \in K_n$. לכן $z_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \emptyset$.

סעיף ב': כזכור, הביטוי $\operatorname{diam}(K_n)$ מציין את הקוטר של K_n (ראה הגדרה 2.3). אם החיתוך יכיל שתי נקודות שונות z_1, z_2, אז המרחק ביניהם $d = |z_1 - z_2| > 0$, ולכן על פי הגדרת הקוטר, לכל n, $\operatorname{diam}(K_n) \geq d$. בסתירה לנתון $\operatorname{diam}(K_n) \to 0$. ∎

הגדרה 2.22: נקודה z_0 נקראת **נקודת הצטברות של קבוצה** S אם לכל $\varepsilon > 0$,

$$\dot{\mathbb{D}}(z_0, \varepsilon) \cap S \neq 0$$

כלומר כל סביבה נקובה של z_0 חותכת את S.

הערה: ראה הגדרה 3.2 של סביבה נקובה (עמוד 99).

דוגמה 16: כל נקודה על מעגל $|z| = R$ היא נקודת הצטברות של העיגול הפתוח $|z| < R$. כל נקודה על מעגל $|z| = R$ היא גם נקודת הצטברות של המישור המחורר $|z| > R$.

תרגיל 2.3: נקודה z_0 היא נקודת הצטברות של קבוצה S אם ורק אם קיימת סדרת נקודות שונות $z_n \in S$ כך ש־$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$, וסדרת המרחקים $|z_n - z_0|$ היא סדרה מונוטונית יורדת ממש של מספרים חיוביים.

הדרכה: בנה את z_n באינדוקציה. התחל עם $\varepsilon_1 = 1$. קיים $z_1 \in S$ כך ש־$0 < |z_1 - z_0| < 1$. שלב $n+1$: קח $\varepsilon_{n+1} = \operatorname{Min}\left\{\frac{|z_n - z_0|}{2}, \frac{1}{2^{n+1}}\right\}$.

טענה 2.21: קבוצה S היא סגורה אם ורק אם היא מכילה את כל נקודות ההצטברות שלה.

הגדרה 2.23: קבוצה D נקראת **צפופה בקבוצה** S אם עבור כל נקודה $z \in S$, או ש־$z \in D$ או ש־z נקודת הצטברות של D.

דוגמה 17: קבוצת המספרים המרוכבים "הרציונליים", $D=\{a+bi:\ a,b\in\mathbb{Q}\}$ היא קבוצה צפופה ב־$\mathbb{C}$.

טענה 2.22: קבוצה D צפופה בקבוצה S אם ורק אם כל נקודה $z\in S$ היא גבול של סדרת נקודות $z_n\in D$.

הערה: בניגוד למקרה של נקודת הצטברות, הסדרה z_n עשויה להיות סדרה קבועה $z_n=z$ במקרה ו־$z\in D$. למשל היחידון $S=\{i\}$ הוא קבוצה צפופה בתוך עצמה.

הגדרה 2.24: (**גבול אינסופי**) סדרה של מספרים מרוכבים $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ **מתכנסת לאינסוף** (∞), אם סדרת הערכים המוחלטים שלה $\{|z_n|\}_{n=1}^{\infty}$ שואפת לאינסוף (כסדרת ממשיים).

הערה: בהמשך הקורס נגלה כי במערכת המספרים המרוכבים, לא קיימת הבחנה בין $+\infty$ ו־$-\infty$. זוהי למעשה אותה נקודה בדיוק! ולכן מכאן והלאה לא נפגוש שוב שום איזכור נוסף של הביטוי $-\infty$.

תרגילים לפרק 2

הדרכה: בסוף הרשימה יש **קישור למחברת גוגל** המכילה פתרונות סופיים ומלאים לחלק מהתרגילים. פתרונות נוספים יתווספו במהלך הזמן (מקווה לעזרה מצד התלמידים). נשמח מאוד לקבל מהתלמידים פתרונות נוספים לתרגילים שעדיין לא פתורים!

1. שרטט סקיצה של הקבוצות הבאות על המישור המרוכב

א. $\lvert z-1+i\rvert=1$	**ב.** $\lvert z+i\rvert\le 5$	**ג.** $\lvert z-3i\rvert\ge 3$
ד. $\lvert z-3i\rvert+\lvert z+3i\rvert=8$	**ה.** $\lvert z-1\rvert=\lvert z+i\rvert$	**ו.** $\lvert z-1\rvert\ge\lvert z+i\rvert$
ז. $\mathrm{Re}\,(\overline{z}-i)=2$	**ח.** $\lvert 2\overline{z}+i\rvert=4$	**ט.** $z^2+\overline{z}^2=2$

2. נסה לתת תאור מילולי פשוט ככל האפשר לקבוצות הנקודות הבאות:

א. $\left|\frac{z-1}{z+1}\right|=2$ **ב.** $|z^2-1|=1$ **ג.** $\arg\left(\frac{z-1}{z+i}\right)=\frac{\pi}{3}$

3. מצא את המקום הגאומטרי של כל הנקודות z במישור המתאימות לתאור הפרמטרי

$$z-z_0=r\left(\frac{1+it}{1-it}\right)$$

כאשר $r>0$ הוא מספר ממשי קבוע נתון, $-\infty<t<\infty$ פרמטר ממשי.

הדרכה: על ידי הכפלה בצמוד המכנה קבל $z-z_0=r\left[\frac{(1-t^2)+2it}{1+t^2}\right]$, ואז על ידי ההצבה $t=\tan\frac{\theta}{2}$, עבור להצגה $z-z_0=re^{2i\theta}$, $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$. העזר בזהויות: $\sin\theta=\frac{2\tan\frac{\pi}{2}}{1+\tan^2\frac{\pi}{2}}$, $\cos\theta=\frac{1-\tan^2\frac{\pi}{2}}{1+\tan^2\frac{\pi}{2}}$. מדובר לכן במעגל.

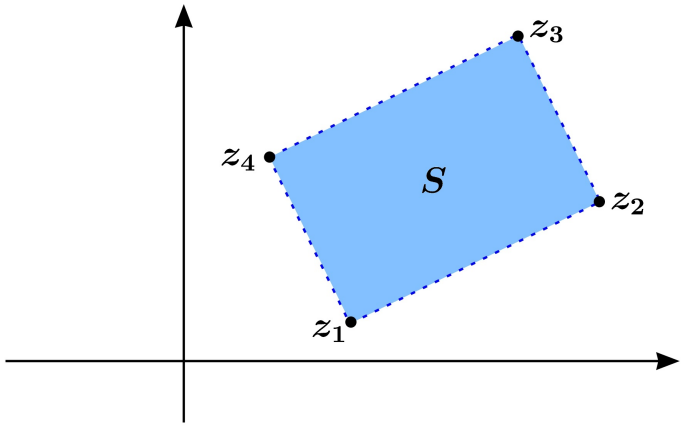
4. יהיו z_1, z_2, z_3 שלוש נקודות שונות במישור המרוכב אשר אינן על אותו ישר. מצא איפיון אלגברי פשוט ככל האפשר לתחום הפתוח המוגבל על ידי המשולש שנוצר מהנקודות הללו.

הדרכה: סמל הגולגולת מציין שהבעייה עשויה להיות קשה מדי ולכן ניתן לדחות אותה לשלב יותר מתקדם בקורס, מבלי שזה יפגע בהתקדמות.



5. יהיו z_1, z_2, z_3, z_4, ארבע נקודות שונות במישור המרוכב שמהוות קודקודים של מלבן. מצא איפיון אלגברי פשוט ככל האפשר לתחום המלבני הפתוח המוגבל על ידי המלבן (ראה שרטוט 2.50).

הדרכה: פתור קודם את תרגיל 27 בפרק 1. הזז את המלבן כך שהנקודה z_1 תתלכד עם ראשית הצירים, ולאחר מכן בצע סיבוב של המלבן סביב הראשית כך שהנקודה z_2 תנחת על הציר הממשי.



איור 2.50: תחום מלבני כללי במישור המרוכב

6. תהי S תת-קבוצה של $\mathbb{C}$. הוכח כי

א. ∂S קבוצה סגורה

ב. $\partial(\partial S) = \partial S$

ג. $\text{Int}\,(\partial S) = \emptyset$

7. תהי S קבוצת מספרים מרוכבים, ותהי C קבוצה סגורה כך ש־ $S \subseteq C$. הוכח כי $\overline{S} \subseteq C$ (כלומר $\overline{S}$ היא הקבוצה הסגורה הכי קטנה הכוללת את S).



8. הוכח שכל קבוצה סופית של נקודות במישור המרוכב היא קבוצה סגורה.



9. הוכח: אם קבוצה S היא בו-זמנית פתוחה וסגורה, אז בהכרח $S = \mathbb{C}$ או $S = \emptyset$.



10. בדוק אילו מבין הקבוצות הבאות הן פתוחות? סגורות? חסומות? קומפקטיות? קשירות? לגבי כל קבוצה, מצא את הפנים, הסגור, והשפה שלה. במידת האפשר מצא את מרכיבי הקשירות של כל קבוצה.

א. $\{\, z \in \mathbb{C} : \ |z-5| > 1 \,\}$

ב. $\{\, z \in \mathbb{C} : \ |z-5| > 1 \text{ and } |z+5| > 1 \,\}$

ג. $\{\, z \in \mathbb{C} : \ z^2 \in \mathbb{R} \,\}$

ד. $\{\, z \in \mathbb{C} : \ |z+5| > 1 \text{ and } |z+5| < 3 \,\}$

ה. $\{\, z \in \mathbb{C} : \ |\text{Re}\,(z)| \leq 1 \text{ and } |z| > 2 \,\}$

ו. $\{\, z \in \mathbb{C} : \ |z| < 1 \text{ and } \text{Re}\,(z) \neq |z| \,\}$

11. בנה דוגמה עבור

א. תחום פשוט-קשר D, אשר הסגור שלו $\overline{D}$ אינו פשוט-קשר.

ב. תחום D שאינו פשוט-קשר, אבל הסגור שלו $\overline{D}$ היא קבוצה פשוטת-קשר.

ג. קבוצה סגורה פשוטת-קשר, אשר הפנים שלה הוא קבוצה לא קשירה.

ד. תחום חסום ופשוט-קשר אשר השפה שלו אינה מסלול ז'ורדן.

ה. קבוצה פתוחה ולא-קשירה D אשר הסגור שלה $\overline{D}$ היא פשוטת-קשר.

רמז: א. טבעת מחורצת, ב. עיגול נקוב, ג. התבונן בשרטוט 2.45, ד. עיגול מחורץ, ה. עיגול גזור.

12. הוכח כי כל מסלול $\sigma : I \to \mathbb{C}$ הוא קבוצה קשירה, כאשר I עשוי להיות כל אחד מהקטעים הבאים: (a,b), $[a,b)$, $(a,b]$, $(-\infty,b)$, (a,∞), $(-\infty,\infty)$,

13. הוכח כי $\lim_{n\to\infty} z^n = 0$ אם ורק אם $|z| < 1$.

14. הוכח או הפרך על ידי דוגמה נגדית: אם $\lim_{n\to\infty} z_n = z$ אז $\lim_{n\to\infty} \operatorname{Arg}(z_n) = \operatorname{Arg}(z)$.

15. בדוק התכנסות או התבדרות של כל אחת מהסדרות הבאות. מצא את הגבול אם הסדרה מתכנסת

א. $\dfrac{(1+i)^n}{n}$ **ב.** $\dfrac{i^n}{n}$ **ג.** $n\left(\dfrac{1+i}{2}\right)^n$ **ד.** ni^n

16. הוכח ש- $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+2i}-\sqrt{n+i}\right)=0$

17. הוכח ש- $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+2i}-\sqrt{n+i}\right)=\frac{i}{2}$

18. תהי $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת מספרים מרוכבים המקיימת

$$\lim_{n\to\infty}|z_n| = |z_0|$$
$$\lim_{n\to\infty}\operatorname{Arg}(z_n) = \operatorname{Arg}(z_0)$$

הוכח כי $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$.

19. הוכח או הפרך על ידי דוגמה נגדית:

א. אם S קבוצה קשירה אז גם הקבוצה המשלימה $\mathbb{C} - S$ היא קבוצה קשירה.

ב. אם D_1, D_2, שני תחומים לא זרים, אז גם $D_1 \cup D_2$ הוא תחום.

ג. אם D_1, D_2, שני תחומים לא זרים, אז גם $D_1 \cap D_2$ הוא תחום.

ד. אם D_1 היא תחום, D_2 קבוצה פתוחה ופשוטת-קשר, $D_2 \subset D_1$, אז ההפרש $D_1 - D_2$

קבוצה קשירה.

ה. אם S קבוצה לא-קשירה אז גם הסגור שלה $\overline{S}$ היא קבוצה לא-קשירה.

ו. אם A קבוצה צפופה בקבוצה B, ואם B צפופה ב־C, אז A צפופה ב־C.

ז. קיימות שתי קבוצות זרות ולא ריקות A, B, כך ש־A צפופה ב־B, ו־B צפופה ב־A.

ח. אם $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה יורדת של קבוצות סגורות ולא ריקות אז $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n \neq \emptyset$.

ט. אם D_1, D_2, תחומים לא זרים ופשוטי קשר, אז גם $D_1 \cup D_2$ הוא תחום פשוט קשר.

הערות: ב. המונח "לא זרים" מציין כי $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$. ג. נסה לאחד שני תחומים בצורת בננה כל אחד. ח. סדרת קבוצות $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ נקראת סדרה יורדת אם לכל n, $S_n \supseteq S_{n+1}$. ט. בחר טבעת וחצה אותה לשני חלקים ...

20. יהיו $a, c \in \mathbb{R}$, $c > 0$. תאר את קבוצת הנקודות המקיימות את המשוואה

$$|z - a| - |z + a| = 2c$$

עבור כל ערך אפשרי של a, c.

21. מצא פרמטריזציה $x(t) + iy(t)$, $a \leq t \leq b$ של האליפסה $|z - 1| + |z + 1| = 4$.

22. המרחק $d(z, S)$ בין נקודה z לקבוצה לא-ריקה S מוגדר להיות החסם התחתון של כל המספרים הממשיים $|z - s|$, עבור כל $s \in S$

$$d(z, S) = \operatorname{Inf}_{s \in S} |z - s|$$

תהי S תת-קבוצה סגורה של $\mathbb{C}$, ותהי $z \notin S$. הוכח כי

א. $d(z, S) > 0$

ב. קיימת נקודה $s \in S$ כך ש־$d(z, S) = |z - s|$.

23. המרחק $d(S_1, S_2)$ בין שתי קבוצות לא-ריקות $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{C}$ מוגדר על ידי

$$d(S_1, S_2) = \operatorname{Inf}_{\substack{z \in S_1 \\ w \in S_2}} |z - w|$$

אם S_1, S_2, הן שתי קבוצות קומפקטיות זרות, הוכח כי

א. $d(S_1, S_2) > 0$

ב. קיימות נקודות $z_1 \in S_1$, $z_2 \in S_2$, כך ש־$d(S_1, S_2) = |z_1 - z_2|$.

24. בהמשך לתרגיל 23, תן דוגמה לשתי קבוצות סגורות, לא ריקות, וזרות S_1, S_2, כך ש־$d(S_1, S_2) = 0$.

רמז: התבונן בהיפרבולה $y = 1/x$.

25. בהמשך לתרגיל 23, האם טענת התרגיל נותרת נכונה כאשר רק אחת מהקבוצות היא קומפקטית והשניה סגורה?

הדרכה: אם S_1 קומפקטית ו־S_2 סגורה, הקף את S_1 בעיגול, ונפח את העיגול עד שהוא חותך את S_2.

26. הוכח כי קבוצה סגורה היא קשירה אם ורק אם לא ניתן לפרק אותה לשתי קבוצות סגורות זרות ולא ריקות.

הדרכה: תהי S קבוצה סגורה, ונניח כי $S = S_1 \cup S_2$ הוא פירוק של S לשתי קבוצות סגורות וזרות S_1, S_2. אפשר להניח כי S חסומה (למה?). על סמך תרגיל 23, $r = d(S_1, S_2) > 0$. נגדיר $A_1 = \bigcup_{z \in S_1} \mathbb{D}(z, r/3)$, $A_2 = \bigcup_{z \in S_2} \mathbb{D}(z, r/3)$. הוכח כי (A_1, A_2) פירוק פתוח של S.
כיוון שני: אם קיים פירוק פתוח (B_1, B_2) של S. הראה כי $(S - B_1, S - B_2)$ הוא פירוק סגור של S.

27. הוכח: אם S קבוצה סגורה ופשוטת-קשר, אז השפה של S היא קבוצה קשירה.

28. תהי S קבוצה פתוחה, ויהי σ מסלול חסום המוכל בשלמותו בתוך S.

א. הוכח כי קיים ממשי חיובי $\varepsilon > 0$, כך שלכל נקודה z על המסלול σ, העיגול הפתוח $\mathbb{D}(z, \varepsilon)$ כלול בשלמותו בתוך S.

ב. הוכח כי קיימים n עיגולים פתוחים $\mathbb{D}(z_1, \varepsilon)$, $\mathbb{D}(z_2, \varepsilon)$, ..., $\mathbb{D}(z_n, \varepsilon)$, שכלולים בתוך S, מכסים את המסלול σ (כלומר $\sigma \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} \mathbb{D}(z_k, \varepsilon)$), ושמרכזיהם מונחים על המסלול σ. ראה שרטוט 2.51.

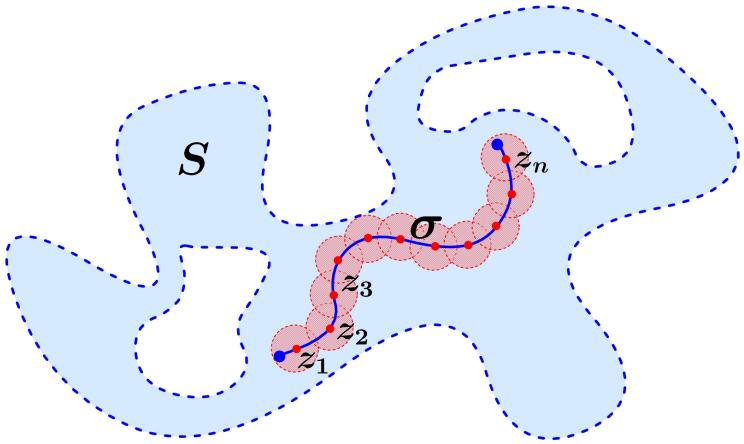
הדרכה: זוהי טענת עזר חשובה שתסייע לנו בפרק 5 בהוכחת משפט קושי-גורסה 5.8 שהוא אחד המשפטים החשובים בקורס. טענה זו מזכירה לנו את תכונת הכיסוי הסופי של קבוצה קומפקטית (ראה תרגיל 2.2). המסלול σ הוא קבוצה קומפקטית (למה?), ואוסף כל העיגולים הפתוחים $\mathbb{D}(z, r)$ הכלולים בתוך S הוא כיסוי של המסלול σ. לכן על פי תוצאת תרגיל 2.2 (עמוד 74) קיימת קבוצה סופית של עיגולים כאלה המכסה את המסלול. הבעייה היחידה היא שלא מובטח לנו שלכל העיגולים האלה יש אותו רדיוס או שמרכזיהם יהיו על המסלול. כיוון מעניין אחר הוא להתבונן במרחק r שבין השפה ∂S של S והמסלול σ. על סמך תרגיל 6, ∂S היא קבוצה סגורה. על סמך תרגילים 23, 25, המרחק r מוגדר היטב וחיובי $r > 0$. קל להוכיח שאם z נקודה על המסלול σ, אז העיגול $\mathbb{D}(z, r)$ כלול בתוך S. קל לבחור נקודות מתאימות על המסלול במרווחים קטנים מ־r בכדי לכסות אותו (אבל זה נובע באופן אוטומטי מתכונת הקומפקטיות). ראה שרטוט 2.51.

29. העזר בתוצאת תרגיל 28 בכדי לתת הוכחה נוספת לכיוון הראשון של משפט 2.11. כלומר: אם S קבוצה פתוחה וקשירה טופולוגית, אז S קשירה פוליגונלית.

30. שני מסלולים $\sigma_1 : [a_1, b_1] \to \mathbb{C}$, $\sigma_2 : [a_2, b_2] \to \mathbb{C}$, נקראים **שקולים** אם

$$\sigma_1([a_1, b_1]) = \sigma_2([a_2, b_2])$$

כלומר, מדובר באותו עקום עם שתי פרמטריזציות שונות. הוכח: לכל מסלול $\sigma : [a, b] \to \mathbb{C}$ קיים מסלול שקול $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$.



איור 2.51: שרטוט עבור תרגיל 28

הדרכה: בנה פונקציה רציפה $f\colon [0,1] \to [a,b]$ ובנה את המסלול $\gamma(t) = \sigma(f(t))$.

31. יהי D תחום נתון, ותהי S תת-קבוצה של שפת D ($S \subseteq \partial D$). הוכח כי הקבוצה $D \cup S$ היא קבוצה קשירה.

32. יהי D תחום נתון, ויהיו $z_1, z_2 \in \partial D$, שתי נקודות שונות על שפת D. הוכח כי קיים מסלול פשוט σ שמחבר בין הנקודה z_1 לנקודה z_2, אשר כל הנקודות הפנימיות שלו הן נקודות פנימיות של D.

רמז: במילים אחרות: המסלול σ כלול ב־D מלבד נקודות הקצה z_1, z_2, שעל שפת D.
הפעל את תרגיל 31 על הקבוצה $D \cup \{z_1, z_2\}$.

33. שרטט סקיצה של הקבוצה המישורית W המתוארת על ידי

$$W = \left\{ \left(x, \sin\tfrac{1}{x}\right) : \ 0 < x < 1 \right\} \cup \{0\} \times [-2,1] \cup [0,1] \times \{-2\} \cup \{1\} \times [-2, \sin(1)]$$

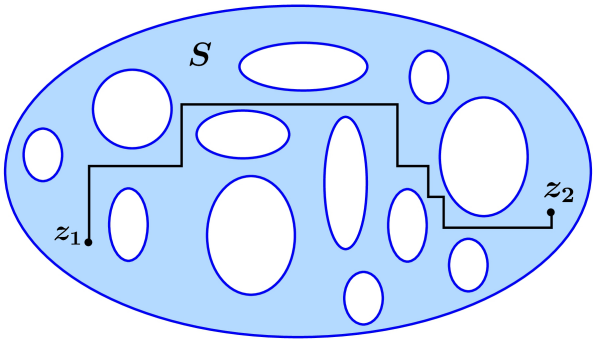
א. הוכח כי W היא קבוצה סגורה וחסומה (כלומר קומפקטית), ופשוטת-קשר.
ב. הוכח כי למעשה W הוא עקום פשוט ופתוח, חסום, אך בעל אורך אינסופי!
ג. נסה לתת תאור פרמטרי $\sigma(t) = x(t) + y(t)$, $\sigma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$, עבור העקום W.
ד. האם קיים מסלול מהנקודה $(0.5, -1)$ לנקודה $(0.5, 2)$ אשר אינו חותך את W?

הדרכה: העקום W נקרא לפעמים "מעגל" ורשה (Warsaw Circle), למרות שהוא קרוב יותר למלבן, ולמרות שהוא אינו עקום סגור! (למה?). את החלק הראשון שלו פגשנו כבר בדוגמה 13 (עמוד 68). למרות שהוא חסום ופשוט (אינו חותך את עצמו), אורכו הוא אינסופי! מומלץ לפרק אותו לארבעה מסלולים ולהגדיר כל אחד מהם בנפרד ואז לשרשר ($\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4$). לאחר שרטוט הסקיצה, הנקודה $(0.5, -1)$ תראה בערך במרכז "המעגל", ואילו הנקודה $(0.5, 2)$ נראית מחוץ ל־"מעגל". הנח שקיים מסלול γ בין שתי נקודות אלה והעזר בתרגיל 23 בנוגע למשמעות המרחק בין σ ו־γ. להעמקה נוספת לחץ על הקישור: **mathoverflow.net**

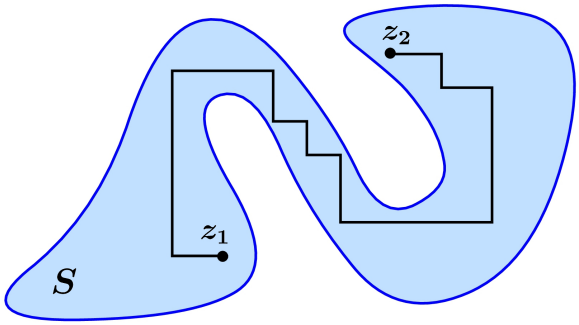
34. קשירות רקטיליניארית: קו שבור נקרא **קו רקטיליניארי** אם כל צלעותיו מקבילות לציר הממשי או לציר המדומה. קווים רקטיליניאריים נמצאים בשימוש נרחב בתיכנון שבבים

אלקטרוניים. קבוצה S נקראת **קשירה רקטילינירית** אם בין כל שתי נקודות שונות $z_1, z_2 \in S$ קיים קו רקטילינירי המחבר בין z_1 ו־z_2 (ראה שרטוטים 2.52, 2.53). הוכח כי קבוצה פתוחה S היא קשירה טופולוגית אם ורק אם היא קשירה רקטילינירית.

הדרכה: ניתן לנפק הוכחה דומה לזו של משפט 2.11, או להעזר בתוצאת תרגיל 28 בכדי לנפק הוכחה יותר קצרה.



איור 2.53: קבוצה קשירה רקטילינירית



איור 2.52: קבוצה קשירה רקטילינירית

35. הוכח כי הטבעת $4 < |z| < 5$ היא קבוצה קשירה פוליגונלית. מהו המספר הכי קטן של צלעות שנדרש בכדי לחבר בין כל שתי נקודות בטבעת? מהו המספר הכי קטן של צלעות שנדרש בכדי לחבר בין כל שתי נקודות בטבעת על ידי מסלול רקטילינירי? (תרגיל 34).

הערה: אתגר מתימטי לא פשוט, אך לא ממש מחובר לתוכן הקורס. לכן אפשר לדלג, אבל מומלץ לנסות ולהתרשם.

36. בכדי להעריך את המורכבות שבהוכחת משפט ז'ורדן, נסה להוכיח אותו עבור משולש. כלומר: יהיו z_1, z_2, z_3, שלוש נקודות במישור המרוכב שאינן על אותו ישר. הוכח כי המשולש הנוצר על ידם $[z_1, z_2, z_3, z_1]$ מחלק את המישור המרוכב לשתי קבוצות פתוחות וקשירות. הקבוצה הראשונה חסומה (פנים המשולש) והקבוצה השניה לא-חסומה (חוץ המשולש). מה לגבי מרובע ומחומש?

הדרכה: נסה למצוא איפיון אלגברי פשוט לכך שנקודה z נמצאת בתוך המשולש $[z_1, z_2, z_3, z_1]$ כפי שמתבקש בתרגיל 4. הראה שקבוצת כל הנקודות המקיימות את האיפיון הזה היא פתוחה וקשירה. באופן דומה, מצא איפיון אלגברי פשוט לכך שנקודה z נמצאת מחוץ למשולש $[z_1, z_2, z_3, z_1]$. הראה שגם קבוצה זו פתוחה וקשירה, אך אינה חסומה.

37. קרא את דף הויקיפדיה הבא על **פונקציית ווייארשטראס** ובנה באמצעותה מסלול חסום

$$\sigma : [0,1] \to \mathbb{C}$$

בעל אורך אינסופי.

WIKIPEDIA The Weierstrass Function

הדרכה: הבנת ההגדרה של פונקציית ווייארשטראס מצריכה היכרות טובה עם נושא טורים שנדון בפרק 6, אבל בכדי לפתור את התרגיל אין צורך בהבנת ההגדרה של הפונקציה. כל מה שאנו זקוקים לו הוא הקיום של פונקציה כזו, ויש למצוא כיצד להשתמש בה בכדי להגדיר מסלול סגור שאורכו אינסופי.

38. נקודה z נקראת r-פנימית של קבוצה U, אם $\mathbb{D}(z,r) \subseteq U$. הוכח כי עבור כל $r > 0$, קבוצת כל הנקודות ה־r-פנימיות של U היא קבוצה סגורה.

רעיון אפשרי: אם $z_n \to z_0$ אז $\mathbb{D}(z_n,r) \to \mathbb{D}(z_0,r)$.

39. תהי U קבוצה פתוחה. הוכח כי קיימת סדרה עולה של קבוצות קומפקטיות $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$, $K_n \subseteq K_{n+1}$, כך ש־ $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$.

הדרכה: תרגיל 38 עשוי לעזור

40. הוכח או הפרך על ידי דוגמה נגדית: אם D תחום פשוט-קשר, ואם $S \subseteq D$ קבוצה סגורה פשוטת-קשר, אז קבוצת ההפרש $D - S$ היא תחום (כלומר קבוצה פתוחה וקשירה).

הדרכה: עבור על תרגיל 33.

קישור לפתרונות

פרק 3

פונקציות מרוכבות

3.1 מושגי יסוד

- לאחר שסקרנו את נושא הקבוצות, בפרק הנוכחי נדון בפונקציות של מספרים מרוכבים ובשלל המושגים הקשורים להם. פונקציה מרוכבת $f : S \to \mathbb{C}$ היא התאמה חד-ערכית בין קבוצה של מספרים מרוכבים $S \subseteq \mathbb{C}$ ל־$\mathbb{C}$. המונח "חד-ערכית" מציין שלכל $z \in S$ מותאם בדיוק ערך יחיד $f(z) \in \mathbb{C}$.
- הקבוצה S נקראת **תחום הפונקציה** ובמקרים רבים היא אכן תחום במובן זה שהיא קבוצה פתוחה וקשירה.
- אוסף כל הערכים של הפונקציה נקרא **התמונה של** f והוא מסומן על ידי

$$\text{image}(f) = \{\, f(z) : \ z \in S \,\}$$

כמו כן, לכל תת-קבוצה $A \subseteq S$ נגדיר את **התמונה של** A **תחת** f על ידי

$$f(A) = \{\, f(z) : \ z \in A \,\}$$

לכן נוכל גם לרשום $\text{image}(f) = f(S)$.

- בדומה לחדו"א 1, נגדיר ונחקור את מושגי הגבול, הרציפות, והגזירות של פונקציות מרוכבות, ונלמד כיצד הם קשורים לפונקציות ממשיות. כמו כן, יהיה עלינו להרחיב את הפונקציות המעריכיות, הלוגריתמיות, והטריגונומטרית למספרים המרוכבים, ולבדוק האם הרחבה זו משמרת את התכונות שלהן.

את הפונקציה $f(z)$ ניתן להציג גם בצורה **קרטזית**

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

כאשר $u(x,y)$, $v(x,y)$ הן פונקציות ממשיות בשני משתנים ממשיים x, y

$$\begin{cases} u(x,y) = \mathrm{Re}\,(f(z)) \\ v(x,y) = \mathrm{Im}\,(f(z)) \end{cases}$$

למשל את הפונקציה $f(z) = z^2$ ניתן להציג גם בצורה הקרטזית הבאה

$$f(x+iy) = (x+iy)^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi$$

לכן במקרה זה

$$\begin{cases} u(x,y) = x^2 - y^2 \\ v(x,y) = 2xy \end{cases}$$

באופן דומה את פונקציית הצמוד $f(z) = \overline{z}$ ניתן להציג גם כך:

$$f(x+iy) = x - iy$$

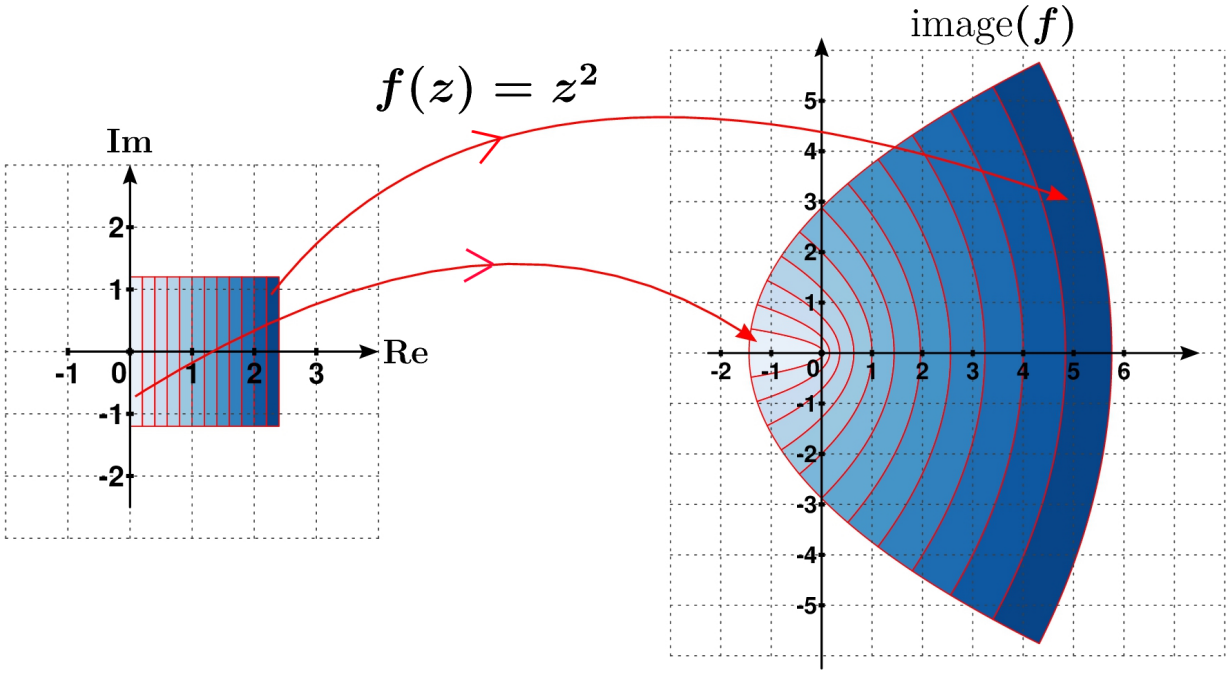
ולכן במקרה זה

$$\begin{cases} u(x,y) = x \\ v(x,y) = -y \end{cases}$$

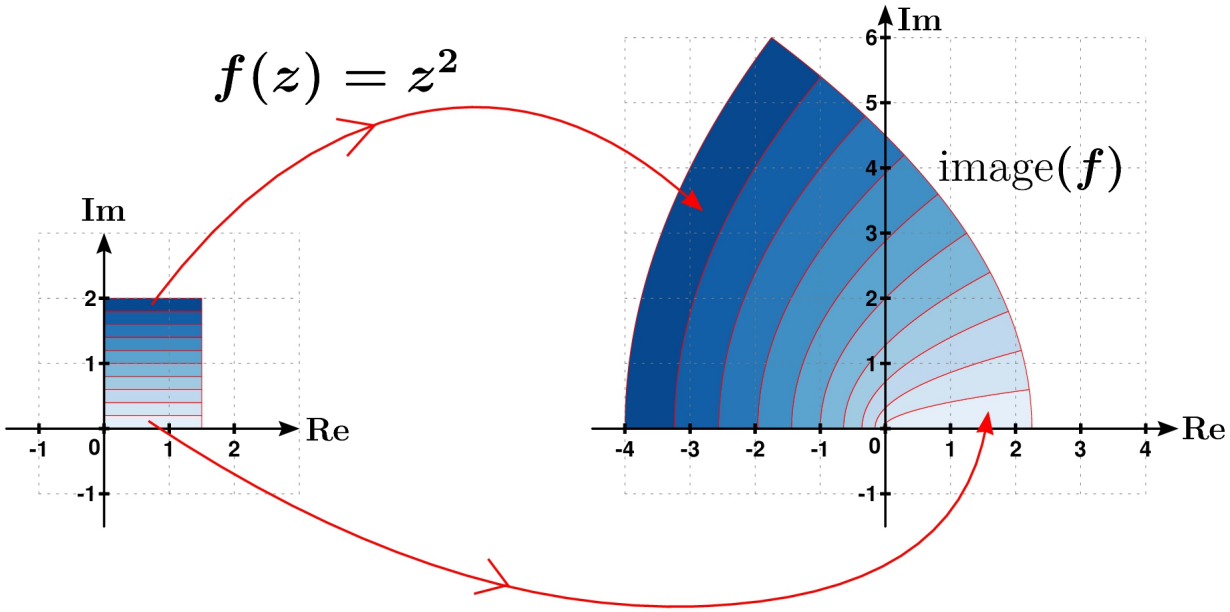
במקרים פשוטים ניתן לשרטט את התחום S והטווח של הפונקציה, אבל את גרף הפונקציה לא ניתן לצייר מאחר ומדובר ביריעה במרחב $\mathbb{R}^4$ שמימדו 4. למרות זאת במקרים פשוטים ניתן לשרטט גרפים באמצעות שימוש בצבע עבור המימד הרביעי (דוגמאות בהמשך).

דוגמה 1: אחת הדרכים להמחשה ויזואלית של פונקציה היא באמצעות מיפוי רצועות בצבעים שונים מהתחום לטווח. התמונה של כל רצועה תיצבע באותו צבע כמו הרצועה, ועל ידי כך נוכל להמחיש את העיוות המתבצע על ידי הפונקציה. נדגים זאת על ידי הפונקציה $f(z) = z^2$. בשרטוט 3.1 רואים כיצד הפונקציה פועלת על רצועות אנכיות, ובשרטוט 3.2 רואים כיצד הפונקציה פועלת על רצועות אופקיות. דרך שלישית להמחשת אופן הפעולה של פונקציה מרוכבת היא על ידי הפעלתה על רשת ריבועים בצבעים שונים כפי שרואים בשרטוט 3.3.

תרגיל 3.1: הראה כי הפונקציה $f(z)=z^2$ מעתיקה ישרים אנכיים $(a+ti)$ לפרבולות. מה קורה לישרים אופקיים?



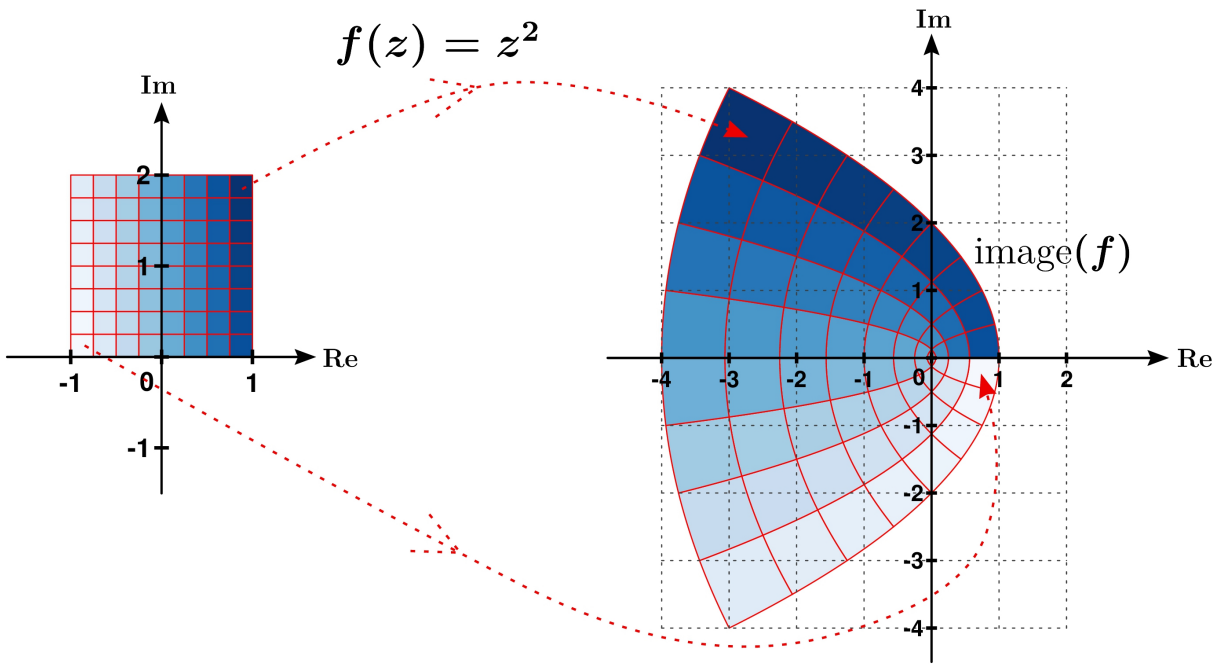
איור 3.1: הפונקציה $f(z)=z^2$ מעתיקה רצועות אנכיות לקשתות בטווח. לכל גוון של כחול בתחום מתאים גוון זהה בטווח.



איור 3.2: הפונקציה $f(z)=z^2$ מעתיקה רצועות אופקיות לקשתות בטווח. לכל גוון של כחול בתחום מתאים גוון זהה בטווח.

פונקציה רב-ערכית וענפים שלה

מטבע הדברים, בנוסף לפונקציות רגילות (חד-ערכיות) נאלץ לעסוק גם בפונקציות רב-ערכיות כגון פונקציית הארגומנט $\arg$ ופונקציות הלוגריתם. אם $f:S\to\mathbb{C}$ פונקציה רב-ערכית, לשם נוחות נניח כי הביטוי $f(z)$ יסמן את קבוצת כל הערכים האפשריים של f



איור 3.3: הפונקציה $f(z) = z^2$ מעתיקה רשת ריבועים לרשת מעוותת בטווח. לכל גוון של כחול בתחום מתאים גוון זהה בטווח.

בנקודה z.

- הפרקטיקה הנהוגה במקרה של פונקציה רב-ערכית היא לבחור ערך יחיד (מתוך אינסוף ערכים אפשריים) בכל נקודה בתחום ההגדרה שלה.

הגדרה 3.1: תהי $f: S \to \mathbb{C}$ פונקציה רב-ערכית. פונקציה חד-ערכית נקראת **ענף של** f **בתחום** $D \subseteq S$ אם לכל $z \in D$, $g(z) \in f(z)$.

- נזכיר כי "תחום" הוא קבוצה פתוחה וקשירה. מההגדרה ברור כי לכל פונקציה רב-ערכית ייתכנו אינסוף ענפים שונים. ברוב המקרים שנפגוש בהמשך, האתגר יהיה למצוא ענפים בעלי תכונות "טובות" (כגון רציפות וגזירות), גם במחיר של ויתור על חלק מהנקודות של תחום ההגדרה.

3.2 הפונקציות האלמנטריות

- את הפונקציות האלמנטריות פגשנו כבר בקורסי החדו"א. הן הפונקציות הכי שכיחות ושימושיות שפוגשים ברוב שטחי המדע, ולכן נקדיש להם את הסעיף הנוכחי.
- בדומה לפונקציות של משתנה ממשי, גם כאן ניתן לבנות את הפונקציות האלמנטריות על פי המתווה של פונקציות יסודיות ופעולות אלמנטריות. הפונקציות היסודיות הן אבני הבניין והפעולות האלמנטריות משמשות לבניית פונקציות יותר ויותר מורכבות.
- **הפונקציות היסודיות:**

א. הפונקציות הקבועות $f(z)=c$, עבור קבוע $c\in\mathbb{C}$

ב. פונקציית הזהות $f(z)=z$

ג. הפונקציות המעריכיות $f(z)=c^z$

ד. פונקציות החזקה $f(z)=z^c$

ה. הפונקציות הטריגונומטריות: $\sin(z)$, $\cos(z)$, $\tan(z)$

ו. הפונקציות הלוגריתמיות $f(z)=\log_c z$

ז. הפונקציות הטריגונומטריות ההפוכות: $\arcsin(z)$, $\arccos(z)$, $\arctan(z)$

- **הפעולות האלמנטריות**: חיבור, חיסור, כפל, חילוק, הרכבה.
- **הפונקציות האלמנטריות** הן כל הפונקציות שניתן לבנות מהפונקציות היסודיות באמצעות הפעולות האלמנטריות.
- לדוגמה, את הפונקציות $f(z)=cz^n$ נקבל מהפונקציות היסודיות $f(z)=c$, $f(z)=z$ על ידי שימוש בפעולת הכפל $n+1$ פעמים

$$cz^n=c\cdot\underbrace{z\cdot z\cdot\cdots\cdot z}_{n\text{ פעמים}}$$

- על ידי חיבור פונקציות מהצורה az^k נוכל להגדיר את **הפולינומים**

$$f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n$$

- את **הפונקציות הרציונליות** נקבל על ידי חילוק של שני פולינומים $P(z)$, $Q(z)$:

$$f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}=\frac{a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n}{b_0+b_1z+b_2z^2+\cdots+b_mz^m}$$

- פעולת ההרכבה בין שתי פונקציות מוגדרת על ידי $g(f(z))$. כלומר על ידי הפעלת פונקציה g על פלט של פונקציה f.
- לדוגמה, הפונקציה e^{z^2+5} מתקבלת על ידי הרכבת הפולינום $f(z)=z^2+5$ עם הפונקציה המעריכית $g(z)=e^z$

$$g(f(z))=g(z^2+5)=e^{z^2+5}$$

פעולת ההרכבה אינה קומוטטיבית!

$$f(g(z))=f(e^z)=e^{2z}+5$$

ברוב המקרים $g(f(z))\neq f(g(z))$.

- נסקור את הפונקציות היסודיות לפרטיהם. מפאת קוצר הזמן, נשאיר חלק מהטענות לתלמיד כעבודת בית.

הפונקציה e^z

- בשלב זה נציג את ההגדרה של הפונקציה המעריכית e^z, עבור מספר מרוכב $z = x + iy$

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

הביטוי e^x מוגדר היטב עבור מספר ממשי x, ואת הביטוי e^{iy} הגדרנו בפרק הראשון (נוסחת אוילר (1.8)), ולכן יש לנו עכשיו הגדרה שלמה של e^z עבור כל $z \in \mathbb{C}$.

- הצורה הקרטזית של הפונקציה e^z היא

$$\boxed{e^z = e^{x+yi} = e^x \cos y + ie^x \sin y} \tag{3.1}$$

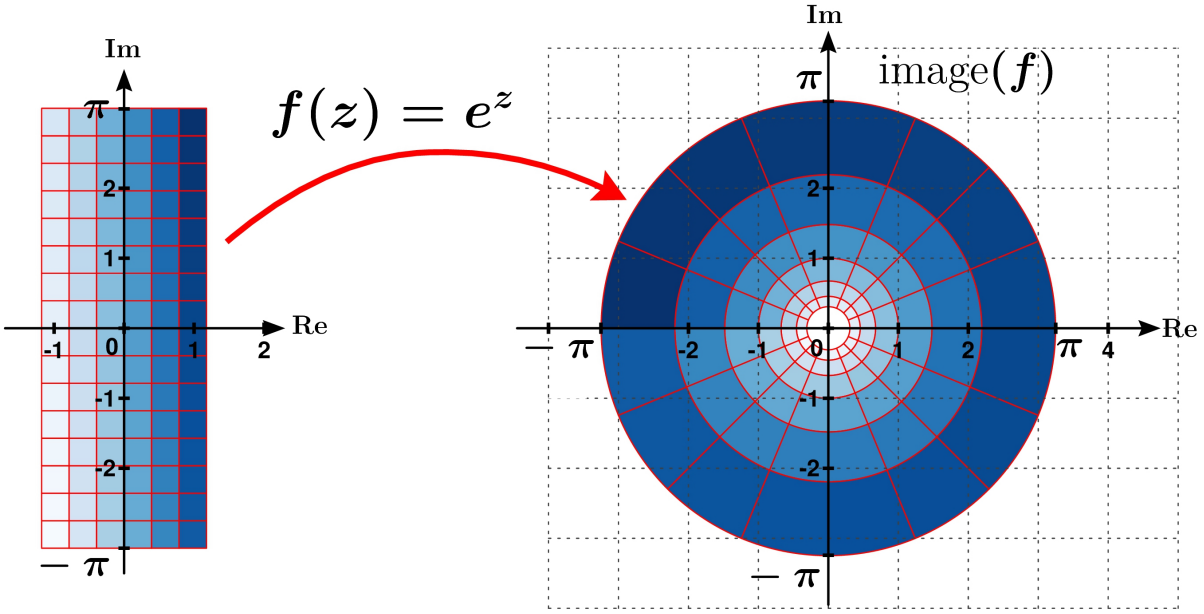
- כמובן שאם החלק המדומה מתאפס ($y = 0$) אז הפונקציה e^z מתלכדת עם הפונקציה הממשית e^x, ולכן הפונקציה e^z היא **הרחבה** של הפונקציה הממשית e^x לשדה המספרים המרוכבים!

- לפונקציה e^z **מחזור** באורך $2\pi i$. כלומר, עבור כל $z \in \mathbb{C}$,

$$\boxed{e^{z+2\pi i} = e^z} \tag{3.2}$$

המשמעות הקריטית של עובדה זו היא שהפונקציה e^z אינה חד-חד-ערכית ולכן אינה הפיכה! לכן פונקציית הלוגריתם היא רב-ערכית. כזכור הפונקציה הממשית e^x הפיכה מעל כל $\mathbb{R}$ והפונקציה ההפוכה שלה $\ln x$ היא חד-חד-ערכית.

- **תרגיל 3.2:** בשרטוט 3.4 רואים מפת צבעים של e^z. התלמיד מתבקש לספק נימוק מדויק לעובדה שישרים אנכיים בתחום עוברים למעגלים סביב הראשית בטווח, ואילו ישרים אופקיים בתחום עוברים לישרים משופעים דרך הראשית. למשל הישר האופקי $y = \frac{\pi}{4}$ עובר לישר המשופע $y = \frac{\pi}{4}x$.



איור 3.4: מפת צבעים של הפונקציה $f(z) = e^z$: קווים אנכיים עוברים למעגלים, קווים אופקיים עוברים לישרים משופעים

- זהויות יסודיות שקל להוכיח

$$\begin{aligned} e^{z_1+z_2} &= e^{z_1}e^{z_2} \\ e^{z_1-z_2} &= \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} \\ |e^z| &= e^{\mathrm{Re}(z)} \\ \mathrm{Arg}\,(e^z) &= \mathrm{Im}\,(z) \end{aligned} \tag{3.3}$$

פונקציית הלוגריתם $\log z$

- למען הבהירות נשתמש בסימן $\ln$ בכדי לציין את פונקציית הלוגריתם הממשי בלבד, ובסימון $\log$ עבור פונקציית הלוגריתם הטבעי המרוכבת.
- במקרה הממשי, פונקציית הלוגריתם הטבעי $y = \ln x$ מוגדרת להיות הפתרון של המשוואה

$$e^y = x \tag{3.4}$$

כאשר x נתון, והנעלם הוא y. הפונקציה הממשית e^y היא פונקציה חיובית, רציפה, מונוטונית עולה מעל כל $\mathbb{R}$, ומקיימת $\lim_{y\to-\infty} e^y = 0$, $\lim_{y\to\infty} e^y = \infty$. לכן זוהי פונקציה חד-חד-ערכית מ־$\mathbb{R}$ ל־$\mathbb{R}^+$. לכן עבור כל ממשי $x > 0$ קיים פתרון אחד ויחיד y למשוואה

(3.4). פתרון זה מסומן על ידי $\ln x$ וזוהי למעשה ההגדרה של פונקציית הלוגריתם הטבעי.

בשדה המספרים המרוכבים, למשוואה $e^w = z$ יש אינסוף פתרונות w עבור $z \neq 0$ נתון. כי לפי נוסחה (3.2), לכל מספר שלם n, $e^{w+2n\pi i} = e^w$. ננסה לאפיין את כל הפתרונות בנוסחה אחת. לשם כך נשתמש בהצגה קוטבית $z = |z|e^{i\arg(z)}$

$$e^w = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = z = |z|e^{i\arg(z)}$$

בגלל ש־$|e^{iy}| = |e^{i\arg(z)}| = 1$ יוצא כי $|z| = e^x$ ולכן $x = \ln|z|$. כמו כן, $e^{iy} = e^{i\arg(z)}$, ולכן $y = \arg(z)$. קיבלנו

$$w = x + iy = \ln|z| + i\arg(z)$$

לכן ההגדרה של הלוגריתם הטבעי מעל שדה המספרים המרוכבים היא

$$\log z = \ln|z| + i\arg(z) \tag{3.5}$$

זוהי כמובן פונקציה רב-ערכית כי פונקציית הארגומנט $\arg$ היא פונקציה רב-ערכית.

הפונקציה $\log z$ אינה מוגדרת עבור $z = 0$ כי הפונקציה (הממשית) $\ln|z|$ מוגדרת רק עבור $|z| > 0$ (אך גם פונקציית הארגומנט אינה מוגדרת עבור $z = 0$).

אם z הוא מספר ממשי חיובי ($z = x + 0i$) אז הפונקציה $\log z$ מתלכדת עם הפונקציה הממשית $\ln x$. לכן הפונקציה המרוכבת $\log z$ היא הרחבה של הפונקציה הממשית $\ln x$.

אם z הוא מספר ממשי שלילי $x < 0$ אז $\log x = \ln|x| + (2n+1)\pi i$. לכן, מעל שדה המרוכבים, פונקציית הלוגריתם מוגדרת גם עבור מספרים שליליים!

דוגמה 2: $\log e = 1 + 2n\pi i$, $n \in \mathbb{Z}$

טענה 3.1: לכל $z \neq 0$

$$e^{\log z} = z \tag{3.6}$$

השוויון (3.6) חל כמובן על כל אינסוף הערכים האפשריים של $\log z$.

טענה 3.2: לכל $z \in \mathbb{C}$

$$\log e^z = z + 2n\pi i, \qquad n \in \mathbb{Z} \tag{3.7}$$

הענף הראשי של פונקציית הלוגריתם $\mathrm{Log}(z)$ מתקבל על ידי החלפת פונקציית הארגומנט $\arg$ בענף הראשי של פונקציית הארגומנט Arg (שהיא חד-ערכית!)

$$\mathrm{Log}(z) = \ln|z| + i\mathrm{Arg}(z) \tag{3.8}$$

זוהי אומנם פונקציה חד-ערכית רגילה אך כמו $\mathrm{Arg}(z)$ היא לא רציפה על ציר-x השלילי. בהמשך הפרק נוכיח כי היא גזירה ורציפה במישור המחורץ.

זהות בסיסית: לכל $z \neq 0$

$$e^{\mathrm{Log}(z)} = z \tag{3.9}$$

אזהרה: הזהויות הלוגריתמיות המוכרות מתחום המספרים הממשיים אינן תמיד עוברות לתחום המרוכבים! למשל בגלל הגבלת הטווח של הפונקציה $\mathrm{Arg}(z)$ לקטע $(-\pi,\pi]$, הזהות הידועה $\ln ab = \ln a + \ln b$ (a, b ממשיים חיוביים) אינה נכונה יותר עבור המספרים המרוכבים! אם נקח למשל $z_1 = z_2 = e^{\frac{3\pi i}{2}}$ אז

$$\mathrm{Log}(z_1 z_2) = \mathrm{Log}\left(e^{\frac{3\pi i}{2}} e^{\frac{3\pi i}{2}}\right) = \mathrm{Log}\left(e^{3\pi i}\right) = \mathrm{Log}\left(e^{\pi i}\right) = \pi i$$

אבל

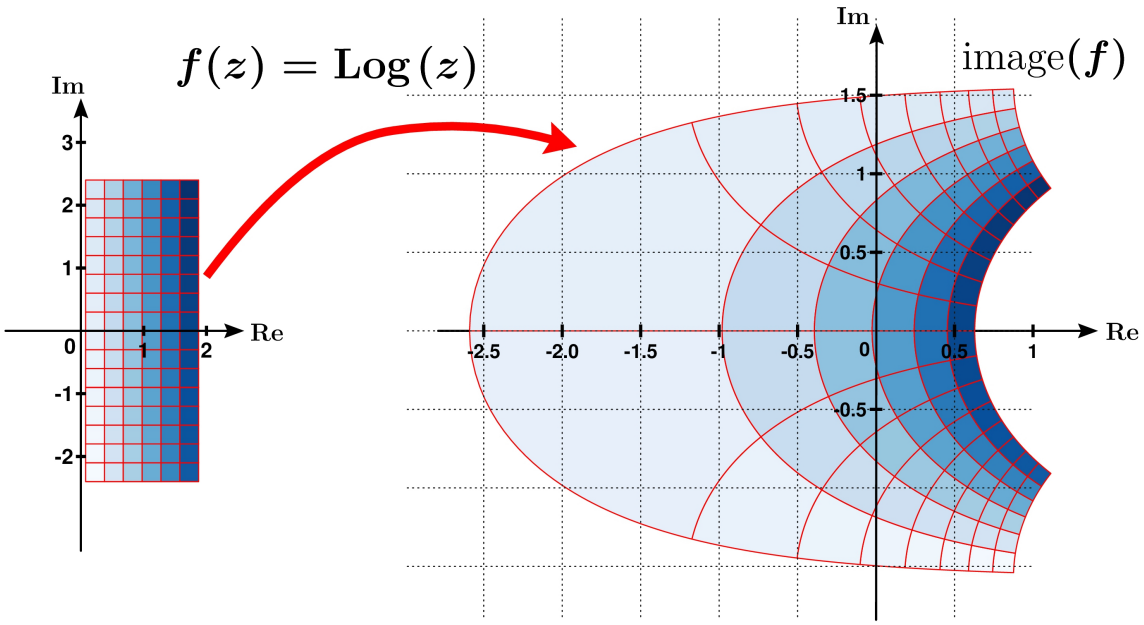
$$\mathrm{Log}(z_1) + \mathrm{Log}(z_2) = \mathrm{Log}\left(e^{\frac{3\pi i}{2}}\right) + \mathrm{Log}\left(e^{\frac{3\pi i}{2}}\right) = -\frac{\pi i}{2} - \frac{\pi i}{2} = -\pi i$$

מידע נוסף על פונקציית הלוגריתם יובא בהמשך הקורס. נמשיך בסקירת הפונקציות היסודיות.

תרגיל 3.3: בשרטוט 3.5 מוצגת מפת צבעים עבור הפונקציה $\mathrm{Log}(z)$. נסה לגלות מהן סוגי העקומים אליהן הפונקציה מעתיקה ישרים אנכיים ואופקיים? נסה להוכיח את השערתך.

דוגמה 3: נחשב את $\mathrm{Log}(-1)$ ואת $\mathrm{Log}(i)$

$$\begin{aligned}\mathrm{Log}(-1) &= \ln|-1| + i\mathrm{Arg}(-1) = \pi i \\ \mathrm{Log}(i) &= \ln|i| + i\mathrm{Arg}(i) = \frac{\pi i}{2}\end{aligned}$$



איור 3.5: מפת צבעים של הפונקציה $f(z) = \mathrm{Log}(z)$ עבור סריג מלבני בחצי המישור הימני

פונקציות החזקה z^c

- עבור $c = 0$, $z^c = 1$, לכל $z \neq 0$.
- פונקציית החזקה z^c עבור קבוע מרוכב $c \in \mathbb{C} - \{0\}$ מוגדרת על ידי

$$z^c = e^{c \log z} \tag{3.10}$$

מאחר ו־$\log z$ היא פונקציה רב-ערכית, גם z^c היא פונקציה רב-ערכית. הפונקציה אינה מוגדרת בנקודה $z = 0$.

דוגמה 4:

$$i^{-5i} = e^{-5i \log i} = e^{-5i(\frac{\pi i}{2} + 2n\pi i)} = e^{\frac{5\pi}{2} - 10n\pi}$$

קיבלנו כי ל־i בחזקת $-5i$ יש אינסוף תשובות אפשריות וכולן ממשיות!

דוגמה 5:

$$9^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}(\ln 9 + 2n\pi i)} = e^{\frac{1}{2}\ln 9} \cdot e^{n\pi i} = 3e^{n\pi i}$$

חשוב לא לבלבל בין הביטוי $\sqrt{z}$ שהוא פונקציה חד-ערכית שמתקבלת מבחירת ענף ראשי, לבין הביטוי $z^{\frac{1}{2}}$ שמציין פונקציה רב-ערכית!

- יוצא שלפונקציית החזקה יש אינסוף ענפים. **הענף הראשי של פונקציית החזקה** הוא הענף

שמתקבל על ידי הצבת הענף הראשי של הלוגריתם בנוסחה (3.10)

$$z^c = e^{c\mathrm{Log}(z)} \tag{3.11}$$

ברוב ההקשרים, נשתמש בביטוי z^c בכדי לציין את הענף הראשי של פונקציית החזקה (אלא אם נבחר במפורש ענף אחר). ברוב המקרים המעשיים, תחום ההגדרה של z^c אינו כולל את החריץ $(-\infty, 0]$ בכדי לקבל רציפות וגזירות מעל המישור המחורץ.

דוגמה: נחשב את הענף הראשי של $z^{\frac{2}{3}}$

$$\begin{aligned} z^{\frac{2}{3}} &= e^{\frac{2}{3}\mathrm{Log}(z)} = e^{\frac{2}{3}[\ln|z|+i\mathrm{Arg}(z)]} = e^{\frac{2}{3}\ln|z|} \cdot e^{\frac{2i}{3}\mathrm{Arg}(z)} \\ &= \sqrt[3]{|z|^2}\left[\cos\frac{2\mathrm{Arg}\,(z)}{3} + i\sin\frac{2\mathrm{Arg}\,(z)}{3}\right] \end{aligned}$$

תרגיל 3.4: מהי משמעות הטענה $z^a z^b = z^{a+b}$? והאם היא נכונה? האם הטענה נכונה עבור ענף ראשי?

הדרכה: משני צידי השוויון מעורבים אינסוף ענפים. הטענה אינה נכונה כללית! נכונה עבור ענף ראשי.

תרגיל 3.5: מהי המשמעות של הטענה $z^{ab} = (z^a)^b$? והאם היא נכונה? האם הטענה נכונה עבור ענף ראשי?

הפונקציות המעריכיות c^z

באופן דומה לפונקציות החזקה, נוכל להגדיר את הפונקציות המעריכיות על ידי

$$c^z = e^{z\log c}$$

ושוב נקבל פונקציה רב-ערכית, אם כי במקרה זה רב-הערכיות נחשבת לפחות מהותית מאשר בדרך כלל

$$c^z = e^{z\log c} = e^{z(\ln|c|+i(\mathrm{Arg}(c)+2n\pi))} = e^{z(\mathrm{Log}(c)+2n\pi i)} \quad (n\in\mathbb{Z})$$

מסיבות שיובהרו בהמשך, מקובל לראות בנוסחה האחרונה תאור של משפחה אינסופית של פונקציות חד-ערכיות ולא פונקציה רב-ערכית מרובת ענפים.

- לכן ברוב המקרים שנפגוש, הביטוי c^z יתייחס לפונקציה החד-ערכית עבור $n=0$. כלומר

$$c^z = e^{z\mathrm{Log}(c)} \tag{3.12}$$

- עבור הענף הראשי של c^z הזהויות הבאות קלות להוכחה

$$\begin{aligned} c^{z_1}c^{z_2} &= c^{z_1+z_2} \\ \frac{c^{z_1}}{c^{z_2}} &= c^{z_1-z_2} \\ c^z c^{-z} &= 1 \end{aligned} \tag{3.13}$$

הפונקציות הטריגונומטריות

- הפונקציות הטריגונומטריות המרוכבות מוגדרות באמצעות הפונקציה המעריכית e^z

$$\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} \qquad \cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \tag{3.14}$$

גם כאן קל לבדוק שאם החלק המדומה מתאפס ($z=x+0i$) אז נקבל את הפונקציות הממשיות הידועות $\sin x$, $\cos x$. כלומר, הפונקציות $\sin z$, $\cos z$ הן **הרחבות** של הפונקציות הממשיות $\sin x$, $\cos x$ עבור המספרים המרוכבים.

- לשתי הפונקציות מחזור 2π (לא $2\pi i$!). קל להוכיח כי עבור כל מספר שלם n

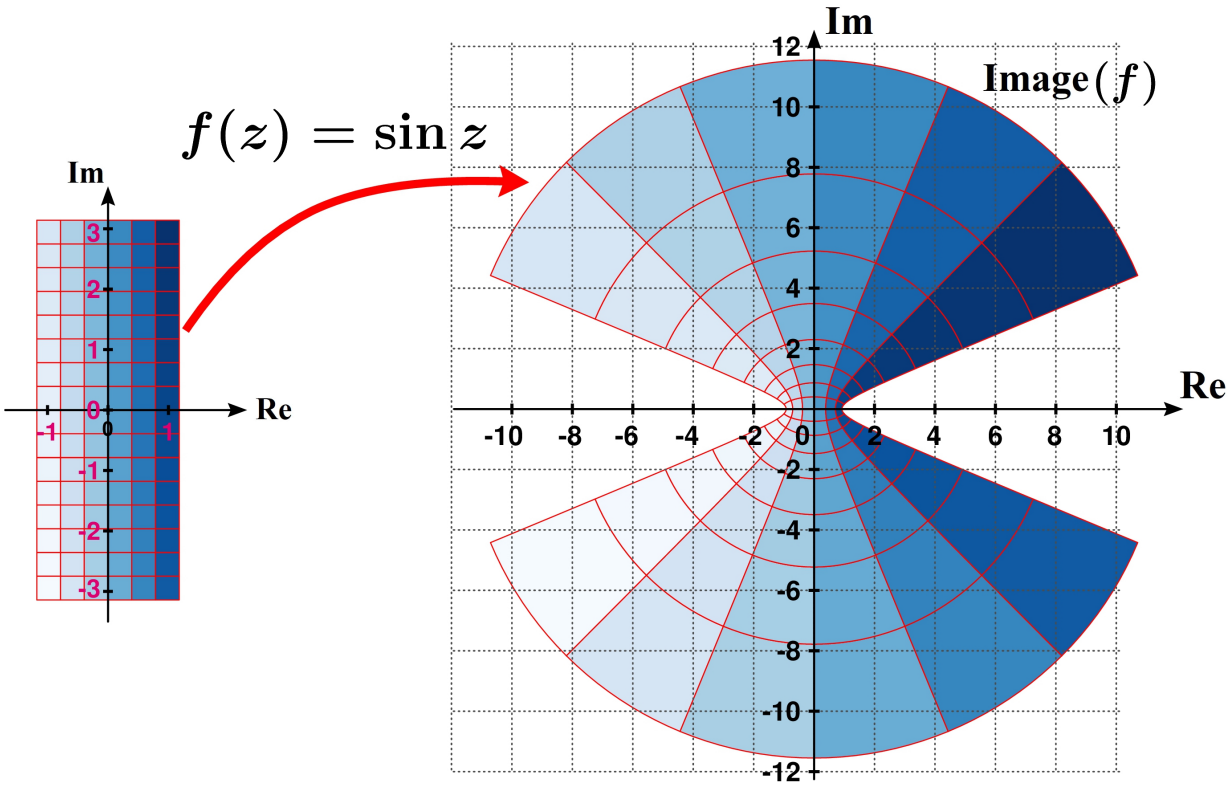
$$\begin{aligned} \sin(z+2n\pi) &= \sin z \\ \cos(z+2n\pi) &= \cos z \end{aligned} \tag{3.15}$$

פונקציות הטנגנס והקוטנגנס מוגדרות כצפוי על ידי

$$\begin{aligned}\tan z &= \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{i(e^{-iz}-e^{iz})}{e^{iz}+e^{-iz}} \\ \cot z &= \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{i(e^{iz}+e^{-iz})}{e^{iz}-e^{-iz}}\end{aligned} \tag{3.16}$$

הפונקציות e^z, $\sin z$, $\cos z$, מוגדרות עבור כל מספר מרוכב! לפונקציות $\tan z$, $\cot z$ יש תחום הגדרה מוגבל יותר. נשאיר לתלמיד כתרגיל למצוא תחומים אלה.

תרגיל 3.6: נסה להוכיח את הטענה המופיעה בשרטוט 3.6 - הפונקציה $\sin z$ מעתיקה ישרים אנכיים להיפרבולות וישרים אופקיים לאליפסות.



איור 3.6: מפת צבעים של הפונקציה $f(z) = \sin z$: ישרים אנכיים עוברים להיפרבולות. ישרים אופקיים עוברים לאליפסות

זהויות יסודיות

מתוך מבחר רב של זהויות טריגונומטריות, נציג מספר קטן של זהויות חשובות. מפאת קוצר הזמן, נשאיר לתלמיד להוכיח אותן כתרגיל. נציין רק שהזהויות עבור מספרים ממשיים אינן עוברות באופן אוטומטי למספרים מרוכבים, ולכן דרושה הוכחה לזהויות המוכללות

למספרים מרוכבים.

$$\begin{aligned}&\sin^2 z + \cos^2 z = 1\\&\sin(x+yi) = \sin x \cdot \cosh y + i\cos x \sinh y\\&\cos(x+iy) = \cos x \cdot \cosh y - i\sin x \sinh y\end{aligned} \tag{3.17}$$

יש לשים לב להבדל בין שתי הזהויות האחרונות לזהויות המקבילות בטריגונומטריות ממשית שבהן לא מעורבות הפונקציות ההיפרבוליות!

תזכורת: הפונקציות ההיפרבוליות הממשיות הוגדרו כך (x ממשי)

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

ההגדרה של הפונקציות ההיפרבוליות עבור מספרים מרוכבים זהה

$$\begin{aligned}\sinh(z) &= \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \frac{e^{2z}-1}{2e^z}\\\cosh(z) &= \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \frac{e^{2z}+1}{2e^z}\\\tanh(z) &= \frac{\sinh(z)}{\cosh(z)} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} = \frac{e^{2z}-1}{e^{2z}+1}\\\coth(z) &= \frac{\cosh(z)}{\sinh(z)} = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}} = \frac{e^{2z}+1}{e^{2z}-1}\end{aligned} \tag{3.18}$$

נדגיש כי מדובר בהגדרות, לא בזהויות! (יש לשים לב לצבע הרקע)

זהויות טריגונומטריות נוספות

$$\begin{aligned}&\sin\left(\tfrac{\pi}{2} - z\right) = \cos z \qquad &&\sin(z+\pi) = -\sin z\\&\cos\left(\tfrac{\pi}{2} - z\right) = \sin z \qquad &&\cos(z+\pi) = -\cos z\end{aligned} \tag{3.19}$$

פונקציות טריגונומטריות והיפרבוליות הפוכות

מאחר והפונקציות הטריגונומטריות הוגדרו באמצעות הפונקציה המעריכית e^z, נוכל לחשב את הפונקציות ההפוכות להן באמצעות אלגברה תיכונית פשוטה. למשל, בכדי לקבל את $\arcsin z$, נחלץ את w כפונקציה של z מהמשוואה הבאה

$$z = \sin w = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}$$

קל לראות ש־

$$e^{iw} - \frac{1}{e^{iw}} = 2iz$$

על ידי הכפלת שני האגפים בביטוי e^{iw} נקבל את המשוואה הריבועית

$$\left(e^{iw}\right)^2 - 2ize^{iw} - 1 = 0$$

ולכן

$$e^{iw} = \frac{2iz \pm \sqrt{4 - 4z^2}}{2} = iz + (1 - z^2)^{\frac{1}{2}}$$

יש כמובן לקחת בחשבון את שני הענפים של $(1 - z^2)^{\frac{1}{2}}$. לכן

$$iw = \log\left[iz + (1 - z^2)^{\frac{1}{2}}\right]$$

ולכן קיבלנו את הנוסחה הבאה

$$\boxed{\arcsin z = -i \log\left[iz + (1 - z^2)^{\frac{1}{2}}\right]} \tag{3.20}$$

באופן דומה נקבל את הנוסחאות

$$\boxed{\begin{aligned} \arccos z &= -i \log\left[iz + (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}}\right] \\ \arctan z &= \tfrac{i}{2}\left[\log(1 - iz) - \log(1 + iz)\right] \\ \operatorname{arccot} z &= \tfrac{i}{2}\left[\log(1 - \tfrac{i}{z}) - \log(1 + \tfrac{i}{z})\right] \end{aligned}} \tag{3.21}$$

מומלץ לנסות לפחות את אחת הזהויות כתרגיל בית!

נציין שכל הפונקציות הטריגונומטריות ההפוכות הן פונקציות רב-ערכיות. בכדי לקבל ענף

של $\arcsin$ למשל, יש לבחור ענף של $\log$ וענף של $(1-z^2)^{\frac{1}{2}}$.

- **הפונקציות ההיפרבוליות ההפוכות:** באופן דומה ניתן למצוא את הפונקציות ההפוכות של הפונקציות ההיפרבוליות: $\operatorname{arcsinh}$, $\operatorname{arccosh}$, $\operatorname{arctanh}$, $\operatorname{arccoth}$. לא יעשה בהן שימוש בקורס הנוכחי. נוסחאות והסבר מפורט על הפונקציות ההיפרבוליות ההפוכות ניתן לקבל בקישור הבא

The complex inverse trigonometric and hyperbolic functions

3.3 גבול ורציפות של פונקציה מרוכבת

- נגדיר עכשיו את מושג הגבול ומושג הרציפות עבור פונקציה מרוכבת. לשם כך נזדקק למושג **סביבה נקובה** של נקודה.

הגדרה 3.2: (סביבה נקובה) תהי z_0 נקודה נתונה, ויהי $r>0$ ממשי חיובי. **סביבה נקובה** של z_0 היא העיגול הפתוח סביב z_0 ללא הנקודה z_0

$$\begin{aligned}\dot{\mathbb{D}}(z_0,r) &= \{\,z\in\mathbb{C}:\ 0<|z-z_0|<r\,\}\\ &= \mathbb{D}(z_0,r)-\{z_0\}\end{aligned}$$

- מושג הגבול עבור פונקציות מרוכבות הוא למעשה הכללה פשוטה של מושג הגבול המוכר לנו מהחשבון הדיפרנציאלי.

הגדרה 3.3: תהי $f:S\to\mathbb{C}$ פונקציה המוגדרת בסביבה נקובה של נקודה z_0 (כלומר קיים $r>0$ כך ש־$\dot{\mathbb{D}}(z_0,r)\subseteq S$). נאמר כי ל־$f$ יש גבול w בנקודה z_0, ונרשום $\lim_{z\to z_0} f(z)=w$, אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $r>0$ כך ש־$f(\dot{\mathbb{D}}(z_0,r))\subseteq\mathbb{D}(w,\varepsilon)$.

- ניתן לרשום זאת גם בצורה סימבולית

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists r>0,\ \forall z\in\mathbb{C}:\quad 0<|z-z_0|<r \implies |f(z)-w|<\varepsilon$$

- ההגדרה אינה מחייבת שהפונקציה תהיה מוגדרת בנקודה z_0 בכדי שיהיה לה גבול בנקודה זו. רוב הדוגמאות המעניינות שנפגוש בהמשך הן דוקא של קיום גבול בנקודה שבה הפונקציה אינה מוגדרת.

- הרעיון הבסיסי של מושג הגבול של פונקציה בנקודה z_0 הוא, שככל שאנו קרובים לנקודה z_0 (אך נבדלים ממנה!) הערך של f הולך ומתקרב לגבול w. הסביבה הנקובה $\dot{\mathbb{D}}(z_0,r)$

היא קבוצת כל הנקודות z שנמצאות במרחק חיובי קטן מ־r מהנקודה z_0. הקבוצה $f(\dot{\mathbb{D}}(z_0,r))$ היא התמונה שלה. דרך נוספת להגדיר את הגבול היא על ידי

$$\rho(r) = \sup\{\,|f(z)-w| : \ 0<|z-z_0|<r\,\}$$

אזי הטענה $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=w$ שקולה לטענה $\lim\limits_{r\to 0}\rho(r)=0$.

טענה 3.3: $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=w$ אם ורק אם $\lim\limits_{z\to z_0}|f(z)-w|=0$.

הוכחה: הגדר את הפונקציה $g(z)=f(z)-w$ ועשה שימוש בהגדרת הגבול. ∎

לא נטרח להביא דוגמה להוכחת קיום גבול על פי ההגדרה. המשפט הבא מצמצם את מושג הגבול של פונקציה מרוכבת לשני גבולות של פונקציות של שני משתנים, המוכרים לנו היטב מקורס חדו"א 2.

משפט 3.4: תהי $f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$ פונקציה מוגדרת בסביבה נקובה של $z_0=x_0+iy_0$. אזי $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=a+bi$ אם ורק אם

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y)=a \qquad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y)=b$$

הוכחה: ההוכחה דומה מאוד להוכחת טענה 2.16. לכן לא נתעכב על פרטים.

כיוון 1: נניח שקיים הגבול $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=a+bi$. נוכיח את שני הגבולות האחרים.

יהי $\varepsilon>0$. קיים $r>0$ כך שלכל $z\in\dot{\mathbb{D}}(z_0,r)$, $|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$. נבחר $\delta=r/2$, ונניח כי $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$. אזי $|x-x_0|<\delta$ וגם $|y-y_0|<\delta$ ולכן

$$\begin{aligned}
&|z-z_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\sqrt{r^2/4+r^2/4}=\tfrac{\sqrt{2}}{2}r<r\\
&\implies |f(z)-(a+bi)|<\varepsilon\\
&\implies \sqrt{[u(x,y)-a]^2+[v(x,y)-b]^2}<\varepsilon\\
&\implies |u(x,y)-a|<\varepsilon \text{ and } |v(x,y)-b|<\varepsilon
\end{aligned}$$

קיבלנו כי

$$0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta \implies |u(x,y)-a|<\varepsilon \text{ and } |v(x,y)-b|<\varepsilon$$

ולכן על פי הגדרת הגבול של חדו"א 2, $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y)=a$, $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y)=b$.

כיוון 2: נניח ששני הגבולות הממשיים קיימים. יהי $\varepsilon>0$. על פי הגדרת הגבול נוכל להניח

כי שקיים $\delta > 0$ כך שלכל $x, y \in \mathbb{R}$

$$0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta \implies |u(x,y) - a| < \varepsilon/2, \quad |v(x,y) - b| < \varepsilon/2$$

על פי אי-שוויון המשולש נקבל

$$\begin{aligned} |f(z) - (a+bi)| &= \sqrt{(u(x,y)-a)^2 + (v(x,y)-b)^2} \\ &\leq |u(x,y) - a| + |v(x,y) - b| < \varepsilon \end{aligned}$$

לכן $\lim_{z \to z_0} f(z) = a + bi$. ∎

ניתן להיעזר במשפט האחרון בכדי להוכיח את המשפט הבא (או פשוט להשתמש בהגדרת הגבול). נשאיר את הפרטים לקורא.

משפט 3.5: יהיו $f(z)$, $g(z)$ פונקציות מוגדרות בסביבה נקובה של z_0, ונניח שקיימים הגבולות $\lim_{z \to z_0} f(z) = u$, $\lim_{z \to z_0} g(z) = v$. אזי קיימים גם הגבולות הבאים

$$\begin{aligned} \lim_{z \to z_0} [f(z) + g(z)] &= \lim_{z \to z_0} f(z) + \lim_{z \to z_0} g(z) = u + v \\ \lim_{z \to z_0} [f(z) - g(z)] &= \lim_{z \to z_0} f(z) - \lim_{z \to z_0} g(z) = u - v \\ \lim_{z \to z_0} f(z) \cdot g(z) &= \lim_{z \to z_0} f(z) \cdot \lim_{z \to z_0} g(z) = uv \\ \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} &= \frac{\lim_{z \to z_0} f(z)}{\lim_{z \to z_0} g(z)} = \frac{u}{v} \qquad (v \neq 0) \end{aligned}$$

משפט 3.6: (גבול של פונקציה מורכבת) תהי $f : S \to \mathbb{C}$ פונקציה מוגדרת בסביבה נקובה של $z_0 = x_0 + iy_0$ בעלת גבול $\lim_{z \to z_0} f(z) = a + bi$, ותהי $g : T \to \mathbb{C}$ פונקציה מוגדרת בסביבה נקובה של $w_0 = a + bi$ בעלת גבול $\lim_{z \to w_0} g(z) = c + di$. אזי לפונקציה המורכבת $g(f(z))$ יש גבול בנקודה z_0 ומתקיים $\lim_{z \to z_0} g(f(z)) = c + di$.

הוכחה: נרשום את f, g, בצורה קרטזית

$$\begin{aligned} f(x+iy) &= u_1(x,y) + v_1(x,y)i \\ g(x+iy) &= u_2(x,y) + v_2(x,y)i \end{aligned}$$

אזי על פי משפט 3.4

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} u_1(x,y) = a, \qquad \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} v_1(x,y) = b$$

נבטא את הפונקציה המורכבת בצורה קרטזית

$$\begin{aligned} g(f(x+iy)) &= g(u_1(x,y)+v_1(x,y)i) \\ &= u_2(u_1(x,y),v_1(x,y))+v_2(u_1(x,y),v_1(x,y))i \end{aligned}$$

לשם נוחות נגדיר את הפונקציות

$$\begin{aligned} u(x,y) &= u_2(u_1(x,y),v_1(x,y)) \\ v(x,y) &= v_2(u_1(x,y),v_1(x,y)) \end{aligned}$$

ונקבל צורה קרטזית נקיה עבור הפונקציה המורכבת

$$g(f(x+iy)) = u(x,y)+v(x,y)i$$

על סמך משפטי גבול מתאימים מקורס חדו"א 2 אנו יודעים כי

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) &= \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u_2(u_1(x,y),v_1(x,y)) = c \\ \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) &= \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v_2(u_1(x,y),v_1(x,y)) = d \end{aligned}$$

ולכן על פי משפט 3.4 $\lim_{z\to z_0} g(f(z)) = c+di$. ∎

נוסחה קצרה שמבטאת את המשפט (תחת התנאים הדרושים כמובן) היא

$$\lim_{z\to z_0} g(f(z)) = g(\lim_{z\to z_0} f(z)) \tag{3.22}$$

המשפט הבא יהיה שימושי עבור הוכחת אי-קיום גבול (או אי-רציפות).

משפט 3.7: תהי $f:S\to\mathbb{C}$ פונקציה מוגדרת בסביבה נקובה של z_0. אם קיים הגבול $\lim_{z\to z_0} f(z)$ אזי עבור כל מסלול $\sigma:I\to\mathbb{C}$ העובר דרך $z_0=\sigma(t_0)$ מתקיים $\lim_{t\to t_0} f(\sigma(t)) = w$.

הוכחה: יהי $\varepsilon>0$. על פי הנתון קיים $r>0$ כך שלכל z ב־$\dot{\mathbb{D}}(z_0,r)$ מתקיים $|f(z)-f(w)|<\varepsilon$. מרציפות המסלול σ נובע כי קיים $\delta>0$ כך שלכל t בסביבה $(t_0-\delta,t_0+\delta)$ מתקיים $|\sigma(t)-\sigma(t_0)|<r$. לכן לכל t בסביבה $(t_0-\delta,t_0+\delta)$ יתקיים $|f(\sigma(t))-f(\sigma(t_0))|<\delta$. ∎

דוגמה 6: נתבונן בפונקציה $f(z)=\frac{z}{|z|}$. היא מוגדרת בסביבה נקובה של $z=0$ (אך לא בנקודה $z=0$ עצמה!). נוכיח כי לא קיים הגבול $\lim_{z\to 0} f(z)$. לשם כך יספיק להתבונן במסלול $\sigma(t)=t$ (ציר ה־x):

$$f(\sigma(t))=\begin{cases}1, & t>0\\ -1, & t<0\end{cases}$$

הגבול $\lim_{t\to 0} f(\sigma(t))$ אינו קיים, ולכן לא קיים הגבול $\lim_{z\to 0} f(z)$.

עקב הדמיון המוחלט למקרה הממשי, נשאיר לתלמיד להוכיח את המשפט הבא כתרגיל.

משפט 3.8: (היינה) תהי $f:S\to\mathbb{C}$ פונקציה מוגדרת בסביבה נקובה של z_0. הגבול $\lim_{z\to z_0} f(z)=w$ קיים אם ורק אם לכל סדרה $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ שמתכנסת לנקודה z_0, $\lim_{n\to\infty} f(z_n)=w$.

רציפות

הגדרה 3.4: תהי $f:S\to\mathbb{C}$ פונקציה מוגדרת בסביבת הנקודה $z_0\in S$. נאמר כי f **רציפה בנקודה** z_0 אם קיים הגבול $\lim_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$. נאמר כי f **רציפה בקבוצה** D אם f רציפה בכל נקודה $z\in D$.

הערות:

א. יש לשים לב כי בחלק הראשון של ההגדרה הסביבה המדוברת היא סביבה רגילה (לא נקובה!). כלומר f חייבת להיות מוגדרת גם בנקודה z_0.

ב. לרציפות בנקודה יש שני רכיבים: קיום גבול בנקודה z_0, ובנוסף שגבול זה הוא $f(z_0)$ (הערך של f בנקודה z_0).

ג. הקבוצה S אינה חייבת להיות פתוחה או סגורה, אך בכדי שפונקציה f תהיה רציפה בנקודה $z_0\in S$, הנקודה z_0 חייבת להיות נקודה פנימית של S.

ד. הטענה שפונקציה f רציפה בקבוצת נקודות $D\subseteq S$ היא בעלת משמעות רק אם כל נקודה $z\in D$ היא נקודה פנימית של S. הקבוצה D אינה חייבת להיות פתוחה או סגורה אבל לכל נקודה $z\in D$ חייבת להיות סביבה $\mathbb{D}(z,r)\subseteq S$ שבה f מוגדרת. טענה זו שקולה לכך שקיימת קבוצה פתוחה $E\subseteq S$ כך ש־$D\subseteq E$.

המשפט הבא הוא מסקנה מיידית ממשפט 3.4.

משפט 3.9: תהי $f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$ פונקציה מוגדרת בקבוצה S. אזי f רציפה בקבוצה S אם ורק אם הפונקציות הממשיות $u(x,y)$, $v(x,y)$ רציפות ב־S.

המשפט הבא הוא מסקנה של משפטים 3.5 ו־3.6.

משפט 3.10: יהיו $f(z)$, $g(z)$ שתי פונקציות רציפות בקבוצה S. אזי

א. הסכום וההפרש $f(z)\pm g(z)$ הן פונקציות רציפות ב־S.

ב. מכפלת הפונקציות $f(z)g(z)$ היא פונקציה רציפה ב־S.

ג. מנת הפונקציות $f(z)/g(z)$ היא פונקציה רציפה ב־S (בכל נקודה בה $g(z)\neq 0$).

ד. הרכבה $g(f(z))$ של שתי פונקציות רציפות נותנת פונקציה רציפה.

דוגמה 7: הפונקציה $f(z)=\overline{z}$ רציפה על כל המישור המרוכב $\mathbb{C}$, כי הצורה הקרטזית שלה היא $f(x+iy)=x-yi$. ידוע כי $u(x,y)=x$, $v(x,y)=-y$ הן פונקציות ממשיות רציפות מעל $\mathbb{R}^2$.

דוגמה 8: הפונקציה $f(z)=|z|$ רציפה על כל המישור המרוכב $\mathbb{C}$, כי הצורה הקרטזית שלה היא $f(x+iy)=\sqrt{x^2+y^2}+0i$. בקורס חדו"א 2 ידוע כי $u(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ רציפה על כל המישור הממשי $\mathbb{R}^2$.

מסקנה 3.11: אם קיים הגבול $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=w$, אזי $\lim\limits_{z\to z_0}|f(z)|=|w|$.

הוכחה: ללא הגבלת הכלליות נניח כי $f(z_0)=w$. לכן f רציפה בנקודה z_0. ראינו קודם כי $g(z)=|z|$ רציפה, וברור כי $|f(z)|=g(f(z))$. מחלק ד' של משפט 3.10 נובע כי גם $|f(z)|$ רציפה. ∎

דוגמה 9: הפונקציות $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(z)$ רציפות על פני כל המישור המרוכב. רואים זאת מייד כשרושמים אותם באופן מפורש: $\mathrm{Re}(x+iy)=x$, $\mathrm{Im}(x+iy)=y$.

דוגמה 10: הפונקציה $f(z)=e^z$ רציפה על פני כל המישור הממשי, כי על פי ההגדרה הצורה הקרטזית של הפונקציה e^z היא

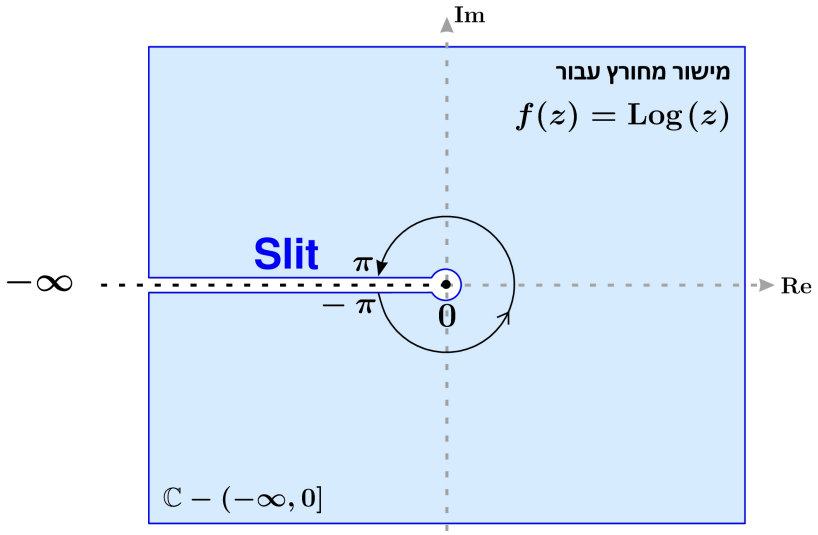
$$e^z=e^{x+yi}=e^x\cos y+ie^x\sin y$$

הפונקציות $u(x,y)=e^x\cos y$, $v(x,y)=e^x\sin y$ רציפות על פני כל המישור הממשי $\mathbb{R}^2$, ולכן על פי משפט 3.9 e^z רציפה ב־$\mathbb{C}$.

דוגמה 11: הענף הראשי של פונקציית הלוגריתם $\mathbf{Log}(z)$ רציפה במישור המחורץ, אך אינה רציפה בחריץ $(-\infty,0)$ (אבל היא מוגדרת עבור כל ממשי שלילי $-\infty<x<0$!).

$$\mathbf{Log}(z)=\ln|z|+i\mathbf{Arg}(z)=\ln\sqrt{x^2+y^2}+\mathbf{atan2}(y,x)\,i$$

הפונקציה $u(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ רציפה במישור הממשי הנקוב $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$, ובפרק הראשון ראינו כי הפונקציה $\mathbf{atan2}$ רציפה במישור המחורץ $\mathbb{C}-(-\infty,0]$. לכן על פי משפט 3.9, הענף הראשי של פונקציית הלוגריתם $\mathbf{Log}(z)$ רציפה במישור המחורץ (שרטוט 3.7).



איור 3.7: המישור המחורץ: $\mathbb{C}-(-\infty,0]$. מישור מרוכב עם חריץ לאורך ציר-x שלילי (Complex Slit Plane)

כל הפונקציות האלמנטריות שהגדרתן מתבססת על ענף של פונקציית הלוגריתם $\log z$ או פונקציית הארגומנט, סובלות מאותה "תופעת חריץ", רק שהחריץ עשוי לזוז לקרן אחרת, לפעמים להפוך להיות קטע סופי, ולפעמים גם מסלול עקום.

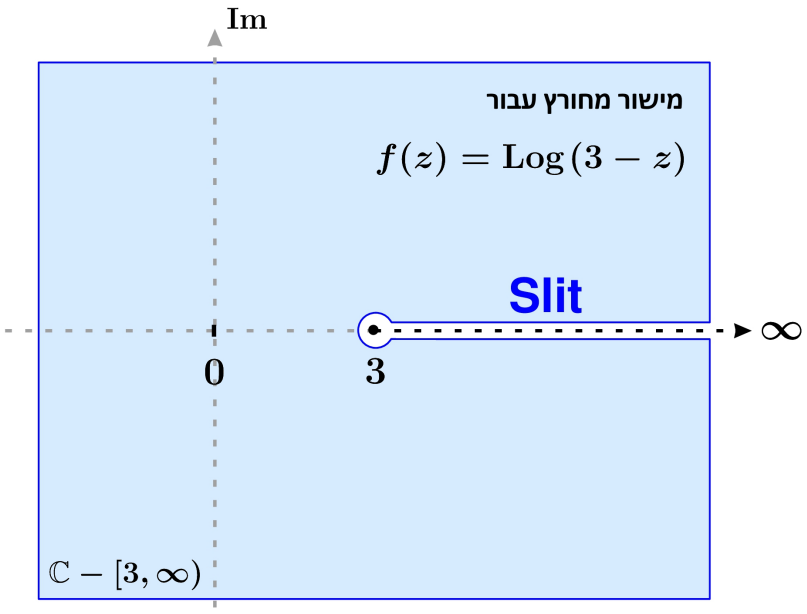
דוגמה 12: הפונקציה האלמנטרית $\mathbf{Log}(3-z)$ (שמתקבלת על ידי הרכבת הפונקציות $f(z)=3-z$, $g(z)=\mathbf{Log}(z)$) מוגדרת במישור הנקוב $\mathbb{C}-\{3\}$ אך אינה רציפה לאורך החריץ $(3,+\infty)$.

דוגמה 13: בנוסחה (3.20) גילינו כי

$$\arcsin z=-i\log\left[iz+(1-z^2)^{\frac{1}{2}}\right]$$

זוהי כמובן פונקציה רב-ערכית מרובת ענפים. ריבוי הענפים מגיע מפונקציית הלוגריתם $\log$ וגם מפונקציית החזקה $(1-z^2)^{\frac{1}{2}}$. הענף הראשי של $\arcsin$ מוגדר על ידי

$$\mathbf{Arcsin}\,z=-i\,\mathbf{Log}\left(iz+\sqrt{|1-z^2|}\,e^{\frac{i}{2}\mathbf{Arg}\left(1-z^2\right)}\right) \tag{3.23}$$



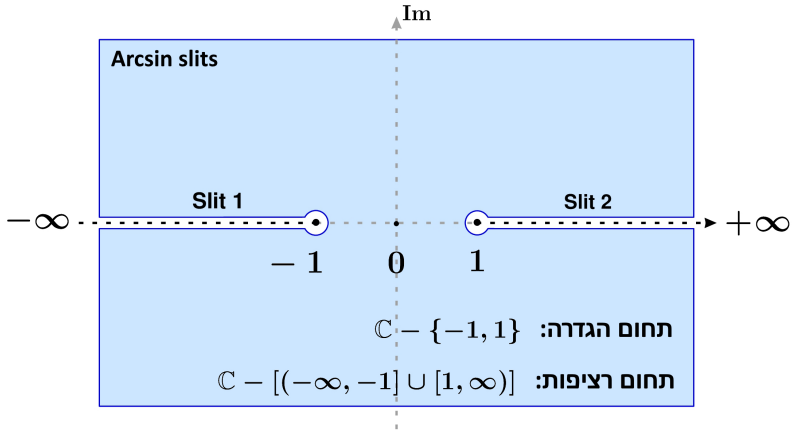
איור 3.8: מישור מחורץ $\mathbb{C} - [3, -\infty)$ עבור הפונקציה $\mathrm{Log}(3 - z)$

כאשר $\sqrt{|1 - z^2|}\, e^{\frac{i}{2}\mathrm{Arg}(1-z^2)}$ הוא הענף הראשי של $(1 - z^2)^{\frac{1}{2}}$, וכמובן Log הוא הענף הראשי של $\log$. הפונקציה $\mathrm{Arg}(1 - z^2)$ אינה מוגדרת בנקודות $z = -1, z = 1$. כל שאר הביטויים מוגדרים עבור כל $z \in \mathbb{C}$. לכן תחום ההגדרה של Arcsin הוא $\mathbb{C} - \{-1, 1\}$.

הפונקציה $1 - z^2$ מעתיקה את הקרנות $(-\infty, -1]$ ו־ $[1, \infty)$ לקרן $(-\infty, 0]$ שהיא החריץ של Arg. לכן הביטוי $e^{\frac{i}{2}\mathrm{Arg}(1-z^2)}$ אינו רציף בתחום $S = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. הביטוי $\sqrt{|1 - z^2|}\, e^{\frac{i}{2}\mathrm{Arg}(1-z^2)}$ אינה רציפה בתחום S, ולכן גם המכפלה $\sqrt{|1 - z^2|}$ אינו מתאפס בתחום S. לכן תחום הרציפות של Arcsin הוא

$$D = \mathbb{C} - ((-\infty, -1] \cup [1, \infty))$$

התחום D מוצג בשרטוט 3.9 יחד עם שני החריצים $(-\infty, -1]$ ו־ $[1, \infty)$.



איור 3.9: לפונקציה Arcsin שני חריצים: $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

נשאיר לתלמיד להוכיח כי הביטוי $iz + \sqrt{|1 - z^2|}\, e^{\frac{i}{2}\mathrm{Arg}(1-z^2)}$, שמופיע בנוסחה (3.23) אינו

נופל לעולם בטווח $(-\infty, 0]$, ולכן אין לנו נקודות אי-רציפות נוספות מעבר לאלה שמצאנו קודם.

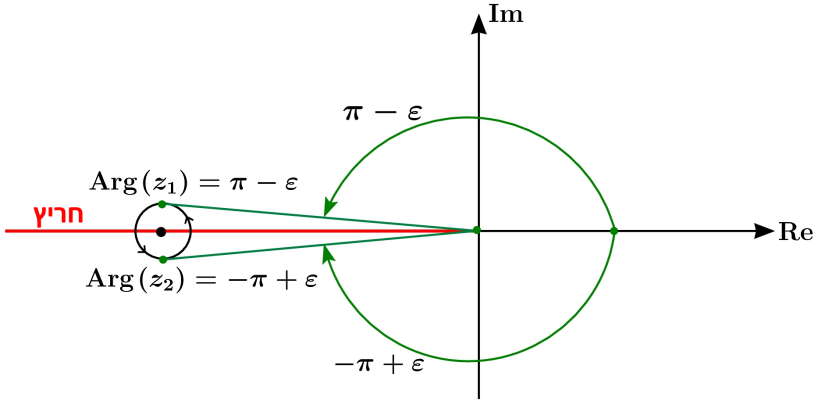
במקרים רבים, מציאת החריץ של פונקציה אלמנטרית עשוי להיות משימה קשה, אך בשלב זה נרצה לתת איפיון לנקודות שיושבות על חריץ ולהבחין בינם לבין נקודות רגילות. בהגדרה הבאה מוצג קריטריון פשוט לזיהוי נקודת חריץ.

הגדרה 3.5: נקודה z_0 נקראת **נקודת חריץ** של פונקציה $f(z)$ אם קיים $\varepsilon > 0$ כך שלכל $0 < r < \varepsilon$, לפונקציה $f(z)$ יש קפיצה על המסלול מעגלי $\sigma_{z_0,r}(t) = z_0 + re^{it}$.

במילים אחרות: נקודה z_0 היא **נקודת חריץ** אם לכל $0 < r < \varepsilon$, לפונקציה

$$g(t) = f(z_0 + re^{it})$$

יש נקודת אי-רציפות מסוג קפיצה, בקטע $-\pi < t \leq \pi$. בשרטוט 3.10 רואים מסלול מעגלי קטן סביב נקודת החריץ של הפונקציה $\mathrm{Arg}(z)$. הקפיצה של Arg בין הנקודות z_1, z_2 היא $2\pi - 2\varepsilon$ והיא הולכת וגדלה לכיוון 2π ככל שרדיוס המעגל הולך וקטן. תופעה כזו אינה מתרחשת עבור נקודות שאינן שייכות לחריץ!



איור 3.10: הפונקציה Arg מבצעת קפיצה בגודל קרוב ל־2π על מעגלים קטנים סביב נקודת חריץ

באותו האופן ניתן להוכיח שכל הפונקציות היסודיות שמנינו בסעיף הקודם הן רציפות מעל תחום ההגדרה שלהן למעט חריץ חד מימדי. נשאיר לתלמיד למצוא את החריץ בכל אחת מהמקרים שבהוכחת המשפט הבא.

משפט 3.12: כל פונקציה יסודית היא רציפה (למעט בנקודות חריץ).

הוכחה: רשימת הפונקציות היסודיות הוצגו בסעיף הקודם בפרוטרוט. נעבור שוב על הרשימה ונבדוק רציפות.

א. הפונקציות הקבועות $f(z) = c$, עבור קבוע $c \in \mathbb{C}$:

רציפות על פני כל המישור המרוכב.

ב. פונקציית הזהות $f(z)=z$:
רציפה על פני כל המישור המרוכב.

ג. הפונקציות המעריכיות $f(z)=c^z$ (ענף ראשי):
הענף הראשי הוגדר על ידי $e^{z\log c}$. בדוגמה 10 הוכחנו כי הפונקציה e^z רציפה על פני כל המישור המרוכב. אותה הוכחה נכונה גם עבור e^{cz}.

ד. פונקציות החזקה $f(z)=z^c$:
הפונקציה הוגדרה על ידי $z^c=e^{c\log z}$. זוהי הרכבה של שתי פונקציות רציפות e^z, $\log z$ (במישור המחורץ). לכן ממשפט 3.10 היא רציפה על פני המישור המחורץ.

ה. הפונקציות הטריגונומטריות:
הפונקציות $\sin z$, $\cos z$, הוגדרו באמצעות פונקציות החזקה e^{iz}, e^{-iz}, ולכן על פי משפט 3.10 הן רציפות על פני כל המישור המרוכב. הפונקציות $\tan z$, $\cot z$, הוגדרו על ידי $\frac{\sin z}{\cos z}$, $\frac{\cos z}{\sin z}$, לכן על פי סעיף ג' של משפט 3.10, הפונקציה $\tan z$ רציפה בכל תחום ההגדרה שלה: הנקודות z שבהן $\cos z\neq 0$. הפונקציה $\cot z$ רציפה גם כן בכל תחום ההגדרה שלה: כל הנקודות z שבהן $\sin z\neq 0$.

ו. הפונקציות הלוגריתמיות $f(z)=\log_c z$:
בדוגמה 11 הוכחנו כי הענף הראשי של פונקציית הלוגריתם Log רציפה במישור המחורץ. הסבר דומה חל על $\log z$: פונקציית הלוגריתם הטבעי $\log z$ הוגדרה על ידי $\ln|z|+\arg(z)$. הפונקציה הממשית $\ln|z|$ רציפה על פני כל תחום ההגדרה שלה $\mathbb{C}-\{0\}$. כל ענף רציף של $\arg(z)$ אינו רציף על פני החריץ המתאים לו, ולכן כל ענף של $\log z$ רציף על מישור מחורץ. הפונקציה $\log_c z$ היא למעשה $\frac{1}{\log c}\log z$.

ז. הפונקציות הטריגונומטריות ההפוכות:
בדוגמה 13 טיפלנו בפונקציה Arcsin. נשאיר לתלמיד כתרגיל למצוא את תחום ההגדרה ותחום הרציפות של Arccos, Arctan, Arccot. ∎

דוגמה 14: הענף הראשי של פונקציית הארגומנט $\mathrm{Arg}(z)$ אינו רציף בנקודה $z=-1$. נשתמש במסלול $\sigma(t)=\cos t+i\sin t$ עבור $t\in(-\pi,\pi]$. כאן יש להשתמש בגבול השמאלי בנקודה $t=\pi$: $\lim_{t\to\pi^-}\mathrm{Arg}(\sigma(t))=\pi$, בעוד ש־$\lim_{t\to-\pi^+}\mathrm{Arg}(\sigma(t))=-\pi$.

הפונקציות האלמנטריות נוצרות מהפונקציות היסודיות באמצעות פעולות החיבור, חיסור, כפל, חילוק, והרכבה של פונקציות. לכן נוכל לסכם את הדיון בטענה כי כל פונקציה אלמנטרית היא רציפה בתחום האנליטיות המשותף לפונקציות היסודיות שמהן היא נבנתה.

פונקציה רציפה מעל קבוצה קומפקטית

כזכור מהגדרה 2.21, קבוצה קומפקטית היא קבוצה סגורה וחסומה. לקבוצות כאלה יש תכונה מיוחדת המבוטאת במשפט הבא.

משפט 3.13: פונקציה רציפה מעתיקה קבוצה קומפקטית לקבוצה קומפקטית.

הוכחה: תהי $f:S\to\mathbb{C}$ פונקציה רציפה, ותהי $D\subseteq S$ קבוצה קומפקטית. נשתמש במשפט 2.19 בכדי להוכיח כי $f(D)$ סגורה. תהי $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת נקודות ב־$f(D)$ המתכנסת לגבול w. נוכיח כי $w\in f(D)$.

קיימת סדרת נקודות $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ ב־D כך ש־$w_n=f(z_n)$. על פי משפט בולצאנו-ווירשטראס 2.18, קיימת תת-סדרה מתכנסת $\{z_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ של z_n. בגלל ש־D סגורה, $z=\lim_{k\to\infty}z_{n_k}\in D$. מהרציפות של f נובע כי $\lim_{k\to\infty}f(z_{n_k})=f(z)=w$. לכן $w\in f(D)$.

נשאר להוכיח כי $f(D)$ חסומה. נניח בשלילה ש־$f(D)$ אינה חסומה. כלומר קיימת סדרת נקודות $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ ב־$f(D)$ כך ש־$\lim_{n\to\infty}w_n=\infty$. קיימת סדרת נקודות $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ ב־D כך לכל n, $w_n=f(z_n)$. על פי משפט בולצאנו-ווירשטראס 2.18, קיימת תת-סדרה מתכנסת $\{z_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ של z_n. נניח כי $z=\lim_{k\to\infty}z_n$. כמו קודם, נקבל כי

$$\lim_{k\to\infty}w_{n_k}=\lim_{k\to\infty}f(z_{n_k})=f(z)$$

לכן לסדרה $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ יש תת-סדרה מתכנסת לגבול סופי בסתירה להנחה $w_n\to\infty$. ∎

מסקנה 3.14 (Weierstrass): אם f רציפה מעל קבוצה קומפקטית D, אז $|f(z)|$ מקבלת מינימום ומקסימום בתוך D.

תרגיל 3.7: יהי $S\subseteq\mathbb{C}$ תחום נתון. הוכח שפונקציה $f:S\to\mathbb{C}$ היא רציפה אם ורק אם לכל קבוצה פתוחה B, $f^{-1}(B)$ היא פתוחה.

תרגיל 3.8: יהי $S\subseteq\mathbb{C}$ תחום נתון. הוכח שפונקציה $f:S\to\mathbb{C}$ היא רציפה אם ורק אם לכל קבוצה סגורה B, $f^{-1}(B)$ היא סגורה.

טענה 3.15: תמונה רציפה של קבוצה קשירה היא קשירה.

הוכחה: תהי f רציפה, ו־S קבוצה קשירה. אם $f(S)$ אינה קשירה אז קיים פירוק פתוח (A,B) של $f(S)$. על סמך תרגיל 3.7 $(f^{-1}(A),f^{-1}(B))$ הוא פירוק פתוח של S, בסתירה לקשירות של S. ∎

טענה 3.16: תמונה רציפה של קבוצה קשירה מסילתית היא קשירה מסילתית.

הוכחה: תהי f רציפה, ו־S קבוצה קשירה מסילתית. יהיו $w_1, w_2 \in f(S)$ שתי נקודות שונות בתמונה של S. קיימות $z_1, z_2 \in S$ כך ש־$w_1 = f(z_1)$, $w_2 = f(z_2)$. יהי σ מסלול המחבר את z_1 עם z_2. אזי $f(\sigma(t))$ מסלול המחבר את w_1 עם w_2. ∎

גבול באינסוף

בנוסף לגבול הרגיל, ישנם מצבים שבהם נדרש להבין התנהגות של פונקציה $f(z)$ כאשר הארגומנט של z שואף לאינסוף (כלומר כאשר $|z| \to \infty$).

הגבול באינסוף של פונקציה $f(z)$ מוגדר להיות הערך $w \in \mathbb{C}$ אליו הפונקציה $f(z)$ מתקרבת כאשר $|z|$ שואף לאינסוף. להלן ההגדרה הפורמלית.

הגדרה 3.6: תהי $f(z)$ פונקציה מוגדרת מעל מישור מחורר $|z| > R$. נאמר כי לפונקציה $f(z)$ יש **גבול באינסוף** $w \in \mathbb{C}$, ונרשום $\lim_{z\to\infty} f(z) = w$ אם לכל $\varepsilon > 0$, קיים ממשי M, כך שלכל $z \in \mathbb{C}$, אם $|z| > M$ אז $|f(z) - w| < \varepsilon$.

הערה: תנאי הכרחי לקיום גבול באינסוף הוא שהפונקציה תהיה מוגדרת במישור מחורר כלשהו. בספרים מסוימים, וגם כאן מידי פעם, נרשום $\lim_{|z|\to\infty} f(z) = w$. מדובר כמובן באותו הדבר. ראה הערה נוספת לאחר הגדרה 3.7.

הטענה הבאה נובעת מייד מהגדרת הגבול של פונקציה מרוכבת.

טענה 3.17: $\lim_{|z|\to\infty} f(z) = 0$ אם ורק אם $\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = 0$

דוגמה 15: הגבול באינסוף של הפונקציה $f(z) = \frac{3z-5}{4-iz}$ הוא $-3i$. ניתן לראות זאת על ידי החישוב הפשוט הבא

$$\lim_{|z|\to\infty} \frac{3z-5}{4-iz} = \lim_{|z|\to\infty} \frac{3-5/z}{4/z-i} = \frac{3-0}{0-i} = 3i$$

ברור כי $\lim_{|z|\to\infty} 5/|z| = \lim_{|z|\to\infty} |5/z| = \lim_{|z|\to\infty} 5/z = 0$. כנ"ל לגבי $\lim_{|z|\to\infty} 4/z = 0$.

הגדרה 3.7: תהי $f(z)$ פונקציה מוגדרת מעל מישור מחורר $|z| > R$. נאמר כי הפונקציה $f(z)$ **שואפת לאינסוף כאשר z שואף לאינסוף**, ונרשום $\lim_{|z|\to\infty} f(z) = \infty$ אם לכל ממשי N קיים ממשי $M > 0$, כך שלכל $z \in \mathbb{C}$, אם $|z| > M$ אז $|f(z)| > N$.

בספרים מסוימים זה נרשם כך: $\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = \infty$, בכדי למנוע בילבול, מאחר והפונקציה עשויה לשאוף ל־$-\infty$ על חלק מהמסלולים. אבל כפי שנווכח בפרק הבא, כשנפגוש את **המישור המרוכב המורחב**, הנקודה $+\infty$ והנקודה $-\infty$ הן אותה נקודה בדיוק!

טענה 3.18: אם $P(z)$ פולינום לא קבוע אז $\lim_{|z|\to\infty} P(z) = \infty$.

הוכחה: נניח כי $P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$, $a_n \neq 0$. אזי

$$\begin{aligned} |P(z)| &= |a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n| = \left|z^n \left(\tfrac{a_0}{z^n} + \tfrac{a_1}{z^{n-1}} + \tfrac{a_2}{z^{n-2}} + \cdots + a_n\right)\right| \\ &= |z|^n \cdot \left|\tfrac{a_0}{z^n} + \tfrac{a_1}{z^{n-1}} + \tfrac{a_2}{z^{n-2}} + \cdots + a_n\right| \end{aligned}$$

כל אחד מהשברים $\frac{a_k}{z^{n-k}}$ שואף לאפס כאשר $|z| \to \infty$. אנחנו נשארים עם $|a_n| > 0$ ועם $|z|^n$ שכמובן שואף לאינסוף כאשר $|z| \to \infty$. לכן $\lim_{|z|\to\infty} |P(z)| = \infty$. ∎

טענה 3.19: יהי $P(z)$ פולינום ממעלה m, $Q(z)$ פולינום ממעלה n

$$\begin{aligned} P(z) &= a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_m z^m \\ Q(z) &= b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots + b_n z^n \end{aligned}$$

אזי

א. אם $m < n$ אז $\lim_{|z|\to\infty} \frac{P(z)}{Q(z)} = 0$.

ב. אם $m = n$ אז $\lim_{|z|\to\infty} \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{a_n}{b_n}$.

ג. אם $m > n$ אז $\lim_{|z|\to\infty} \frac{P(z)}{Q(z)} = \infty$.

הוכחה:

$$\begin{aligned} \left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right| &= \left|\frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_m z^m}{b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots + b_n z^n}\right| = \frac{|a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_m z^m|}{|b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots + b_n z^n|} \\ &= \frac{|z|^m \cdot \left|\frac{a_0}{z^m} + \frac{a_1}{z^{m-1}} + \frac{a_2}{z^{m-2}} + \cdots + a_m\right|}{|z|^n \cdot \left|\frac{b_0}{z^n} + \frac{b_1}{z^{n-1}} + \frac{b_2}{z^{n-2}} + \cdots + b_n\right|} \end{aligned}$$

א. אם $m < n$ אז $n - m > 0$ ולכן

$$\left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right| = \frac{\left|\frac{a_0}{z^m} + \frac{a_1}{z^{m-1}} + \frac{a_2}{z^{m-2}} + \cdots + a_m\right|}{|z|^{n-m} \cdot \left|\frac{b_0}{z^n} + \frac{b_1}{z^{n-1}} + \frac{b_2}{z^{n-2}} + \cdots + b_n\right|} \xrightarrow[|z|\to\infty]{} \frac{|a_m|}{\infty \cdot |b_n|} = 0$$

כל אחד מהשברים $\frac{a_k}{z^{m-k}}$, $\frac{b_k}{z^{n-k}}$ שואף לאפס כאשר $|z| \to \infty$. לכן המונה שואף ל־a_m. אבל במכנה הביטוי $|z|^{n-m} \to \infty$ גורם לשבר לשאוף לאפס.

ב. אם $m=n$ אז

$$\left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right| = \frac{|z|^n \cdot \left|\frac{a_0}{z^n}+\frac{a_1}{z^{n-1}}+\frac{a_2}{z^{n-2}}+\cdots+a_n\right|}{|z|^n \cdot \left|\frac{b_0}{z^n}+\frac{b_1}{z^{n-1}}+\frac{b_2}{z^{n-2}}+\cdots+b_n\right|} \xrightarrow[|z|\to\infty]{} \frac{|a_m|}{|b_n|}$$

ג. אם $m>n$ אז $m-n>0$ ולכן

$$\left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right| = \frac{|z|^{m-n} \cdot \left|\frac{a_0}{z^m}+\frac{a_1}{z^{m-1}}+\frac{a_2}{z^{m-2}}+\cdots+a_m\right|}{\left|\frac{b_0}{z^n}+\frac{b_1}{z^{n-1}}+\frac{b_2}{z^{n-2}}+\cdots+b_n\right|} \xrightarrow[|z|\to\infty]{} \frac{\infty \cdot |a_m|}{|b_n|} = \infty$$

גבול אינסופי בנקודה רגילה

בנוסף, יש להגדיר מהו גבול אינסופי בנקודה רגילה $z_0 \in \mathbb{C}$. לדוגמה $\lim_{z\to 3}\frac{1}{z-3}=\infty$.

הגדרה 3.8: תהי $f(z)$ פונקציה מוגדרת בסביבה נקובה של נקודה $z_0 \in \mathbb{C}$. נאמר כי $f(z)$ **שואפת לאינסוף** בנקודה z_0, ונרשום $\lim_{z\to z_0} f(z)=\infty$, אם לכל M ממשי, קיים $\delta>0$ ממשי, כך שלכל $z\in \dot{\mathbb{D}}(z_0,\delta)$, $|f(z)|>M$.

בשפה לוגית זה נראה כך

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=\infty \iff \forall M,\ \exists \delta>0,\ \forall z:\quad 0<|z-z_0|<\delta \implies |f(z)|>M$$

נציין שוב כי למעשה מדובר בגבול של הערך הממשי המוחלט $|f(z)|$ ולא של הערך המרוכב $f(z)$, שבדרך כלל מתבדר לכל כיווני האינסוף (כולל $-\infty$) בסביבת נקודה כזו. בפרק האחרון של החוברת נגדיר את מושג **הנקודה הסינגולרית** שמטפל וממיין נקודות מסוג זה בצורה יותר יסודית.

דוגמה 16: $\lim_{z\to 0}\frac{1}{z}=\infty$.

תרגיל 3.9: הוכח כי $\lim_{z\to z_0} f(z)=\infty$ אם ורק אם לכל סדרה $z_n \to z$, $|f(z_n)|\to\infty$.

דוגמה 17: הגבול $\lim_{z\to 0} e^{\frac{1}{z}}$ אינו קיים כי עבור הסדרה $z_n=\frac{1}{n}$ הגבול הוא ∞, אבל עבור הסדרה $z_n=-\frac{1}{n}$ הגבול הוא 0.

3.4 גזירות ואנליטיות

הנגזרת של פונקציה מרוכבת מוגדרת בדיוק כמו הנגזרת של פונקציה ממשית. אלא שבמקרה של המספרים המרוכבים קיימת תכונה יותר חזקה וחשובה מגזירות שנקראת **אנליטיות** (או הולומורפיות). בסעיף הנוכחי נלמד על התכונות היסודיות של שני מושגים אלה.

הגדרה 3.9: תהי $f(z)$ פונקציה מרוכבת המוגדרת בסביבת הנקודה z_0. נאמר כי f **גזירה בנקודה** z_0 אם קיים הגבול

$$f'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

לפעמים רושמים זאת גם כך

$$f'(z_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$$

כאשר $h\in\mathbb{C}$ הוא מספיק קטן בכדי להיכלל בסביבת z שבה הפונקציה f מוגדרת.

דוגמה 18: נחשב את הנגזרת של $f(z)=z^3$

$$\begin{aligned}f'(z)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(z+h)^3-z^3}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{(z^3+3z^2h+3zh^2+h^3)-z^3}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{3z^2h+3zh^2+h^3}{h}=\lim_{h\to 0}(3z^2+3zh+h^2)=3z^2\end{aligned}$$

כצפוי קיבלנו את אותה הנוסחה המוכרת לנו מהמקרה הממשי $(z^3)'=3z^2$. זה יהיה המצב עבור רוב הפונקציות הידועות.

דוגמה 19: הפונקציה $f(z)=\overline{z}$ אינה גזירה בשום נקודה במישור המרוכב.

$$f'(z)=\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\overline{z+h}-\overline{z}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\overline{z}+\overline{h}-\overline{z}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\overline{h}}{h}$$

הגבול האחרון אינו קיים כי אם $h=x$ הוא ממשי אז הגבול יוצא 1, אבל אם $h=iy$ הוא מדומה הגבול יוצא -1. לכן $f(z)=\overline{z}$ אינה גזירה בשום נקודה!

תרגיל 3.10: הוכח כי הפונקציה $f(z)=|z|^2$ גזירה בנקודה $z=0$ בלבד!

הגדרה 3.10: נאמר כי $f(z)$ **גזירה בקבוצה** $S\subseteq\mathbb{C}$ אם f גזירה בכל נקודה $z\in S$.

תרגיל 3.11: הוכח כי $f(z)=z^n$ גזירה על כל $\mathbb{C}$ ובנוסף $f'(z)=nz^{n-1}$ (n מספר טבעי).

טענה 3.20: (נוסחת קירוב ליניארי) תהי $f:S\to\mathbb{C}$ פונקציה גזירה בנקודה z_0. אזי קיימת פונקציה $\rho(z)$ בתחום $S-\{z_0\}$, כך ש־ $\lim_{z\to z_0}\rho(z)=0$, ולכל $z\in S-\{z_0\}$

$$f(z)=f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)+\rho(z)(z-z_0) \tag{3.24}$$

הוכחה: נתחיל בהגדרת הפונקציה $\rho(z)$

$$\rho(z)=\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}-f'(z_0) \tag{3.25}$$

מההגדרה ברור כי

$$\begin{aligned}\lim_{z\to z_0}\rho(z) &= \lim_{z\to z_0}\left[\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}-f'(z_0)\right]=\lim_{z\to z_0}\left[\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right]-f'(z_0)\\ &= f'(z_0)-f'(z_0)=0\end{aligned}$$

אם נכפול את שני אגפי המשוואה (3.25) בביטוי $(z-z_0)$ נקבל

$$\rho(z)(z-z_0)=f(z)-f(z_0)-f'(z_0)(z-z_0)$$

ולאחר העברה מאגף לאגף נקבל

$$f(z)=f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)+\rho(z)(z-z_0)$$

■

הנוסחה (3.24) נקראת **נוסחת קירוב ליניארי** מאחר והביטוי $f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)$ הוא למעשה פונקציה ליניארית שנעשית קרובה מאוד לפונקציה $f(z)$ בסביבה קטנה של z_0. מלבד השימוש החישובי, יש לה גם שימושים תאורטיים חשובים שנפגוש בהמשך.

טענה 3.21: אם הפונקציה f גזירה בנקודה z_0 אז f רציפה בנקודה z_0.

הוכחה: על פי טענה 3.3 יספיק להוכיח כי $\lim_{z\to z_0}|f(z)-f(z_0)|=0$. על פי הטענה הקודמת

נוכל לרשום

$$\begin{aligned}\lim_{z\to z_0}|f(z)-f(z_0)| &= \lim_{z\to z_0}|f'(z_0)(z-z_0)+\rho(z)(z-z_0)|\\ &= \lim_{z\to z_0}|f'(z_0)+\rho(z)|\cdot|z-z_0|=0\end{aligned}$$

על פי טענה 3.20, $\lim_{z\to z_0}\rho(z)=0$, $f'(z_0)$ הוא קבוע, ולכן $\lim_{z\to z_0}|f'(z_0)+\rho(z)|=|f'(z_0)|$, $\lim_{z\to z_0}|z-z_0|=0$. לכן גבול המכפלה הוא אפס. ∎

הגדרה 3.11: נאמר כי $f(z)$ **אנליטית (או הולומורפית) בנקודה** z_0 אם קיים $r>0$ כך ש־f גזירה בסביבה $\mathbb{D}(z_0,r)$.

כלומר בכדי שפונקציה f תהיה אנליטית בנקודה, היא צריכה להיות גזירה בכל הנקודות בסביבת הנקודה.

הגדרה 3.12: נאמר כי $f(z)$ **אנליטית בקבוצה** $S\subseteq\mathbb{C}$ אם f אנליטית עבור כל $z\in S$.

טענה 3.22: אם הפונקציה $f(z)$ אנליטית בנקודה z_0 אז $f(z)$ אנליטית בסביבת z_0.

הוכחה: על פי ההגדרה f גזירה בסביבה מסוימת $\mathbb{D}(z_0,r)$ של הנקודה z_0. אם $z\in\mathbb{D}(z_0,r)$ אז ברור כי קיים $\varepsilon>0$ כך ש־$\mathbb{D}(z,\varepsilon)\subseteq\mathbb{D}(z_0,r)$. לכן f גזירה בסביבת z, ולכן f אנליטית בכל הסביבה של z_0. ∎

טענה 3.23: אם $f(z)$ גזירה בקבוצה פתוחה S אז $f(z)$ אנליטית בקבוצה S.

הגדרה 3.13: פונקציה $f(z)$ נקראת **פונקציה שלמה** אם היא אנליטית על כל המישור המרוכב $\mathbb{C}$.

דוגמה 20: כל פולינום $P(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n$ הוא פונקציה שלמה.

דוגמה 21: פונקציית הלוגריתם $\mathrm{Log}(z)$ אינה פונקציה שלמה כי היא אינה רציפה בחריץ $(-\infty,0]$ ולכן על פי טענה 3.21 היא אינה גזירה שם. בינתיים לא ידועה לנו הנגזרת של $\mathrm{Log}(z)$.

פונקציה רב-ערכית $f(z)$ בדרך כלל "סובלת" מבעייה של חריץ שבו היא אפילו אינה רציפה (ולכן מטענה 3.21 אינה אנליטית), אבל במקרים רבים נרצה למצוא ענף של f שיהיה אנליטי בקבוצה נתונה S. ענף כזה נקרא **ענף אנליטי של** f **מעל הקבוצה** S.

הוכחת המשפט הבא זהה לחלוטין להוכחת המשפט המקביל בחדו"א 1. ניתן לפתוח כל

טקסט בסיסי בחשבון דיפרנציאלי של פונקציות ממשיות וללמוד את ההוכחה.

משפט 3.24: אם f, g פונקציות גזירות בנקודה z אז גם הסכום, ההפרש, המכפלה, והמנה (אם $g(z) \neq 0$) גזירות ומתקיים

$$\begin{aligned}
[f(z)+g(z)]' &= f'(z)+g'(z) \\
[f(z)-g(z)]' &= f'(z)-g'(z) \\
[f(z)\cdot g(z)]' &= f'(z)g(z)+f(z)g'(z) \\
[f(z)/g(z)]' &= \frac{f'(z)g(z)-f(z)g'(z)}{g(z)^2}
\end{aligned}$$

משפט 3.25: (כלל השרשרת) יהיו $f: S \to \mathbb{C}$, $g: T \to \mathbb{C}$ שתי פונקציות אנליטיות מעל קבוצות פתוחות S, T, ונניח כי $f(S) \subseteq T$. אזי הפונקציה המורכבת $g(f(z))$ היא אנליטית ולכל $z \in S$, מתקיים

$$[g(f(z))]' = g'(f(z)) \cdot f'(z)$$

הוכחה: תהי $z_0 \in S$ נקודה נתונה. על פי ההגדרה

$$(g \circ f)'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{g(f(z)) - g(f(z_0))}{z - z_0}$$

צריך להוכיח שהגבול קיים ושהוא יוצא $g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0)$.
נציג קודם את הרעיון הגולמי (אך לא מדויק) להוכחה

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to z_0} \frac{g(f(z))-g(f(z_0))}{z-z_0} &= \lim_{z\to z_0} \left[\frac{g(f(z))-g(f(z_0))}{f(z)-f(z_0)} \cdot \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right] \\
&= \lim_{z\to z_0} \frac{g(f(z))-g(f(z_0))}{f(z)-f(z_0)} \cdot \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \\
&= g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0)
\end{aligned}$$

על פי טענה 3.21, f רציפה בנקודה z_0, ולכן $\lim_{z\to z_0}(f(z)-f(z_0)) = 0$, ולכן על פי הגדרת הנגזרת $\lim_{z\to z_0} \frac{g(f(z))-g(f(z_0))}{f(z)-f(z_0)} = g'(f(z_0))$.
הבעייה היחידה עם הרעיון הזה היא שהביטוי $f(z)-f(z_0)$ עשוי להתאפס לפעמים, במיוחד כאשר $f'(z_0) = 0$ (או אם למשל f פונקציה קבועה).
בכדי להתגבר על מהמורה זו נשתמש בנוסחה (3.24) מטענה 3.20. נשתמש במשתנה w עבור

הפונקציה g, ונסמן $w_0 = f(z_0)$

$$g(w) = g(w_0) + [g'(w_0) + \rho(w)](w - w_0)$$

כאשר $\lim_{w \to w_0} \rho(w) = 0$. על ידי העברת $g(w_0)$ מאגף ימין לאגף שמאל נקבל

$$g(w) - g(w_0) = [g'(w_0) + \rho(w)](w - w_0)$$

על סמך הנתון $f(S) \subseteq T$, נסיק כי לכל $z \in S$ קיים $w \in T$, כך ש־$w = f(z)$. לכן עבור כל $z \in S - \{z_0\}$ מתקיים

$$g(f(z)) - g(f(z_0)) = [g'(f(z_0)) + \rho(f(z))][f(z) - f(z_0)]$$

נחלק את שני האגפים בביטוי $z - z_0$ ונקבל

$$\frac{g(f(z)) - g(f(z_0))}{z - z_0} = [g'(f(z_0)) + \rho(f(z))] \cdot \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

מכאן נקבל

$$\begin{aligned}
(g \circ f)'(z_0) &= \lim_{z \to z_0} \frac{g(f(z)) - g(f(z_0))}{z - z_0} \\
&= \lim_{z \to z_0} [g'(f(z_0)) + \rho(f(z))] \cdot \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \\
&= \lim_{z \to z_0} [g'(f(z_0)) + \rho(f(z))] \cdot \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \\
&= g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0)
\end{aligned}$$

וקיבלנו את נוסחת כלל השרשרת. ∎

משפט 3.26: (נגזרת פונקציה הפוכה) תהי $f: S \to T$ פונקציה אנליטית, $g: T \to S$ פונקציה רציפה, כאשר S ו־T קבוצות פתוחות. תהי $z_0 \in S$, כך ש־$w_0 = f(z_0) \in T$, $f'(z_0) \neq 0$ ו־$g = f^{-1}$ בסביבת w_0. אזי g גזירה בנקודה w_0 ומתקיים

$$g'(w_0) = (f^{-1})'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)} \tag{3.26}$$

הוכחה: ראשית נסביר את משמעות הטענה "$g = f^{-1}$ בסביבת w_0". משמעות הטענה היא שקיים $r > 0$ כך שהפונקציה g חד-חד-ערכית בסביבה $T_0 = \mathbb{D}(w_0, r)$ (הכלולה ב־T).

התמונה של T_0 תחת g, $S_0 = g(T_0)$ היא תת-קבוצה של S, f גם כן חד-חד-ערכית מעל S_0, והפונקציה ההופכית של f מעל S_0 היא g. בתנאים אלה ברור כי לכל $w \in T_0$, $f(g(w)) = w$, ולכן

$$\frac{g(w)-g(w_0)}{w-w_0} = \frac{g(w)-g(w_0)}{f(g(w))-f(g(w_0))} = \frac{z-z_0}{f(z)-f(z_0)} = \frac{1}{\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}}$$

לכן

$$g'(w_0) = \lim_{w\to w_0}\frac{g(w)-g(w_0)}{w-w_0} = \frac{1}{\lim\limits_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}} = \frac{1}{f'(z_0)}$$

במהלך החישוב השתמשנו בסימון $z = g(w)$, $z_0 = g(w_0)$. בניגוד לבעייה שהיתה לנו בהוכחה הקודמת, במקרה זה $z \neq z_0$ כי g חד-חד-ערכית[1]. בגלל הרציפות של g, כאשר w שואף ל־w_0, אז z שואף ל־z_0, ולכן הגבול במכנה יוצא $f'(z_0)$. ∎

בפרק הבא, לאחר היכרות עם משוואות קושי-רימן, נוכיח שאם $f'(z_0) \neq 0$ אז f הפיכה בסביבה מסוימת של z_0. לכן ניתן לגזור את הנוסחה (3.26) מבלי להזדקק לפונקציה g. נסיים את הסעיף עם גירסה מצומצמת של משפט לופיטל עבור פונקציות מרוכבות.

משפט 3.27: יהיו $f(z)$, $g(z)$ פונקציות גזירות בנקודה z_0, כך ש־$f(z_0) = g(z_0) = 0$. אם $g'(z_0) \neq 0$ אז

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$$

הוכחה: זוהי מסקנה מיידית מהגדרת הנגזרת

$$\frac{f'(z_0)}{g'(z_0)} = \frac{\lim\limits_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}}{\lim\limits_{z\to z_0}\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}} = \frac{\lim\limits_{z\to z_0} f(z)-f(z_0)}{\lim\limits_{z\to z_0} g(z)-g(z_0)} = \lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}$$

נציין כי $g'(z) \neq 0$ בסביבת z_0. זה נובע מכך ש־$g'(z_0) \neq 0$ וטענה 3.20. ∎

דוגמה 22: משפט 3.27 מאפשר לנו לחשב גבול בקלות רבה

$$\lim_{z\to 0}\frac{1-\cos z}{z^2} = \lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{2z} = \lim_{z\to 0}\frac{\cos z}{2} = \frac{1}{2}$$

[1] וכזכור כאשר $w \to w_0$ תמיד $w \neq w_0$

תרגילים לפרק 3



1. רשום הוכחה מלאה למשפט 3.8 (משפט היינה).

2. מהו תחום ההגדרה של הפונקציות $\tan z$, $\cot z$?



3. הוכח את הזהויות (3.17), (3.19), (3.13), בעמודים 95, 97.



4. הוכח את משפט 3.7.

5. הוכח כי $e^{\overline{z}} = \overline{e^z}$, $\sin \overline{z} = \overline{\sin z}$.



6. הוכח את הזהות: $|\sin z|^2 + |\cos z|^2 = 1 + 2\sinh^2(\mathrm{Im}\,(z))$.



7. הוכח את הזהויות: $\cosh x = \cos ix$, $\sinh x = -i \sin ix$.



8. העבר את הפונקציה $f(z)$ לכתיב קרטזי $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$

א. $f(z) = 5z^2 - 3iz + 1$ **ב.** $f(z) = \frac{z+3i}{z^2+1}$

ג. $f(z) = e^z + e^{-z}$ **ד.** $f(z) = \frac{3iz^2-4}{|z-2|}$



9. מצא את תחום ההגדרה של כל אחת מהפונקציות שבתרגיל 8.



10. נתונה פונקציה בכתיב קרטזי: $f(x+iy) = x^2 - y^2 - 2y + i(2x - 2xy)$. העבר אותה לכתיב רגיל במשתנה z.

הדרכה: $x = \frac{z+\overline{z}}{2}$, $y = \frac{z-\overline{z}}{2i}$

11. הראה כי **פונקציית ההיפוך** $f(z) = \frac{1}{z}$ מעתיקה את

א. המעגל $|z| = r$ למעגל $|z| = 1/r$.

ב. הקרן $\mathrm{Arg}\,(z) = \theta$ $(-\pi < \theta < \pi)$, לקרן $\mathrm{Arg}\,(z) = -\theta$.

ג. המעגל $|z - r| = r$ לקו ישר אנכי $x = \frac{1}{2r}$ (עבור ממשי $r > 0$).

הערה: שים לב כי בסעיף ב', הקרן אינה כוללת את הנקודה $z = 0$ (אשר ממילא אינה בתחום ההגדרה של פונקציית הארגומנט Arg).



12. **העתקת יוקובסקי** מוגדרת על ידי $J(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$. הוכח כי J מעתיקה את מעגל היחידה $|z| = 1$ לקטע הממשי $[-1, 1]$.

13. מהי התמונה של העיגול הנקוב $0 < |z| \leq 1$ תחת הפונקציה $f(z) = \frac{1}{z}$?

14. פונקציה מהצורה $f(z)=az+b$ נקראת **העתקה ליניארית**. הוכח כי f מעתיקה קווים ישרים לקווים ישרים, ומעגלים למעגלים.

15. הוכח:
$$\mathrm{Log}\left(c^z\right)=z\mathrm{Log}\left(c\right)+2\pi i\left[\frac{1}{2}-\frac{\mathrm{Im}\left(z\mathrm{Log}\left(c\right)\right)}{2\pi}\right]$$

16. יהי n מספר טבעי נתון, ותהי $f(z)=z^n$. הוכח כי f מעתיקה את הגיזרה
$$S=\left\{z\in\mathbb{C}:\ -\frac{\pi}{n}<\mathrm{Arg}\left(z\right)\leq\frac{\pi}{n}\right\}$$
על המישור המרוכב $\mathbb{C}$ בשלמותו. האם f חד-חד-ערכית מעל S?

17. יהי n מספר טבעי נתון. הוכח כי פונקציית הלוגריתם $\log z$ מעתיקה את הרצועה
$$S_n=\left\{z\in\mathbb{C}:\ (2n-1)\pi<\mathrm{Im}\left(z\right)\leq(2n+1)\pi\right\}$$
באופן חד-חד-ערכי על המישור המרוכב $\mathbb{C}$ בשלמותו.

18. יהי $z\neq0$, ויהיו $c,d\in\mathbb{C}$. הוכח כי כל הערכים של הפונקציה הרב-ערכית z^{dc} כלולים בפונקציה $(z^c)^d$. האם קיימים תנאים על c, d, שמבטיחים שוויון בין שתי הפונקציות?

19. יהי $z\neq0$, ויהיו $m,n\in\mathbb{N}$ שני מספרים טבעיים חיוביים. האם השוויון $(z^m)^{\frac{1}{n}}=(z^{\frac{1}{n}})^m$ נכון תמיד?

20. הוכח כי לכל מספר מרוכב $c\in\mathbb{C}$, קיים $z\in\mathbb{C}$ כך ש־$\sin z=c$. כנ"ל עבור $\cos z=c$.

21. מצא את כל הפתרונות של המשוואה $\cos z=2$.

22. הוכח כי לכל $w\in\mathbb{C}$ קיימים אינסוף פתרונות שונים למשוואה $\cosh(z)=w$.

23. מצא את כל הפתרונות של המשוואה $z^{1-i}=4$.

24. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות $\arcsin$, $\arccos$, $\arctan$, arccot.

25. תן הגדרה של ענף ראשי עבור הפונקציות $\arccos$, $\arctan$, arccot תחת השמות: Arccos, Arctan, Arccot. מצא את תחום ההגדרה, החריץ, ותחום הרציפות של פונקציות אלה.

26. בדוק אם הגבולות הבאים קיימים וחשב את הגבול אם הוא קיים

א. $\lim_{z\to 3i}\frac{z^2+9}{z-3i}$ **ב.** $\lim_{z\to 2i}\frac{\bar{z}+z^2}{1-\bar{z}}$ **ג.** $\lim_{z\to\infty}\frac{z^2+35z+14}{2z^2-7}$ **ד.** $\lim_{z\to 1}\frac{1-z}{z^2+5z-6}$

27. יהי $\mathbb{H}$ חצי המישור המרוכב העליון $\mathrm{Im}(z)>0$, ותהי $f(z)=e^{2\pi iz}$. הוכח כי

$$f(\mathbb{H})=\dot{\mathbb{D}}(0,1)$$

כאשר $\dot{\mathbb{D}}(0,1)$ הוא עיגול היחידה הנקוב (ראה הגדרה 3.2 בעמוד 99).

28. מצא את התמונה של הקבוצות הבאות תחת הפונקציה $f(z)=e^z$

א. $S=\left\{z\in\mathbb{C}:\ -5\le\mathrm{Re}(z)\le 5,\ \mathrm{Im}(z)=\frac{\pi}{4}\right\}$

ב. $S=\left\{z\in\mathbb{C}:\ \mathrm{Re}(z)=3,\ -\frac{\pi}{2}<\mathrm{Im}(z)<\frac{\pi}{2}\right\}$

ג. $S=\{z\in\mathbb{C}:\ -2<\mathrm{Re}(z)<1,\ 0<\mathrm{Im}(z)<\pi\}$

ד. $S=\left\{z\in\mathbb{C}:\ <\mathrm{Re}(z)<1,\ -\frac{\pi}{3}<\mathrm{Im}(z)<\frac{2\pi}{3}\right\}$

29. מצא את התמונה של חצי הרצועה

$$S=\{z\in\mathbb{C}:\ 0\le\mathrm{Re}(z)\le\pi,\ \mathrm{Im}(z)\ge 0\}$$

תחת כל אחת מהפונקציות הבאות

א. $f(z)=e^{iz}$ **ב.** $f(z)=ie^{iz}$ **ג.** $f(z)=ie^{-iz}$

30. מצא את התמונה של הקבוצות הבאות תחת הפונקציה $f(z)=\cos z$

א. $S=\{z\in\mathbb{C}:\ 0\le\mathrm{Re}(z)<\pi,\ -2<\mathrm{Im}(z)<2\}$

ב. $S=\left\{z\in\mathbb{C}:\ -\frac{\pi}{2}<\mathrm{Re}(z)<\frac{\pi}{4},\ \mathrm{Im}(z)>0\right\}$

31. הוכח כי לכל $z_1,z_2\in\mathbb{C}-\{0\}$ קיים מספר שלם k כך ש־

$$\mathrm{Log}(z_1z_2)=\mathrm{Log}(z_1)+\mathrm{Log}(z_2)+2k\pi i$$

32. מצא את כל המספרים המרוכבים z אשר עבורם $\sin z$ הוא מספר ממשי.

33. חשב את כל הערכים האפשריים של הביטויים הבאים:

א. $(-1)^{\sqrt{2}}$ **ב.** 2^{1-i} **ג.** $(1+i)^{\sqrt{3}}$ **ד.** $(-1)^{\frac{1}{3}}$

ה. $(\cos i)^i$ **ו.** $i^{\sin i}$ **ז.** $\log(\log(-1))$ **ח.** $i^{\log(i)}$

34. תהי $f(z)$ ענף אנליטי של z^i במישור המחורץ $D = \mathbb{C} - \{ iy : y \leq 0 \}$. ידוע כי $f(1) = e^{2\pi}$. חשב את $f(i)$.

תשובה: $f(i) = e^{\frac{3\pi}{2}}$

35. יהי $U = \mathbb{C} - (-\infty, 0]$ המישור המחורץ הרגיל, ויהי y ממשי חיובי. חשב את הגבול

$$\lim_{y \to 0^+} [\operatorname{Log}(a + iy) - \operatorname{Log}(a - iy)]$$

עבור המקרה בו $a > 0$, והמקרה $a < 0$.

הדרכה: הביטוי $y \to 0^+$ מציין כי y ממשי חיובי השואף לאפס מצד ימין.

36. יהי n מספר טבעי חיובי. תן איפיון טופולוגי כללי ופשוט ככל האפשר לסוגי הקבוצות הפתוחות שמעליהן קיים ענף אנליטי לפונקציה הרב-ערכית $z^{1/n}$.

הדרכה: ענף אנליטי של $z^{1/n}$ תלוי בקיום ענף אנליטי של $\log$. ענף אנליטי של $\log$ קיים רק עבור קבוצה פתוחה ופשוטת קשר שאינה כוללת בתוכה את ראשית הצירים.

37. יהי n מספר טבעי חיובי. מצא את כל הענפים האנליטיים של הפונקציה הרב-ערכית $z^{1/n}$ מעל המישור המחורץ $D = \mathbb{C} - (-\infty, 0]$.

38. מצא את התמונה של הישרים המקבילים לציר-x או ציר-y תחת כל אחת מהפונקציות הבאות

א. $\operatorname{Log}(iz)$ **ב.** $\operatorname{Log}(-iz) + 1$ **ג.** $\operatorname{Log}(z^2)$

39. חשב את הגבולות הבאים

א. $\lim\limits_{z \to 0} (1+z)^{1/z}$ **ב.** $\lim\limits_{z \to 2} \frac{\sqrt{z}-2}{z-2}$ **ג.** $\lim\limits_{z \to i} z\operatorname{Arg}(\overline{z})$

ד. $\lim\limits_{z \to 0} \frac{z^4}{|z|^4}$ **ה.** $\lim\limits_{z \to 0} \frac{|\overline{z}|^2 + z}{z}$ **ו.** $\lim\limits_{z \to 0} z\frac{\operatorname{Im}(z^2)}{z^2}$

ז. $\lim\limits_{z \to \infty} \frac{3z^2 - 2z}{z^2 - iz + 8}$ **ח.** $\lim\limits_{z \to 5} \frac{3z}{z^2 - (5-i)z - 5i}$ **ט.** $\lim\limits_{z \to \infty} (5z^3 + 7z + 4)$

40. מצא את כל נקודות אי-הרציפות של הפונקציות הבאות

א. $f(z) = \operatorname{Log}(z^2 - 1)$ **ב.** $f(z) = \operatorname{Arg}(z^2)$ **ג.** $f(z) = \operatorname{Log}(z^3 - 1)$

ד. $f(z) = \operatorname{Arg}(z^3)$ **ה.** $f(z) = \sqrt{z^2 + 1}$ **ו.** $f(z) = \sqrt{z^2 - 1}$

41. מצא את תחום הרציפות של הפונקציה $f(z) = \frac{\operatorname{Re}(z)}{1+|z|}$.



42. מצא את תחום הרציפות של הפונקציה

$$f(z)=\begin{cases}\frac{\mathrm{Re}(z^2)}{z}, & z\neq 0\\ 0 & z=0\end{cases}$$



43. יהיו $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $g:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, שתי פונקציות רציפות. הוכח כי הקבוצה

$$S=\{\,z\in\mathbb{C}:\ \ f(z)=g(z)\,\}$$

היא קבוצה סגורה.

הדרכה: הראה שאם $z_n\to z$, $z_n\in S$, אז $z\in S$. לחלופין: הגדר $h(z)=f(z)-g(z)$, ואז $S=h^{-1}(0)$.



44. תהי f פונקציה רציפה מעל קבוצה קשירה S. נתון כי f מקבלת ערכים שלמים בלבד בקבוצה S. הוכח כי f היא פונקציה קבועה מעל S.

הדרכה: אם f אינה קבועה, אז קיימות שתי נקודות $z_1,z_2\in S$ כך ש־$f(z_1)=m$, $f(z_2)=n$, עבור שני מספרים שלמים $m<n$. יהי $\sigma:[a,b]\to S$ מסלול המחבר בין z_1 ל־z_2. על פי ההגדרה, σ היא פונקציה רציפה, ולכן גם הפונקציה המורכבת $f(\sigma(t))$ רציפה. יש לנו $f(\sigma(a))=m$, $f(\sigma(b))=n$, ולכן על פי משפט ערך הביניים (חדו"א 1) קיימת נקודה $a<t<b$ כך ש־$f(\sigma(t))=m+0.5$. סתירה.

45. הוכח כי הפונקציה $f(z)=\frac{1}{z}$ גזירה בכל נקודה $z\neq 0$, ומצא את הנגזרת על ידי שימוש ישיר בהגדרת הנגזרת.



46. בדוק האם הפונקציה הבאה גזירה בנקודה $z=0$

$$f(z)=\begin{cases}\frac{\bar{z}^2}{z}, & z\neq 0\\ 0, & z=0\end{cases}$$

47. תן שלוש דוגמאות לענפים של $\log(z)$ על המישור המחורץ $\mathbb{C}-\{\,ri:\ \ r\geq 0\,\}$.



48. הוכח כי לא קיים ענף אנליטי של פונקציית הלוגריתם $\log$ מעל התחום $\mathbb{C}-\{0\}$.

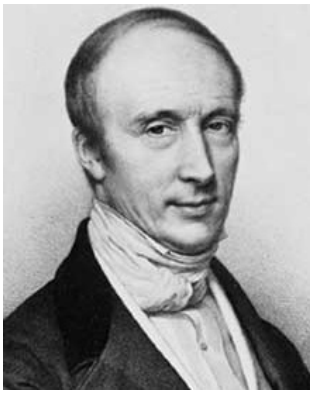
קישור לפתרונות

פרק 4

פונקציות אנליטיות

בפרק הנוכחי נלמד לעומק את המבנה, התכונות, והשימושים של הפונקציות האנליטיות לסוגיהן, ונפגוש משפחות חשובות של פונקציות כאלה.

4.1 משוואות קושי-רימן



איור 4.1: Augustin-Louis Cauchy 1789-1857



איור 4.2: Bernhard Riemann 1826-1866

- בסוף הפרק הקודם ביצענו כמה חישובי נגזרות של פונקציות יסודיות. חישוב נגזרות של פונקציות נוספות מצריך הבנה והעמקה נוספת במושג הנגזרת המרוכבת, שתאפשר לנו לפתח כללים ונוסחאות לחישובן. העבודה של המתמטיקאים אוגוסטין לואיס קושי וברנרד רימן בנושא זה הניבה את התאוריה של משוואות קושי-רימן המאפשרת זאת.
- נציין כי במקרה של פונקצייה מרוכבת, דרישת הגזירות מציבה בפני הפונקציה אתגר הרבה יותר קשה מאשר במקרה הממשי, וזה בגלל שבמישור המרוכב ניתן להתקרב לנקודה z_0 באמצעות אינסוף מסלולים שונים. בכל אחד מהמסלולים האלה הגבול $\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ צריך לצאת אותו דבר.
- נתחיל בבדיקת שני המסלולים הכי פשוטים שבאמצעותם ניתן להתקרב לנקודה z_0 במישור המרוכב (ראה שרטוט 4.3).

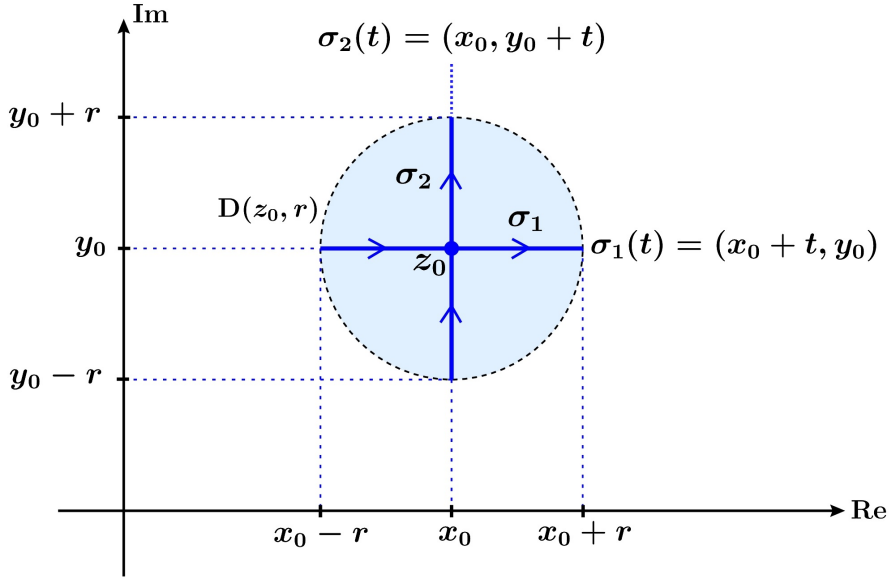
(1) קו ישר אופקי העובר דרך z_0: $\sigma_1(t) = z_0 + t$

(2) קו ישר אנכי העובר דרך z_0: $\sigma_2(t) = z_0 + ti$

חישוב הגבול $\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ על כל אחד מהמסלולים הפשוטים האלה מניב כמה תוצאות מפתיעות. החישוב ייתבצע כמובן באמצעות הצורה הקרטזית של f

$$f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$$

הנחה: הפונקציה f גזירה בנקודה $z_0 = x_0 + iy_0$. לכן קיים $r > 0$ אשר עבורו f מוגדרת בסביבה $\mathbb{D}(z_0, r)$ (כפי שרואים בשרטוט 4.3).



איור 4.3: מסלולי הגזירה של $f(z)$ לצורך קבלת משוואות קושי-רימן

גזירה לאורך המסלול σ_1

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(\sigma_1(t)) - f(z_0)}{\sigma_1(t) - z_0} = \lim_{t\to 0} \frac{f((x_0+t)+iy_0) - f(x_0+iy_0)}{(x_0+t, y_0) - (x_0, y_0)} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{[u(x_0+t, y_0) + iv(x_0+t, y_0)] - [u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)]}{(t, 0)} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{u(x_0+t, y_0) - u(x_0, y_0)}{t} + i \lim_{t\to 0} \frac{v(x_0+t, y_0) - v(x_0, y_0)}{t} \\ &= u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) \end{aligned}$$

לאורך המסלול $\sigma_2(t)$

$$f'(z_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\sigma_2(t)) - f(z_0)}{\sigma_2(t) - z_0} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + i(y_0+t)) - f(x_0+iy_0)}{(x_0, y_0+t) - (x_0, y_0)}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{[u(x_0,y_0+t)+iv(x_0,y_0+t)]-[u(x_0,y_0)+iv(x_0,y_0)]}{(0,t)}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{u(x_0+t,y_0)-u(x_0,y_0)}{it} + i \lim_{t\to 0} \frac{v(x_0+t,y_0)-v(x_0,y_0)}{it}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{v(x_0+t,y_0)-v(x_0,y_0)}{t} - i \lim_{t\to 0} \frac{u(x_0+t,y_0)-u(x_0,y_0)}{t}$$

$$= v_y(x_0,y_0) - iu_y(x_0,y_0)$$

לסיכום קיבלנו את המשפט הבא

משפט 4.1: אם $f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$ גזירה בנקודה $z_0=x_0+iy_0$ אז לשתי הפונקציות (הממשיות) $u(x,y)$, $v(x,y)$, יש נגזרות חלקיות מסדר ראשון u_x, u_y, v_x, v_y בנקודה (x_0,y_0), והן מקיימות את זוג **משוואות קושי-רימן (Cauchy-Riemann)**

$$\text{(CR)} \quad \begin{cases} u_x(x_0,y_0) &= v_y(x_0,y_0) \\ u_y(x_0,y_0) &= -v_x(x_0,y_0) \end{cases}$$

זוג משוואות זה המסומן על ידי (CR). בנוסף לכך קיבלנו שתי נוסחאות שונות לחישוב הנגזרת

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= u_x(x_0,y_0)+iv_x(x_0,y_0) \\ &= v_y(x_0,y_0)-iu_y(x_0,y_0) \end{aligned}$$

הגדרה 4.1: משוואות קושי-רימן עבור זוג פונקציות ממשיות בשני משתנים $u(x,y)$, $v(x,y)$ נתונות על ידי

$$\textbf{(CR)} \quad \begin{cases} u_x &= v_y \\ u_y &= -v_x \end{cases}$$

נאמר שזוג פונקציות (u,v) **מקיים את משוואות קושי-רימן** בקבוצה $D\subseteq\mathbb{R}^2$, אם יש לו נגזרות חלקיות מסדר ראשון המקיימות את זוג המשוואות (CR) בכל נקודה $(x,y)\in D$.

דוגמה 1: הפונקציות $u=x^2-y^2$, $v=2xy$ מקיימות את משוואות קושי-רימן על כל המישור הממשי $\mathbb{R}^2$.

משפט 4.1 טוען שאם $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ גזירה בנקודה $z=x+iy$, אז הרכיבים שלה u, v, מקיימים את משוואות קושי-רימן באותה נקודה. נשאלת השאלה האם גם ההיפך נכון? כלומר, אם ידוע כי $u(x,y)$, $v(x,y)$ מקיימות את משוואות קושי-רימן בנקודה (x_0,y_0), האם $u(x,y)+iv(x,y)$ גזירה בנקודה זו?

- מאחר ובדקנו רק שני מסלולים פשוטים מתוך אינסוף מסלולים אפשריים שבהן הגבול עשוי לא להיות קיים, יהיה מפתיע אם התשובה חיובית, ואכן כשמדובר בנקודה בודדת התשובה לשאלה היא שלילית (ראה דוגמה נגדית בהמשך). אך כשמדובר בקבוצה פתוחה התשובה היא חיובית.

- בניגוד לרוב המשפטים הנלמדים בקורס שהוכחו במאות ה־18 וה־19 משפט לומן-מנשוף הוא יחסית משפט חדש מתחילת המאה ה־20 אשר הוכחתו המלאה חורגת ממסגרת הקורס אך נביא הוכחה לגירסה מרוככת שלו עם קישורים להוכחה המלאה.

משפט 4.2: משפט לומן-מנשוף (Looman-Menchoff)
תהי $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ פונקציה מרוכבת מעל קבוצה פתוחה S. אזי $f(z)$ אנליטית ב־S אם ורק אם $f(z)$ רציפה ומקיימת את משוואות קושי-רימן מעל S.

- את הכיוון הראשון של המשפט הוכחנו בתחילת הסעיף: אם $f(z)$ אנליטית בקבוצה S אז על פי טענה 3.21 f רציפה ב־S, והחישוב שביצענו למעלה מוכיח שהיא מקיימת את משוואות קושי-רימן.

- הכיוון השני של המשפט הוא הרבה יותר מורכב, והוכח בשנת 1936 על ידי שימוש בכלים יותר מתקדמים של אנליזה מתימטית שחורגים ממסגרת הקורס (קישורים להוכחה למטה).

- בכיוון זה יוצאים מההנחה ש־$f(z)$ רציפה ומקיימת את קושי-רימן בקבוצה S, וצריך להוכיח כי $f(z)$ אנליטית ב־S, כלומר גזירה בכל נקודה של S (מאחר ו־S פתוחה, על פי טענה 3.23 גזירות גוררת אנליטיות).

- במקום זאת נוכיח את המשפט הקלאסי שמלמדים בקורס פונקציות מרוכבות אקדמי שמשתמש בהנחה יותר חזקה מרציפות: **דיפרנציאביליות**. נושא הדיפרנציאביליות נדון בקורסי חדו"א2 למיניהם.

משפט 4.3: תהי $f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$ פונקציה מרוכבת בסביבת הנקודה $z_0=x_0+iy_0$. אם $u(x,y)$, $v(x,y)$ פונקציות דיפרנציאביליות בנקודה (x_0,y_0), ומקיימות בה את משוואות קושי-רימן, אז f גזירה בנקודה z_0.

הוכחה: על סמך הדיפרנציאביליות קיימות פונקציות $\varepsilon_u(t,s)$, $\varepsilon_v(t,s)$ כך ש־

$$\begin{aligned}\Delta u &= u(x_0+t,y_0+s)-u(x_0,y_0)=u_x(x_0,y_0)t+u_y(x_0,y_0)s+\varepsilon_u(t,s)\sqrt{t^2+s^2}\\ \Delta v &= v(x_0+t,y_0+s)-v(x_0,y_0)=v_x(x_0,y_0)t+v_y(x_0,y_0)s+\varepsilon_v(t,s)\sqrt{t^2+s^2}\end{aligned}$$

וכך ש־ $\lim_{h\to 0}\varepsilon_u(t,s)=\lim_{h\to 0}\varepsilon_v(t,s)=0$.

נזכור כי $|h| = \sqrt{t^2+s^2}$. נבצע חישוב נגזרת

$$
\begin{aligned}
f'(z_0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{[u(x_0+t,y_0+s)+iv(x_0+t,y_0+s)]-[u(x_0,y_0)+iv(x_0,y_0)]}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{[u(x_0+t,y_0+s)-u(x_0,y_0]+i[v(x_0+t,y_0+s)-v(x_0,y_0)]}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{[u_x(x_0,y_0)t+u_y(x_0,y_0)s+\varepsilon_u(t,s)|h|]+i[v_x(x_0,y_0)t+v_y(x_0,y_0)s+\varepsilon_v(t,s)|h|]}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{u_x(x_0,y_0)t+iv_y(x_0,y_0)s+u_y(x_0,y_0)s+iv_x(x_0,y_0)t+\varepsilon_u(t,s)|h|+i\varepsilon_v(t,s)|h|}{h}\\
&\quad\downarrow\text{(CR)}\qquad\downarrow\text{(CR)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{u_x(x_0,y_0)t+iu_x(x_0,y_0)s-v_x(x_0,y_0)s+iv_x(x_0,y_0)t+\varepsilon_u(t,s)|h|+i\varepsilon_v(t,s)|h|}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{u_x(x_0,y_0)t+iu_x(x_0,y_0)s+i[v_x(x_0,y_0)t+iv_x(x_0,y_0)s]+[\varepsilon_u(t,s)+i\varepsilon_v(t,s)]\cdot|h|}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{u_x(x_0,y_0)\cdot(t+is)+iv_x(x_0,y_0)\cdot(s+it)+[\varepsilon_u(t,s)+i\varepsilon_v(t,s)]\cdot|h|}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{u_x(x_0,y_0)\cdot h+iv_x(x_0,y_0)\cdot h+[\varepsilon_u(t,s)+i\varepsilon_v(t,s)]\cdot|h|}{h}\\
&= u_x(x_0,y_0)+iv_x(x_0,y_0)+\lim_{h\to 0}[\varepsilon_u(t,s)+i\varepsilon_v(t,s)]\cdot\frac{|h|}{h}\\
&= u_x(x_0,y_0)+iv_x(x_0,y_0)
\end{aligned}
$$

הגבול האחרון שואף לאפס כי $\varepsilon_u(t,s)+i\varepsilon_v(t,s)$ שואף לאפס והביטוי $\frac{|h|}{h}$ חסום. קיבלנו אם כן שאם $u(x,y)$, $v(x,y)$ דיפרנציאביליות בנקודה (x_0,y_0) ומקיימות בה את משוואות קושי-רימן, אז f גזירה בנקודה z_0.

לבסוף: אם u, v דיפרנציאביליות בכל נקודה של קבוצה פתוחה S, ומקיימות קושי-רימן בכל נקודה של S, אז f גזירה בכל נקודה של S, ולכן f אנליטית בקבוצה S. ∎

מסקנה 4.4: תהי $f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$ פונקציה מרוכבת בקבוצה פתוחה S. אם לפונקציות u, v, יש נגזרות חלקיות רציפות מסדר ראשון בקבוצה S, ואם u, v, מקיימות את משוואות קושי-רימן ב־S, אז f אנליטית ב־S.

הוכחה: בקורס חדו"א 2 למדנו[1] כי רציפות הנגזרות החלקיות מסדר ראשון גוררת דיפרנציאביליות. ∎

[1] ראה משפט אוילר בסוף פרק 3 בחוברת חדו"א 2

דוגמה 2: הפונקציה $f(x+iy)=(x^2+5x-y^2)+(2xy+5y)i$ מקיימת את תנאי המסקנה על כל המישור המרוכב $\mathbb{C}$: $u=x^2+5x-y^2$, $v=2xy+5y$, $u_x=2x+5=v_y$. כמובן כל הנגזרות החלקיות רציפות על כל המישור המרוכב $\mathbb{C}$, ולכן $u_y=-2y=-v_x$. על פי המסקנה f אנליטית על כל $\mathbb{C}$. לא קשה לגלות כי $f(z)=z^2+5z$.

קישורים להוכחה מלאה של משפט Looman-Menchoff

- Looman–Menchoff theorem
- Cauchy–Rieman
- When is a Function that Satisfies the Cauchy-Riemann Equations Analytic?

הערות

1. משפט לומן-מנשוף הוא משפט בעל אופי סביבתי. כלומר התנאים מנוסחים מעל קבוצה פתוחה S ואינם תקפים לנקודה בודדת! קיום תנאי הרציפות וקושי-רימן בנקודה בודדת אינם מבטיחים אנליטיות בנקודה. למשל הפונקציה $f(z)=|z|^2$ היא פונקציה רציפה על פני כל המישור המרוכב $\mathbb{C}$

$$\begin{cases} f(z)=f(x+iy)=|z|^2=(x^2+y^2)+0\cdot i \\ u(x,y)=x^2+y^2 \\ v(x,y)=0 \end{cases}$$

כי $u(x,y)=x^2+y^2$, $v(x,y)=0$, רציפות על כל המישור $\mathbb{R}^2$. קל לבדוק שהפונקציות $u(x,y)$, $v(x,y)$ מקיימות את משוואות קושי-רימן בנקודה $z=0$ בלבד! לכן $f(z)$ אינה גזירה במישור המנוקב $\mathbb{C}-\{0\}$. לכן f אינה אנליטית בנקודה $z=0$, למרות שהיא מקיימת את תנאי לומן-מנשוף בנקודה זו. נבדוק גזירות בנקודה $z=0$

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|h|^2-0}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{h\cdot\overline{h}}{h}=\lim_{h\to 0}\overline{h}=0 \end{aligned}$$

בדוגמה זו יוצא ש־f גזירה בנקודה (אך לא אנליטית!) אבל גם זה לא מתחייב!

2. למעשה תנאי לומן-מנשוף בנקודה בודדת אינם מבטיחים אפילו גזירות בנקודה בה הם

מתקיימים. למשל הפונקציה

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{z^5}{|z|^4} & z\neq 0\\ 0 & z=0\end{cases}$$

רציפה על כל המישור המרוכב $\mathbb{C}$, ומקיימת את משוואות קושי-רימן בנקודה $z=0$, אך אינה גזירה בנקודה $z=0$! פרטים נוספים בקישור הבא

how-to-show-that-fz-fracz5z4-satisfies-the-cauchy-riemann-equation

3. התנאי היותר חזק: u, v דיפרנציאביליות בנקודה z_0 ומקיימות קושי-רימן מבטיח גזירות בנקודה z_0 (אך לא אנליטיות!), כפי שראינו בחלק השני של ההוכחה למעלה.

4. לכן ייתכן מצב בו $f(z)$ רציפה ומקיימת קושי-רימן בנקודה z_0 ולמרות זאת אינה גזירה בנקודה z_0. הדוגמה שבהערה 2 היא כזו. מצב זה מוכיח כי u, v אינן דיפרנציאביליות בנקודה (x_0,y_0).

מסקנות

טענה 4.5: אם $f'(z)=0$ מעל תחום S אז f קבועה מעל S.

הוכחה: על סמך משפט 4.1, לכל $z=x+iy\in S$

$$\begin{aligned}f'(z) &= u_x(x,y)+iv_x(x,y)=0\\ f'(z) &= v_y(x,y)-iu_y(x,y)=0\end{aligned}$$

ולכן בהכרח $u_x=u_y=0$ על כל התחום S ולכן $u(x,y)$ חייבת להיות פונקציה קבועה. באופן דומה נסיק כי $v(x,y)$ קבועה מעל S. לכן f קבועה ב־S. ∎

הערה: הטענה אינה נכונה אם S היא קבוצה פתוחה בלבד. למשל, אם $f'(z)=-1$ עבור $\mathrm{Re}(z)<-1$, $f(z)=1$ עבור $\mathrm{Re}(z)>1$, אך אינה מוגדרת ברצועה $-1\le\mathrm{Re}(z)\le 1$, אז ברור כי $f'(z)=0$ אך f אינה קבועה בתחום ההגדרה שלה.

במהלך ההוכחה השתמשנו בטענה מחדו"א 2: אם הנגזרות החלקיות של $u(x,y)$ בתחום קשיר D מתאפסות, אז u קבועה בתחום D. הנה הוכחה קצרה לטענה זו.

הוכחה: יהיו $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in D$ שתי נקודות אשר המסלול הישר המחבר ביניהן כלול בתחום D:

$$r(t)=(x_1+t(x_2-x_1),\ y_1+t(y_2-y_1)),\quad 0\le t\le 1$$

על פי משפט ערך הביניים של לגרנז' קיימת נקודה $t_0\in[0,1]$, $r(1)-r(0)=r'(t_0)$. כלומר

$$u(x_2,y_2)-u(x_1,y_1)=\vec{\nabla}u(r(t_0))\cdot r'(t_0)=0$$

על פי הנתון, הגרדיאנט של u מתאפס, וקיבלנו $u(x_2,y_2)=u(x_1,y_1)$. מאחר והתחום D קשיר, ניתן לחבר כל שתי נקודות בתוכו על ידי קו שבור, ולכן השוויון הוא בין כל שתי נקודות שונות, ולכן הפונקציה קבועה בתחום D. ∎

טענה 4.6: אם פונקציה f מעל תחום S היא אנליטית וגם הפונקציה הצמודה שלה $\overline{f}$ אנליטית, אז f פונקציה קבועה.

הדרכה: נרשום $f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$. לכן $\overline{f}(x+iy)=u(x,y)-iv(x,y)$. עשה שימוש במשוואות קושי-רימן בכדי להראות כי $u_x=u_y=v_x=v_y=0$ על כל נקודה של S.

טענה 4.7: אם פונקציה $|f(z)|=C$ בעלת מודול קבוע מעל תחום S אז f היא פונקציה קבועה מעל S.

הוכחה: אם $C=0$ אז ברור כי לכל z, $f(z)=0$ וסיימנו. לכן נוכל להניח כי $C>0$. מהנתון $|f(z)|=C$ נובע כי

$$f(z)\overline{f(z)}=|f(z)|^2=C^2$$

ולכן גם $|\overline{f}(z)|=C$, ולכן על פי הטענה הקודמת $f(z)$ פונקציה קבועה. ∎

תרגיל 4.1: אם $f:S\to\mathbb{C}$ פונקציה אנליטית מעל תחום S המקבלת ערכים ממשיים בלבד, אז f היא פונקציה קבועה.

הדרכה: נרשום $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$. על פי הנתון $v(x,y)=0$ בכל נקודה $x+iy\in S$. לכן $v_x=v_y=0$. ממשוואות קושי-רימן נקבל גם $u_x=u_y=0$.

תרגיל 4.2: תהי $f:S\to\mathbb{C}$ פונקציה אנליטית מעל תחום S. אם אחת מבין הפונקציות $\mathrm{Re}(f(z))$, $\mathrm{Im}(f(z))$, או $\arg(f(z))$, קבועה אז $f(z)$ קבועה.

טענה 4.8: אם $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ גזירה בנקודה $z=x+iy$ אזי

$$|f'(z)|^2=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}u_x & u_y\\ v_x & v_y\end{vmatrix}$$

הוכחה: הביטוי האחרון מוכר לנו בתור **היעקוביאן** של u, v. על סמך משפט 4.1

$$\begin{aligned}f'(z) &= u_x(x,y)+iv_x(x,y)\\ f'(z) &= v_y(x,y)-iu_y(x,y)\end{aligned}$$

לכן

$$\begin{aligned} |f'(z)|^2 &= f'(z)\overline{f'(z)} = [u_x + iv_x]\cdot[v_y + iu_y] \\ &= (u_xv_y - u_yv_x) + i(u_xu_y + v_xv_y) = (u_xv_y - u_yv_x) = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} \end{aligned}$$

הביטוי $i(u_xu_y + v_xv_y)$ חייב להתאפס כי $|f'(z)|^2$ הוא מספר ממשי. ∎

מסקנה 4.9: אם $f(z)$ אנליטית בנקודה z_0, ואם $f'(z_0) \neq 0$, אזי f הפיכה בסביבת הנקודה z_0. אם $w_0 = f(z_0)$ אז

$$(f^{-1})'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)} \tag{4.1}$$

הוכחה: נרשום $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. על פי הטענה הקודמת היעקוביאן של $u(x,y)$, $v(x,y)$ הוא $|f'(z_0)|^2 \neq 0$. על פי משפט הפונקציות ההפוכות הנלמד בקורס חדו"א 2, אם היעקוביאן של מערכת $u(x,y)$, $v(x,y)$ אינו מתאפס בנקודה נתונה, אז קיימת סביבה בה המערכת הפיכה. המשמעות עבורנו היא שהפונקציה המרוכבת f הפיכה בנקודה z_0. משפט הפונקציות ההפוכות מבטיח לנו גם כי הפונקציה ההפוכה f^{-1} היא רציפה, ולכן מתקיימים תנאי משפט 3.26 שמבטיח לנו כי f^{-1} גזירה ובנוסף מתקיים השוויון (4.1). ∎

4.2 נגזרות של פונקציות אלמנטריות

נחשב את הנגזרות של הפונקציות היסודיות בכדי שלאחר מכן נוכל לחשב את הנגזרות של הפונקציות האלמנטריות באמצעות כללי הגזירה עבור חיבור, חיסור, כפל, חילוק, והרכבה.

הפונקציה e^z

כזכור, ההגדרה של e^z היא

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x\cos y + ie^x \sin y$$

זוהי גם הצורה הקרטזית של e^z שרכיביה הם

$$\begin{aligned} u(x,y) &= e^x\cos y \\ v(x,y) &= e^x \sin y \end{aligned}$$

על סמך משפט 4.1 (קושי-רימן)

$$(e^z)' = v_y - iu_y = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z$$

כצפוי, קיבלנו כי:

$$\boxed{(e^z)' = e^z} \tag{4.2}$$

הפונקציות הטריגונומטריות

כזכור, הפונקצית $\sin$, $\cos$, הוגדרו כך

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

על סמך הנוסחה $(e^z)' = e^z$, ועל סמך כלל השרשרת, ניתן לקבל בקלות

$$\boxed{\begin{aligned} (\sin z)' &= \cos z \\ (\cos z)' &= -\sin z \end{aligned}} \tag{4.3}$$

הפונקציות $\tan$, $\cot$, הוגדרו על ידי

$$\begin{aligned} \tan z &= \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{i(e^{-iz} - e^{iz})}{e^{iz} + e^{-iz}} \\ \cot z &= \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{i(e^{iz} + e^{-iz})}{e^{iz} - e^{-iz}} \end{aligned}$$

על ידי שימוש בכלל נגזרת המנה קל להראות כי

$$\boxed{\begin{aligned} (\tan z)' &= \frac{1}{\cos^2 z} \\ (\cot z)' &= -\frac{1}{\sin^2 z} \end{aligned}} \tag{4.4}$$

פונקציית הלוגריתם $\log z$

בטענה 3.1 פגשנו בזהות הבסיסית:

$$e^{\log z} = z \qquad (z \neq 0)$$

הזהות נובעת מההגדרה של פונקציית הלוגריתם, אבל ניתן להוכיח אותה גם כך:

$$e^{\log z} = e^{\log|z|+i\arg(z)} = e^{\log|z|}e^{i\arg(z)} = |z|e^{i\arg(z)} = z$$

חישוב נגזרת:

$$\begin{aligned} e^{\log z} = z \quad &\Longrightarrow \quad \left[e^{\log z}\right]' = (z)' = 1 \\ &\Longrightarrow \quad [\log z]' \cdot e^{\log z} = 1 \\ &\Longrightarrow \quad [\log z]' = \frac{1}{e^{\log z}} = \frac{1}{z} \end{aligned}$$

קבלנו לכן

$$\boxed{\frac{d}{dz}\log z = \frac{1}{z}} \tag{4.5}$$

פונקציות טריגונומטריות הפוכות

בפרק הקודם מצאנו נוסחאות עבור הפונקציות הטריגונומטריות ההפוכות: נוסחאות (3.20), (3.21). נשאיר לתלמיד לחשב את הנגזרות של הפונקציות האלה על ידי שימוש בכללי גזירה מתאימים. וודא כי אותן נוסחאות נכונות גם עבור הגירסה הממשית של פונקציות אלה. ציין גם את התחומים שבהם הנוסחאות תקפות.

$$\boxed{\begin{array}{llll} \frac{d}{dz}\arcsin z = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} & & \frac{d}{dz}\arctan z = \frac{1}{1+z^2} & \\ \frac{d}{dz}\arccos z = -\frac{1}{\sqrt{1-z^2}} & & \frac{d}{dz}\operatorname{arccot} z = -\frac{1}{1+z^2} & \end{array}} \tag{4.6}$$

פונקציות החזקה z^c

פונקציית החזקה z^c עבור קבוע מרוכב $c \in \mathbb{C} - \{0\}$ הוגדרה על ידי[2]

$$z^c = e^{c \log z}$$

לכן על פי כלל השרשרת

$$\frac{d}{dz} z^c = e^{c \log z} \cdot (c \log z)' = cz^c \cdot \frac{1}{z} = cz^{c-1}$$

ולכן נקבל את הנוסחה

$$\boxed{(z^c)' = cz^{c-1}} \tag{4.7}$$

הפונקציות המעריכיות c^z

בפרק הקודם הגדרנו את הפונקצייה המעריכית על ידי

$$c^z = e^{z \log c}$$

ולכן על פי כלל השרשרת

$$\frac{d}{dz} c^z = \frac{d}{dz} e^{z \log c} = e^{z \log c} \cdot (z \log c)' = c^z \cdot \log c$$

וקיבלנו

$$\boxed{(c^z)' = c^z \cdot \log c} \tag{4.8}$$

נוכל אם כן לסכם ולטעון את המשפט הבא

משפט 4.10: כל פונקציה יסודית היא אנליטית (למעט בנקודות חריץ).

הפונקציות האלמנטריות נוצרות מהפונקציות היסודיות באמצעות פעולות חיבור, חיסור, כפל, חילוק, והרכבה של פונקציות. לכן נוכל לסכם את הסעיף בטענה כי כל פונקציה אלמנטרית היא אנליטית בתחום האנליטיות המשותף לפונקציות היסודיות שמהן היא נבנתה.

[2] עבור $c = 0$, $z^c = 1$, לכל $z \neq 0$.

ענפים אנליטיים

בפרק הקודם הגדרנו בקצרה את המושג **ענף אנליטי**. לפונקציה רב-ערכית כגון $\log z$ יש אינסוף ענפים שונים. רוב הענפים האלה אינם מעניינים בגלל אי-רציפות ואי-גזירות בתחום הרצוי. השאלה שתעניין אותנו ברוב המקרים היא: **בהינתן פונקציה רב-ערכית $f(z)$ ותחום D, האם קיים לפחות ענף אחד של f שהוא אנליטי מעל התחום D?**

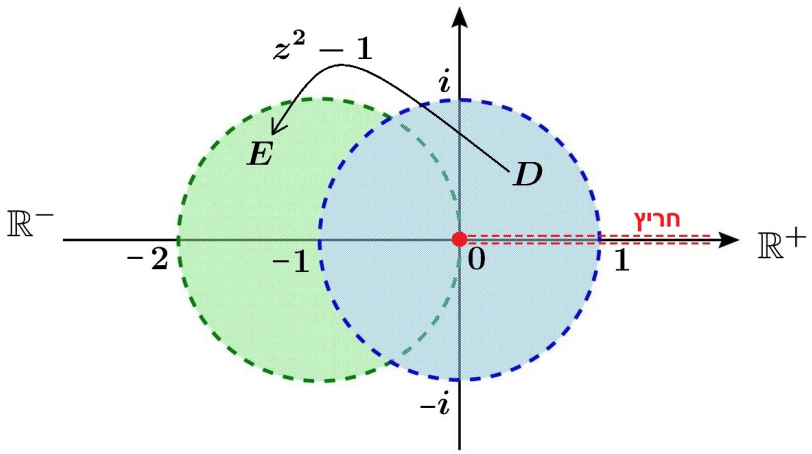
הגדרה 4.2: תהי $f(z)$ פונקציה רב-ערכית המוגדרת מעל תחום D. כל ענף של f שהוא אנליטי ב־D ייקרא **ענף אנליטי של f מעל D**.

דוגמה 3: תהי $f(z)=(z^2-1)^{\frac{1}{2}}$, ויהי D התחום $|z|<1$ (עיגול היחידה הפתוח). האם קיים ענף אנליטי של $f(z)$ בתחום D?

פתרון: על פי ההגדרה $(z^2-1)^{\frac{1}{2}}=e^{\frac{1}{2}\log(z^2-1)}$. יש למצוא ענף של $\log$ כך ש־$\log(z^2-1)$ תהיה אנליטית בעיגול D. ראשית כל נמצא את התמונה E של D תחת הפונקציה z^2-1

$$E=\left\{z^2-1:\ z\in D\right\}$$

הפונקציה z^2 מעתיקה את עיגול היחידה D לעצמו, ולכן z^2-1 תזיז את D לעיגול $|z+1|=1$.



איור 4.5: הפונקציה z^2-1 מעתיקה את עיגול היחידה D לעיגול E: $|z+1|<1$

הענף הראשי של הלוגריתם לא יתאים לנו כי הוא לא אנליטי בחריץ $(-\infty,0]$ שחוצה את העיגול E. אבל אם נבחר את הענף של הלוגריתם המתאים לקטע $(0,2\pi]$

$$L(z)=\ln|z|+i\theta,\quad 0<\theta\le 2\pi,\quad z=re^{\theta}$$

אז החריץ שלו הוא הקרן $[0,\infty)$ אשר אינה חותכת את העיגול E, ולכן $L(z^2-1)$ ענף

אנליטי של $\log(z^2-1)$ בעיגול E. לכן

$$F(z)=(z^2-1)^{\frac{1}{2}}=e^{\frac{1}{2}L(z^2-1)}$$

היא תשובה לשאלה. נשאיר לתלמיד לבדוק האם יש ענפים אנליטיים נוספים?

תרגיל 4.3: מהי הנגזרת של הענף האנליטי שמצאנו בדוגמה הקודמת?

דוגמה 4: תהי $f(z)=(z^2-1)^{\frac{1}{2}}$, ויהי D התחום $|z|>1$ (מישור מחורר). האם קיים ענף אנליטי של $f(z)$ בתחום D?

פתרון: שוב, על פי הגדרת פונקציית החזקה $f(z)=e^{\frac{1}{2}\log(z^2-1)}$. הפונקציה $\log$ היא פונקציה רב-ערכית, ומבין ענפיה הרבים יש למצוא ענף אנליטי בתחום D. נבדוק למשל את הענף הראשי של $\log$

$$F(z)=e^{\frac{1}{2}\mathrm{Log}(z^2-1)}$$

כזכור, החריץ של הענף הראשי Log הוא $(-\infty,0]$, ולכן $F(z)$ אנליטית רק עבור נקודות z המקיימות את התנאי $z^2-1\notin(-\infty,0]$. על ידי הצבת $z=x+iy$ בתנאי זה נקבל שנקודות החריץ של $F(z)$ הן כל הנקודות $z=x+iy$ המקיימות תנאי שקול

$$z^2-1=(x^2-y^2-1)+2xyi\in(-\infty,0]$$

כלומר $2xy=0$ וגם $x^2-y^2-1\le 0$. לאחר פישוט תנאים נקבל שהחריץ של F הוא הקבוצה

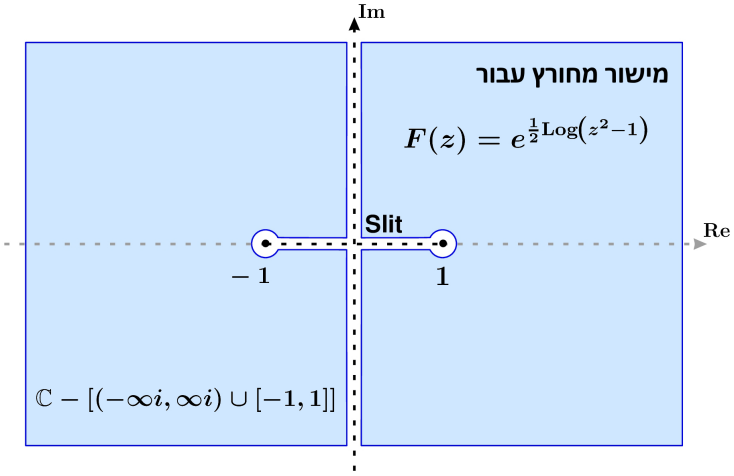
$$\begin{aligned}S&=\{\,x+iy:\ (x=0\vee y=0)\wedge|x|\le 1\,\}\\&=(-\infty i,\infty i)\cup[-1,1]\end{aligned}$$

כאשר הביטוי $(-\infty i,\infty i)$ מציין את הציר המדומה. לכן תחום האנליטיות של $F(z)$ הוא

$$D=\mathbb{C}-[(-\infty i,\infty i)\cup[-1,1]]$$

ראה שרטוט 4.6. יוצא לכן ש־F אינה אנליטית על כל הציר המדומה ולכן אינה ענף אנליטי עבור התחום $|z|>1$, כי החריץ של F חוצה את התחום הזה לכל אורכו.

לא קשה לבדוק שכל הענפים של $\log(z^2-1)$ יובילו למצב דומה שבו החריץ יחתוך את התחום $|z|>1$, ולכן הכיוון הזה נכשל לגמרי. במצבים מסוג זה מומלץ לנסות לפרק את אחד הביטויים של הפונקציה למכפלה (או מנה) של ביטויים אחרים. במקרה שלנו נשתמש



איור 4.6: מישור מחורץ עבור הפונקציה $F(z)=e^{\frac{1}{2}\mathrm{Log}\left(z^2-1\right)}$. החריץ הוא איחוד הציר המדומה עם הקטע $[-1,1]$

בפירוק הבא

$$z^2-1=z^2\left(1-\frac{1}{z^2}\right)$$

ולכן

$$\left(z^2-1\right)^{\frac{1}{2}}=\pm z\left(1-\frac{1}{z^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

ולכן נוכל לנסות את הענף הבא

$$G_1(z)=ze^{\frac{1}{2}\mathrm{Log}\left(1-\frac{1}{z^2}\right)}$$

כאשר $|z|>1$, הביטוי $1-\frac{1}{z^2}$ אינו נופל לעולם[3] בחריץ $(-\infty,0]$ של Log, ולכן הפונקציה $\mathrm{Log}\left(1-\frac{1}{z^2}\right)$ אנליטית בתחום $|z|>1$. קיבלנו לכן ש־$G_1(z)$ היא ענף אנליטי של $f(z)$. קל לבדוק שגם

$$G_2(z)=-ze^{\frac{1}{2}\mathrm{Log}\left(1-\frac{1}{z^2}\right)}$$

היא ענף אנליטי של $f(z)$ בתחום $|z|>1$.

תרגיל 4.4: מהן הנגזרות של הענפים האנליטיים שמצאנו בדוגמה הקודמת?

[3] $1-\frac{1}{z^2}$ הוא ממשי שלילי רק אם $z=x$ ממשי. אבל $|x|>1$ גורר $1-\frac{1}{x^2}>0$

4.3 פונקציות הרמוניות

התאוריה של קושי-רימן היא הנדבך הראשון בהבנת טבעה של פונקציה אנליטית ושימושיה. מושג הפונקציה ההרמונית הוא נדבך חשוב נוסף בכיוון זה.

הגדרה 4.3: תהי $u(x,y)$ פונקציה ממשית מעל תחום מישורי $D \subseteq \mathbb{R}^2$. הפונקציה u תקרא **הרמונית בתחום** D אם היא גזירה פעמיים ברציפות מעל D ומקיימת את המשוואה

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \tag{4.9}$$

בכל נקודה של התחום D.

כמובן משוואה שקולה ל־(4.9) היא: $u_{xx} = -u_{yy}$ או $u_{yy} = -u_{xx}$.

טענה 4.11: תהי $f(z)$ פונקציה אנליטית מעל תחום $D \subseteq \mathbb{C}$, ותהי $u(x,y) + iv(x,y)$ ההצגה הקרטזית של f. אזי u, v, שתיהן פונקציות הרמוניות מעל התחום D.

הוכחה: זה נובע מייד ממשוואות קושי-רימן (משפט 4.1)

$$\text{(CR)} \quad \begin{cases} u_x &= v_y \\ u_y &= -v_x \end{cases}$$

לכן

$$\begin{aligned} u_{xx} &= \partial_x u_x = \partial_x v_y = v_{yx} \\ u_{yy} &= \partial_y u_y = \partial_y(-v_x) = -v_{xy} \end{aligned}$$

בחדו"א 2 למדנו כי $v_{xy} = v_{yx}$ כאשר הנגזרות החלקיות רציפות. לכן $u_{xx} = -u_{yy}$, ולכן u הרמונית בתחום D. באותו אופן נוכיח שגם v הרמונית בתחום D. ∎

דוגמה 5: הצורה הקרטזית של הפונקציה $f(z) = z^2$ היא $(x^2 - y^2) + 2xyi$. לכן על פי טענה 4.11, $u(x,y) = x^2 - y^2$, $v(x,y) = 2xy$, הן פונקציות הרמוניות כפי שניתן לבדוק בקלות.

דוגמה 6: הפונקציה $f(z) = x^2 + y^2 i$ אינה אנליטית כי $u(x,y) = x^2$ אינה הרמונית! גם הפונקציה $v(x,y) = y^2$ אינה הרמונית. למעשה, מטענה 4.11 אנו למדים שלא קיימת שום פונקציה אנליטית אשר החלק הממשי שלה הוא x^2!

הגדרה 4.4: יהיו $u(x,y)$, $v(x,y)$ פונקציות הרמוניות מעל תחום D. הפונקציה $v(x,y)$ נקראת **הרמונית צמודה של** $u(x,y)$ אם שתי הפונקציות מקיימות את משוואות קושי-רימן

$$\text{(CR)} \quad \begin{cases} u_x &= v_y \\ u_y &= -v_x \end{cases}$$

זוג פונקציות הרמוניות (u,v) שבו v צמודה הרמונית של u יקרא **זוג הרמוני**.

דוגמה 7: הפונקציה $v(x,y)=2xy$ היא הצמודה ההרמונית של $u(x,y)=x^2-y^2$ מעל כל המישור המרוכב $\mathbb{C}$. בדוגמה קודמת ראינו כי שתי הפונקציות האלה הן הרכיבים בהצגה הקרטזית של $f(z)=z^2$. במשפט הבא נוכיח שזה לא מקרי.

תרגיל 4.5: הוכח כי $u(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ היא פונקציה הרמונית מעל $\mathbb{C}-\{0\}$ ומצא את הצמוד ההרמוני שלה. מהו תחום ההגדרה של הצמוד ההרמוני שמצאת?

הדרכה: בדיקת ההרמוניות היא קלה. הצמוד ההרמוני $v(x,y)$ היא פתרון של המערכת $\begin{cases} v_x &= -u_y \\ v_y &= u_x \end{cases}$

כלומר

$$\begin{cases} v_x &= -\dfrac{y}{x^2+y^2} \\ v_y &= \dfrac{x}{x^2+y^2} \end{cases}$$

על ידי אינטגרציה פשוטה, קל לקבל

$$v(x,y)=\int \frac{-y\,dx}{x^2+y^2}=\arctan\frac{y}{x}+C$$

יש לוודא ש־$v(x,y)$ מקיים גם את המשוואה השניה $v_y=\frac{x}{x^2+y^2}$, אחרת אין צמוד הרמוני! תחום ההגדרה הצטמצם קצת: הוא אינו כולל את ציר־y.

יחס הצמידות ההרמוני אינו סמטרי. אם v צמודה הרמונית של u, אז לרוב u אינה צמודה הרמונית של v.

משפט 4.12: יהיו $u(x,y)$, $v(x,y)$ פונקציות מעל תחום D. אזי הפונקציה $f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$ אנליטית בתחום D אם ורק אם (u,v) הוא זוג הרמוני מעל D.

הוכחה: כיוון 1: נניח ש־f אנליטית בתחום D. בטענה 4.11 הוכחנו ששתי הפונקציות u, v הרמוניות ב־D. על פי ההגדרה, לאמר ש־v צמודה הרמונית של u זה בעצם לאמר שהזוג (u,v) מקיים את משוואות קושי-רימן, וזה כמובן נובע ממשפט 4.1. קיבלנו כי (u,v) זוג הרמוני.

כיוון 2: על פי ההגדרות של פונקציה הרמונית וצמידות הרמונית, כל הנגזרות החלקיות של $u(x,y)$, $v(x,y)$, קיימות ורציפות בתחום D, ובנוסף מקיימות את משוואות קושי-רימן. לכן על פי משפט 4.3, f אנליטית בתחום D. ∎

צילום מסך מתוך פרק 7 של חוברת הקורס בחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2 שאותה ניתן

להוריד על ידי לחיצה עליו. זוהי תזכורת לאחד המשפטים היסודיים של האנליזה הוקטורית אשר נתבסס עליו בכדי להוכיח משפט יסודי עבור פונקציות הרמוניות (משפט 4.13).

משפט 7.5: יהי $\vec{\mathbf{F}}(x,y)=P(x,y)\vec{\mathbf{i}}+Q(x,y)\vec{\mathbf{j}}$ שדה גזיר ברציפות מעל תחום פשוט קשר D. אזי $\vec{\mathbf{F}}$ הוא שדה משמר אם ורק אם

$$P_y(x,y)=Q_x(x,y)$$

בכל נקודה $(x,y)\in D$.

איור 4.7: קישור לחוברת ההרצאות בקורס חדו"א 2 להורדה: https://samyzaf.com/technion/hedva2t/hedva2.pdf

כזכור המשמעות של שדה משמר $\vec{\mathbf{F}}=P\vec{\mathbf{i}}+Q\vec{\mathbf{j}}$ היא קיום פונקציית פוטנציאל $v(x,y)$ המקיימת $v_x=P$, $v_y=Q$.

משפט 4.13: תהי $u(x,y)$ פונקציה הרמונית בתחום פשוט קשר D. אזי קיימת פונקציה הרמונית יחידה $v(x,y)$ (עד כדי קבוע) בתחום D כך ש־(u,v) זוג הרמוני ב־D.

הוכחה: נסמן

$$P=-u_y,\quad Q=u_x$$

אזי מהעובדה ש־u הרמונית ($-u_{yy}=u_{xx}$) נובע כי

$$P_y=-u_{yy}=u_{xx}=Q_x$$

לכן $\vec{\mathbf{F}}=(P,Q)$ הוא שדה מישורי משמר (או לחלופין $Pdx+Qdy$ הוא דיפרנציאל מדויק), ולכן קיימת פונקציית פוטנציאל $v(x,y)$ בתחום D המקיימת

$$v_x=P=-u_y\quad;\quad v_y=Q=u_x$$

נוכיח ש־v הרמונית:

$$v_{xx}=\partial_x v_x=\partial_x[-u_y]=-u_{yx}=-u_{xy}=-\partial_y u_x=-\partial_y v_y=-v_{yy}$$

קיבלנו כי v היא פונקציה הרמונית צמודה לפונקציה u.

גם ההיפך נכון: אם $w(x,y)$ פונקציית פוטנציאל של הדיפרנציאל $Pdx+Qdy$ אז w הרמונית צמודה של u. ידוע כי פונקציית הפוטנציאל יחידה עד כדי קבוע, ולכן $w-v=C$, כלומר v יחידה עד כדי קבוע. ∎

מסקנה 4.14: אם $u(x,y)$ פונקציה הרמונית בתחום פשוט קשר D, אזי קיימת פונקציה $v(x,y)$ (הרמונית צמודה) כך ש־$u+iv$ אנליטית בתחום D.

הוכחה: על פי המשפט הקודם קיימת הרמונית צמודה v. האלגוריתם למציאת v הוא פשוט: $v(x,y)$ הוא פונקציית פוטנציאל של השדה המשמר $\vec{\mathbf{F}}=(-u_y,u_x)$. הפונקציות u, v, מקיימות את משוואות קושי-רימן בנקודה (x_0,y_0). הגזירות של u, v, בנקודה (x_0,y_0) נובעת מהרציפות של הנגזרות החלקיות וממשפט מתאים בחדו"א 2 ולכן על פי משפט 4.3 הפונקציה $u+iv$ אנליטית. ∎

מסקנה 4.15: אם $u(x,y)$ פונקציה הרמונית בתחום פשוט קשר D, אזי קיימת פונקציה אנליטית $f:D\to\mathbb{C}$ אשר הרכיב הממשי שלה הוא $u(x,y)$.

מסקנה 4.16: אם $v(x,y)$ פונקציה הרמונית בתחום פשוט קשר D, אזי קיימת פונקציה אנליטית $f:D\to\mathbb{C}$ אשר הרכיב המדומה שלה הוא $v(x,y)$.

הוכחה: טענה זו אינה סמטרית לטענה הקודמת משום שיחס הצמידות אינו סמטרי! על פי המסקנה הקודמת קיימת פונקציה אנליטית $g(z)$ בתחום D כך ש־$\mathrm{Re}\,(g(z))=v$. אם נגדיר $f(z)=ig(z)$ נקבל את הפונקציה הדרושה. ∎

דרך נוספת להוכיח את יחידות הצמוד ההרמוני היא: אם $w(x,y)$ צמודה הרמונית של $u(x,y)$, אז w צריכה לקיים $w_y=u_x=v_y$, $w_x=-u_y=v_x$. לכן $w_x=v_x$, $w_y=v_y$, ולכן v, w, נבדלות בקבוע.

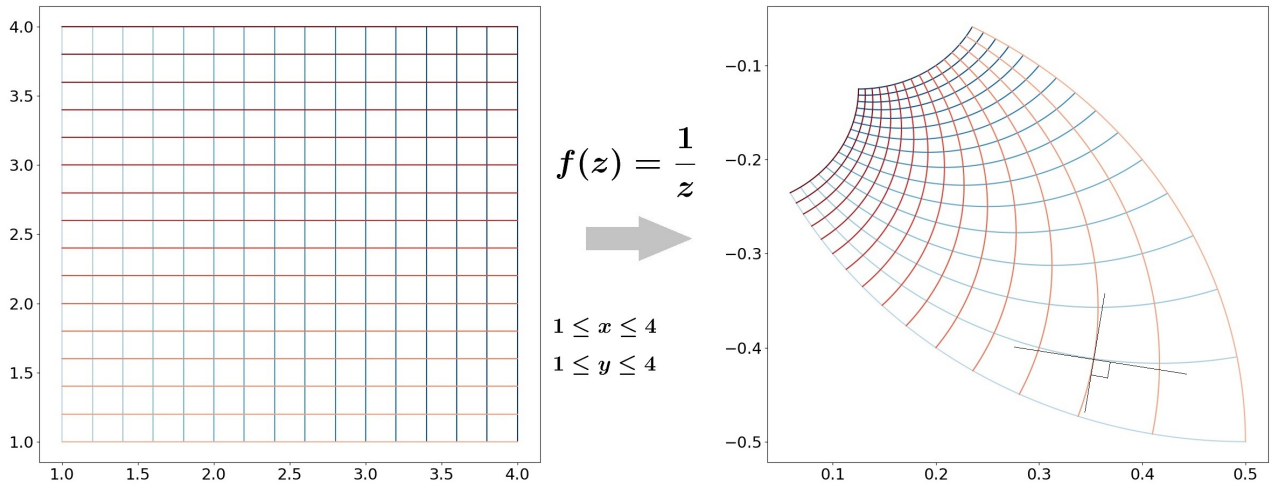
4.4 העתקות קונפורמיות

הסעיף הנוכחי מתבסס על נושא המסלולים, ולכן מומלץ לעבור שוב על סעיף המסלולים מפרק 2.

הגרף של פונקציה מרוכבת הוא יריעה 4-מימדית אשר לא ניתן להמחשה פשוטה באמצעות שרטוטים דו-מימדיים. אחת הדרכים המקובלות בכדי לנתח ולהמחיש פונקציות אנליטיות היא על ידי האופן שבו הן פועלות על מסלולים במישור.

המסלולים הכי פשוטים הם קווים ישרים, בפרט קווים אופקיים ואנכיים שמהם נבנים סריגים מישוריים. האופן שבו פונקציה אנליטית פועלת על סריג היא אחת הדרכים הפשוטות להמחשת והבנת הפונקציה.

דוגמה 8: בצד שמאל של שרטוט 4.8 מוצגת חלוקה מלבנית (סריג 15×15) של המלבן $D=[1,4]\times[1,4]$. יש לשים לב לצבע האדום של הקווים האופקיים, והצבע הכחול של הקווים האנכיים. בצד ימין של השרטוט מוצגת התמונה של הסריג תחת הפונקציה $f(z)=\frac{1}{z}$. על פי גווני צבעי הכחול והאדום, ניתן להבחין לאן מתמפים הקווים האופקיים והאנכיים של הסריג.



איור 4.8: תמונת המלבן $D=[1,4]\times[1,4]$ תחת הפונקציה $f(z)=\frac{1}{z}$

נקדים ונאמר שלמרות אפקט העיוות של הפונקציה, הזוויות שבין הקווים נשמרות תחת ההעתקה (90°). תכונה זו היא התכונה היסודית של **ההעתקה הקונפורמית** עליה נלמד בסעיף זה. נתחיל בהגדרת המושגים היסודיים.

הגדרה 4.5: מסלול $\sigma(t)=x(t)+iy(t)$, $t\in I$, נקרא **חלק** אם שתי הפונקציות הממשיות $x(t)$, $y(t)$, גזירות ברציפות בכל נקודה פנימית $t\in I$, ובנוסף $x'(t)$ ו־$y'(t)$ אינן מתאפסות יחד בשום נקודה.

את התנאי האחרון לפעמים מבטאים על ידי $x'(t)^2+y'(t)^2>0$ לכל נקודה פנימית $t\in I$, או פשוט על ידי $\sigma'(t)\neq\vec{0}$, כאשר $\sigma'(t)=x'(t)+iy'(t)$. כזכור מקורס חדו"א 2 (או אינפי 2), הוקטור $\sigma'(t)$ הוא למעשה וקטור המהירות של חלקיק מסה שחוק התנועה שלו נתון על ידי $\sigma(t)$. לכן מסלול חלק הוא למעשה מסלול שבו בכל רגע כיוון התנועה ברור כי וקטור המהירות קיים ואינו מתאפס. הגודל $\sigma'(t)$ הוא גם וקטור המהירות של הישר המשיק למסלול בנקודה t.

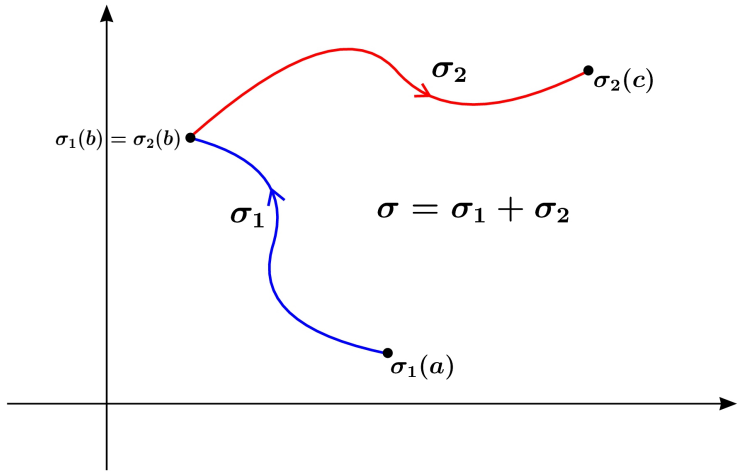
הגדרה 4.6: יהיו

$$\begin{aligned}\sigma_1(t) &= x_1(t)+iy_1(t), \quad t\in[a,b]\\ \sigma_2(t) &= x_2(t)+iy_2(t), \quad t\in[b,c]\end{aligned}$$

שני מסלולים כך ש־$\sigma_1(b)=\sigma_2(a)$ (נקודת הסוף של σ_1 היא נקודת ההתחלה של σ_2).
השרשור σ_1,σ_2 של $\sigma:[a,c]\to\mathbb{C}$ מוגדר על ידי

$$\sigma(t)=\begin{cases}\sigma_1(t), & a\le t\le b\\ \sigma_2(t), & b\le t\le c\end{cases}$$

ומסומן על ידי $\sigma=\sigma_1+\sigma_2$ (ראה שרטוט 4.9).

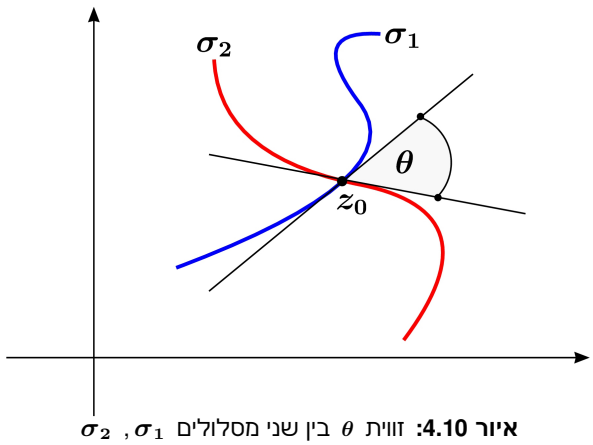


איור 4.9: השרשור $\sigma=\sigma_1+\sigma_2$ של שני מסלולים עוקבים $\sigma_1:[a,b]\to\mathbb{C}$, $\sigma_2:[b,c]\to\mathbb{C}$

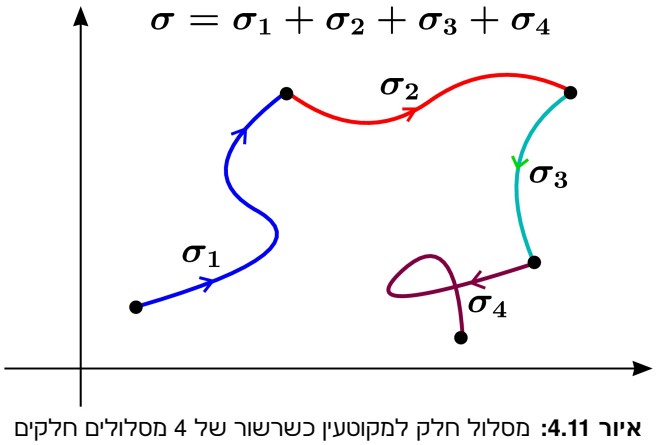
הגדרה 4.7: מסלול $\sigma(t)=x(t)+iy(t)$, $t\in I$, נקרא **חלק למקוטעין** אם ניתן להציג אותו כשרשור של מספר סופי של מסלולים חלקים

$$\sigma=\sigma_1+\sigma_2+\cdots+\sigma_n$$

באופן שקול: מסלול σ הוא חלק למקוטעין אם σ גזירה ברציפות פרט אולי למספר סופי של נקודות t שבהן היא אינה גזירה או שהיא גזירה אך $\sigma'(t)=0$. רוב המקרים שנפגוש יתאימו יותר להגדרה זו.



איור 4.10: זווית θ בין שני מסלולים σ_1 , σ_2



איור 4.11: מסלול חלק למקוטעין כשרשור של 4 מסלולים חלקים

דוגמה 9: המסלול $\sigma(t)=t^5+t^3i$, $t\in[-1,1]$ אינו חלק למרות שהוא גזיר ברציפות בכל הקטע $(-1,1)$, כי הנגזרת $\sigma'(t)=5t^4+3t^2i$ מתאפסת בנקודה $t=0$. אבל אם נפרק את תחום הפרמטר לשני קטעים $[-1,0]$, $[0,1]$, נקבל שני מסלולים חלקים σ_1, σ_2, אשר σ הוא השרשור שלהם.

דוגמה 10: המסלול $\sigma(t)=\sqrt[3]{t^5}+ti$ חלק בקטע $[-1,1]$ מאחר והנגזרת $\sigma'(t)=\frac{5}{3}\sqrt[3]{t^2}+i$ רציפה על כל הקטע $(-1,1)$ ואינה מתאפסת בשום נקודה. אבל העקום המתאים למסלול זה זהה לעקום שבדוגמה הקודמת! כלומר, על ידי פרמטריזציה משופרת ניתן לקבל תאור פרמטרי חלק של העקום. לכן תכונת החלקות היא לפעמים תכונה של הפרמטריזציה ולא של העקום המתואר!

הגדרה 4.8: יהי $\sigma(t)=x(t)+iy(t)$, $t\in I$, מסלול נתון. **ההיפוך של** σ, המסומן $-\sigma$, ומוגדר על ידי $-\sigma(t)=x(a+b-t)+iy(a+b-t)$, הוא מסלול הזהה ל־$\sigma$ מלבד שכיוון התנועה הוא הפוך.

הצעד הבא שדרוש לנו הוא כיצד פועלת פונקציה רציפה $f:S\to\mathbb{C}$ על מסלול $\sigma(t)=x(t)+iy(t)$ הכלול בתחום ההגדרה שלה S. פעולה זו היא למעשה פעולת ההרכבה של f עם σ המסומנת $f\circ\sigma$ או $f(\sigma)$, ומוגדרת על ידי

$$(f\circ\sigma)(t)=f(\sigma)(t)=f(x(t)+y(t)i)$$

הרציפות של f מבטיחה שההרכבה $f(x(t)+y(t)i)$ מניבה מסלול חדש γ מעל אותו קטע I כמו σ. המשפט הבא מספק לנו נוסחה לחישוב השיפוע של הישר המשיק בכל נקודה $\gamma(t)$. זהו מקרה פרטי של כלל השרשרת הכללי עבור פונקציות עם מספר משתנים.

טענה 4.17: תהי $f:D\to\mathbb{C}$ פונקציה אנליטית בעלת נגזרת רציפה מעל תחום D, ויהי

$$\sigma(t)=x(t)+iy(t),\quad t\in I$$

מסלול גזיר מעל קטע ממשי I. אזי המסלול $\gamma(t)=f(\sigma(t))$ גם הוא מסלול גזיר מעל הקטע I, ובנוסף מתקיים כלל שרשרת

$$\gamma'(t)=f'(\sigma(t))\cdot\sigma'(t) \tag{4.10}$$

הוכחה: נרשום $f(z)=f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$. הגזירות ברציפות של f מבטיחה כי $u(x,y)$, $v(x,y)$ גזירות ברציפות ומקיימות את משוואות קושי-רימן, ולכן ניתן להפעיל את כלל השרשרת של אינפי 2 על הפונקציות $u(x(t),y(t))$, $v(x(t),y(t))$.

$$
\begin{aligned}
\gamma'(t) &= \tfrac{d}{dt}\left[u(x(t),y(t)) + iv(x(t),y(t))\right] \\
&= u_x x'(t) + u_y y'(t) + iv_x x'(t) + iv_y y'(t) \\
&\overset{\text{(CR)}}{=} u_x x'(t) - v_x y'(t) + iv_x x'(t) + iu_x y'(t) \\
&= u_x x'(t) + iu_x y'(t) - v_x y'(t) + iv_x x'(t) \\
&= u_x[x'(t) + iy'(t)] + iv_x[x'(t) + iy'(t)] \\
&= [u_x + iv_x] \cdot [x'(t) + iy'(t)] \\
&= [u_x(x(t),y(t)) + iv_x(x(t),y(t))] \cdot [x'(t) + iy'(t)] \\
&= f'(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)
\end{aligned}
$$

השתמשנו במשוואות קושי-רימן (CR) במעבר מהשורה השניה לשלישית. ∎

הערות

1. בהמשך נוכיח (משפט קושי) שאם $f(z)$ אנליטית בתחום D אז למעשה ל־$f(z)$ יש נגזרת מכל סדר! כלומר פונקציה אנליטית בתחום היא למעשה גזירה אינסוף פעמים באותו התחום. לכן הנחת הרציפות של הנגזרת בטענה הקודמת היא מיותרת.
2. הרציפות של הנגזרת $f'(z)$ דרושה עבור כלל השרשרת על $u(x(t),y(t))$, $v(x(t),y(t))$.
3. הכלל כמובן חל רק על נקודת זמן t פנימיות של הקטע I. אם הקטע I הוא קטע סגור $[a,b]$ אז כלל השרשרת שהוכחנו חל על הנקודות $a < t < b$ בלבד.
4. לשם נוחות וקיצור במהלך החישוב הנ"ל רשמנו u_x במקום $u_x(x(t),y(t))$, ו־v_x במקום $v_x(x(t),y(t))$.

תזכורת מחדו"א 2:

אם $\sigma(t) = x(t) + iy(t)$ מסלול חלק מעל קטע ממשי I, אזי לכל נקודה פנימית $t_0 \in I$

א. הוקטור $(x'(t_0), y'(t_0))$ הוא וקטור משיק למסלול σ בנקודה $\sigma(t_0) = (x(t_0), y(t_0))$.

ב. משוואת הישר המשיק למסלול בנקודה $\sigma(t_0) = (x(t_0), y(t_0))$ נתון על ידי המסלול הישר

$$
\begin{aligned}
\ell(t) &= \sigma(t_0) + \sigma'(t_0) \cdot t \\
\ell(t) &= (x(t_0), y(t_0)) + t(x'(0), y'(0)) = x(t_0) + iy(t_0) + (x'(0) + iy'(0))t
\end{aligned}
$$

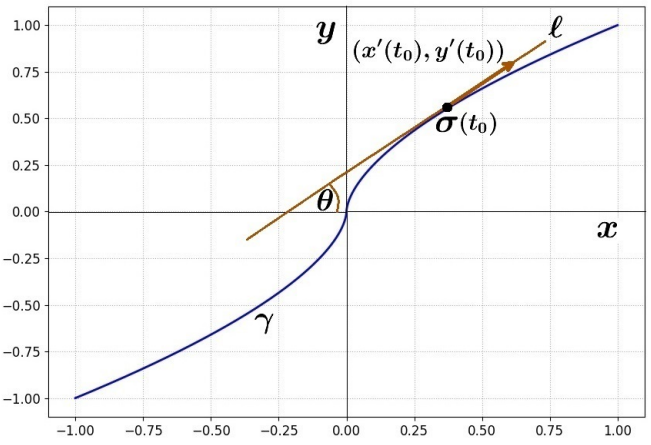
ג. הזווית θ שבין הישר המשיק ℓ וציר-x נתונה על ידי הנוסחה

$$\theta = \mathrm{Arg}(\boldsymbol{\sigma}'(t_0)) = \mathrm{Arg}(x'(t_0) + iy'(t_0)) \tag{4.11}$$

דוגמה: המסלול $\boldsymbol{\sigma}_1(t) = t^5 + it^3$, $-1 < t < 1$, חלק בקטע $(-1,1)$ פרט לנקודה $t = 0$. משוואת המישור המשיק בכל נקודה $t_0 \neq 0$ היא

$$\ell(t) = (t_0^5 + it_0^3) + (5t_0^4 + 3it_0^2)\, t$$

ראה שרטוט 4.13.



$$\boldsymbol{\sigma}_1(t) = t^5 + it^3$$
$$\boldsymbol{\sigma}_2(t) = \sqrt[3]{t^5} + it$$

$$\theta = \mathrm{Arg}(\boldsymbol{\sigma}'(t_0)) = \mathrm{Arg}(x'(t_0) + iy'(t_0))$$

$$\ell(t) = \boldsymbol{\sigma}(t_0) + \boldsymbol{\sigma}'(t_0) \cdot t$$

©samyz

איור 4.13: פרמטריזציה של העקום $y = \sqrt[5]{x^3}$: $\boldsymbol{\sigma}_1(t) = (t^5, t^3)$, פרמטריזציה חלקה: $\boldsymbol{\sigma}_2(t) = \sqrt[3]{t^5} + it$

הנוסחה אינה תקפה לנקודה $t_0 = 0$. ניתן למצוא פרמטריזציה חלקה שקולה:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}_2(t) = \sqrt[3]{t^5} + it \\ -1 < t < 1 \end{cases}$$

קל לבדוק ששני המסלולים $\boldsymbol{\sigma}_1$, $\boldsymbol{\sigma}_2$ שקולים (מתארות אותה קבוצת נקודות) מעל הקטע $(-1,1)$. רקע נוסף על מסלולים ניתן למצוא מחוברת חדו"א 2 (פרק 3, סעיף 2) שניתן להוריד מהקישור הבא:

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2 - חוברת הרצאות

הגדרה 4.9: הזווית בין שני מסלולים שנחתכים בנקודה משותפת מוגדרת להיות הזווית החדה שנוצרת בין שני המשיקים למסלולים בנקודת החיתוך.

הערה: ראה שרטוטים 4.10, 4.14, להמחשה ויזואלית.

נסמן על ידי $\measuredangle_{z_0}(\sigma_1,\sigma_2)$ את הזווית החדה שבין שני מסלולים σ_1, σ_2 בנקודת החיתוך z_0. יהיו t_1, t_2 נקודות הזמן בהן $z_0=\sigma_1(t_1)=\sigma_2(t_2)$. נסמן על ידי ℓ_1, ℓ_2, את הישרים המשיקים למסלולים בנקודה z_0 (ראה שרטוט 4.14). השיפועים של ℓ_1, ℓ_2 הם $\sigma_1'(t_1)$, $\sigma_2'(t_2)$ בהתאמה. הזווית שבין הישר ℓ_1 לציר הממשי החיובי היא $\operatorname{Arg}\left(\sigma_1'(t_1)\right)$, והזווית שבין הישר ℓ_2 לציר הממשי החיובי היא $\operatorname{Arg}\left(\sigma_2'(t_2)\right)$, ולכן קיבלנו

$$\measuredangle_{z_0}(\sigma_1,\sigma_2)=\left|\operatorname{Arg}\left(\sigma_2'(t_2)\right)-\operatorname{Arg}\left(\sigma_1'(t_1)\right)\right| \mod \pi/2 \tag{4.12}$$

הערה: ביצענו חילוק מודולו $\frac{\pi}{2}$ בכדי לקבל את הזווית החדה במקרה והיא יוצאת גדולה מ־ $\frac{\pi}{2}$.

הגדרה 4.10: פונקציה $f(z)$ נקראת **העתקה קונפורמית בתחום** $D\subseteq\mathbb{C}$ אם היא מקיימת את שני התנאים הבאים:

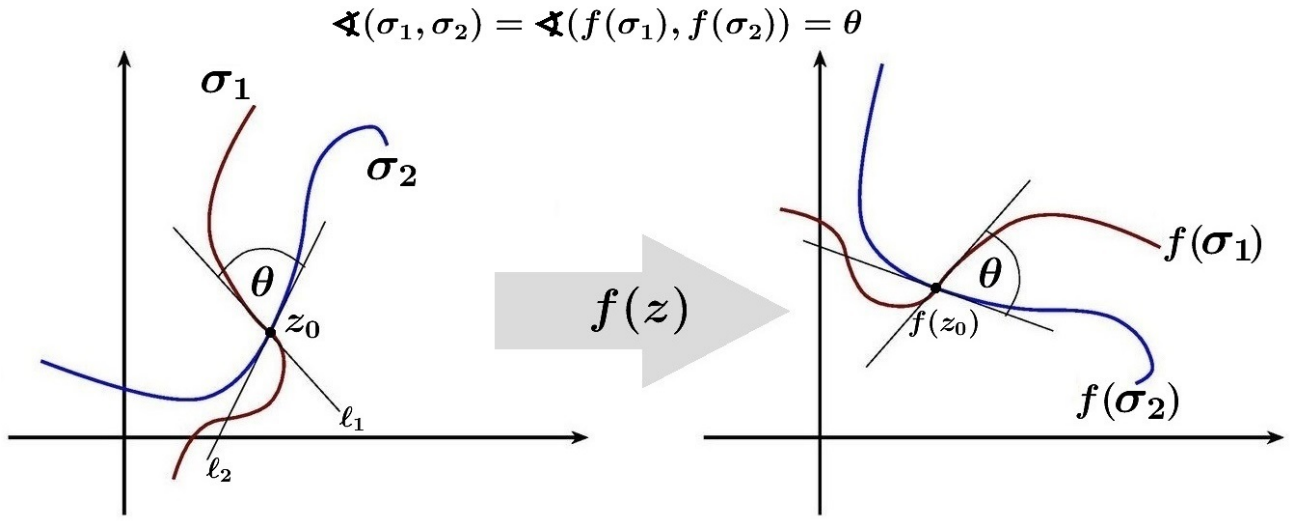
א. f משמרת זוויות בין מסלולים. כלומר לכל שני מסלולים חלקים σ_1, σ_2, בתחום D, ולכל נקודת חיתוך z_0 בין שני המסלולים, מתקיים השוויון

$$\measuredangle_{z_0}(\sigma_1,\sigma_2)=\measuredangle_{f(z_0)}(f(\sigma_1),f(\sigma_2))$$

ב. עבור כל נקודה z_0 בתחום D, קיים הגבול $\lim_{z\to z_0}\frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|}$.

[1] ראה שרטוט 4.14 להמחשה ויזואלית.

[2] אם הפונקציה $f(z)$ אנליטית אז התנאי השני מתקיים אוטומטית



איור 4.14: פונקציה קונפורמית, $f(z)$ משמרת זווית בין שתי מסלולים σ_1, σ_2

דוגמה 11: אם נצטמצם למסלולים ישרים בלבד, אז משרטוט 4.15 מתקבל הרושם שהפונקציה $f(z)=\sin z$ משמרת את הזוויות הישרות שביו קווי הסריג שרואים בצד שמאל של השרטוט. כזכור

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$$

- פרמטריזציה של קו אופקי היא $\sigma_1(t)=t+y_0 i$, $-\infty<t<\infty$.
- פרמטריזציה של קו אנכי היא $\sigma_2(t)=x_0+ti$, $-\infty<t<\infty$.
- המסלולים $\sigma_1(t)$, $\sigma_2(t)$, נחתכים בנקודה $z_0=x_0+iy_0$.

נתחיל בבדיקת התמונה של הקווים האופקיים (צבע אדום)

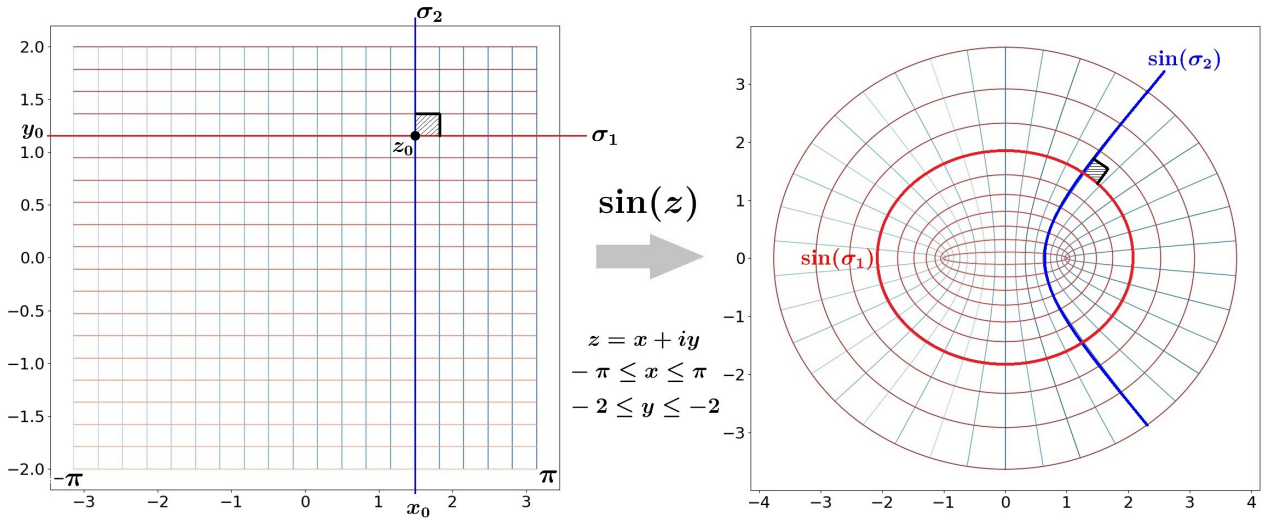
$$\begin{aligned}f(\sigma_1(t)) &= \frac{e^{i\sigma_1(t)}-e^{-i\sigma_1(t)}}{2i}=\frac{e^{it-y_0}-e^{-it+y_0}}{2i}\\ &= \frac{e^{-y_0}(\cos t+i\sin t)-e^{y_0}(\cos t-i\sin t)}{2i}=\frac{e^{y_0}+e^{-y_0}}{2}\sin t+i\cdot\frac{e^{y_0}-e^{-y_0}}{2}\cos t\\ &= \cosh(y_0)\sin t+i\sinh(y_0)\cos t\end{aligned}$$

קיבלנו אליפסה אשר ציריה הם $a=\cosh(y_0)$, $b=\sinh(y_0)$.

באופן דומה, בדיקת התמונה של הקווים האנכיים (צבע כחול) תיתן

$$f(\sigma_2(t))=\sin(x_0)\cosh(t)+i\cos(x_0)\sinh(t)$$

זוהי היפרבולה[4] אשר הציר הראשי שלה הוא a והמוקד הוא 1.



איור 4.15: תמונת המלבן $D=[-\pi,\pi]\times[-2,-2]$ תחת הפונקציה $f(z)=\sin(z)$

חישוב הזווית $\measuredangle_{z_0}(\sigma_1,\sigma_2)=\frac{\pi}{2}$ הוא פשוט. בכדי לחשב את הזווית בין המסלולים $f(\sigma_1)$,

[4] אם נסמן $u=\sin(x_0)\cosh(t)$, $v=\cos(x_0)\sinh(t)$, $a=\sin(x_0)$, $b=\cos(x_0)$, אז קל לבדוק כי $\frac{u^2}{a^2}-\frac{v^2}{b^2}=1$. ציר ההיפרבולה הוא $\sin(x_0)$ והמוקד $\sqrt{a^2+b^2}=1$.

$f(\sigma_2)$, יש לחשב את הנגזרות המתאימות

$$\begin{aligned}[f(\sigma_1(t))]' &= \cosh(y_0)\cos t - i\sinh(y_0)\sin t \\ [f(\sigma_2(t))]' &= \sin(x_0)\sinh(t) + i\cos(x_0)\cosh(t)\end{aligned}$$

המסלולים σ_1, σ_2 נחתכים בנקודה $z_0 = x_0 + iy_0$, ולכן יש להציב $t = x_0$ במשוואה הראשונה, $t = y_0$ במשוואה השניה

$$\begin{aligned}[f(\sigma_1(x_0))]' &= \cosh(y_0)\cos x_0 - i\sinh(y_0)\sin x_0 \\ [f(\sigma_2(y_0))]' &= \sin(x_0)\sinh(y_0) + i\cos(x_0)\cosh(y_0)\end{aligned}$$

קל לבדוק שהמכפלה הפנימית (לא מכפלה מרוכבת!) בין שני הוקטורים האלה היא אפס. כלומר שני הוקטורים ניצבים אחד לשני ולכן

$$\measuredangle_{z_0}(f(\sigma_1), f(\sigma_2)) = \frac{\pi}{2}$$

הוכחנו אם כן כי f משמרת זוויות ישרות בין קווים אופקיים ואנכיים, אך זה עדיין רחוק מאוד מלהוכיח ש־f היא העתקה קונפורמית! לשם כך יש להראות כי f משמרת זוויות מכל גודל בין שני מסלולים כלליים שאינם בהכרח ישרים.

טענה 4.18: תהי $f(z)$ פונקציה אנליטית בנקודה z_0. אם $f'(z_0) \neq 0$ אז f משמרת את הזווית שבין כל שני מסלולים חלקים שעוברים דרך z_0.

הוכחה: יהיו $\sigma_1 : I_1 \to \mathbb{C}$, $\sigma_2 : I_2 \to \mathbb{C}$, שני מסלולים חלקים שנחתכים בנקודה z_0, ויהיו $\gamma_1 = f(\sigma_1)$, $\gamma_2 = f(\sigma_2)$, התמונות של σ_1, σ_2 תחת הפונקציה f. ההנחה $f'(z_0) \neq 0$ מבטיחה שהמסלולים γ_1, γ_2, חלקים בסביבת $f(z_0)$. על פי נוסחה (4.10)

$$\begin{aligned}\gamma_1'(t) &= f'(\sigma_1(t)) \cdot \sigma_1'(t) \\ \gamma_2'(t) &= f'(\sigma_2(t)) \cdot \sigma_2'(t)\end{aligned}$$

על סמך נוסחה (1.11) $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$, ולכן

$$\begin{aligned}\arg\left(\gamma_1'(t)\right) &= \arg\left(f'(\sigma_1(t))\right) + \arg\left(\sigma_1'(t)\right) \\ \arg\left(\gamma_2'(t)\right) &= \arg\left(f'(\sigma_2(t))\right) + \arg\left(\sigma_2'(t)\right)\end{aligned}$$

יהיו $t_1 \in I_1$, $t_2 \in I_2$, נקודות הזמן בהן $z_0 = \boldsymbol{\sigma}_1(t_1) = \boldsymbol{\sigma}_2(t_2)$. אזי

$$\begin{aligned}\arg\left(\boldsymbol{\gamma}_1'(t_1)\right) &= \arg\left(f'(\boldsymbol{\sigma}_1(t_1))\right) + \arg\left(\boldsymbol{\sigma}_1'(t_1)\right) = \arg\left(f'(z_0)\right) + \arg\left(\boldsymbol{\sigma}_1'(t_1)\right)\\ \arg\left(\boldsymbol{\gamma}_2'(t_2)\right) &= \arg\left(f'(\boldsymbol{\sigma}_2(t_2))\right) + \arg\left(\boldsymbol{\sigma}_2'(t_2)\right) = \arg\left(f'(z_0)\right) + \arg\left(\boldsymbol{\sigma}_2'(t_2)\right)\end{aligned}$$

ולכן

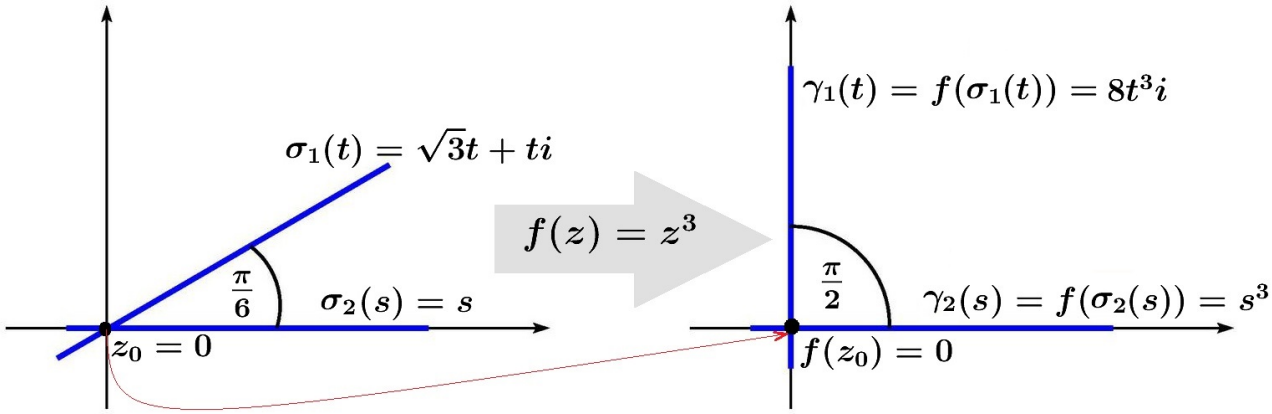
$$\operatorname{Arg}\left(\boldsymbol{\gamma}_2'(t_1)\right) - \operatorname{Arg}\left(\boldsymbol{\gamma}_1'(t_2)\right) = \operatorname{Arg}\left(\boldsymbol{\sigma}_2'(t_1)\right) - \operatorname{Arg}\left(\boldsymbol{\sigma}_1'(t_2)\right)$$

על פי נוסחה (4.12)

$$\begin{aligned}\measuredangle_{z_0}(\boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\sigma}_2) &= \left|\operatorname{Arg}\left(\boldsymbol{\sigma}_2'(t_2)\right) - \operatorname{Arg}\left(\boldsymbol{\sigma}_1'(t_1)\right)\right| \mod \pi/2\\ &= \left|\operatorname{Arg}\left(\boldsymbol{\gamma}_2'(t_2)\right) - \operatorname{Arg}\left(\boldsymbol{\gamma}_1'(t_1)\right)\right| \mod \pi/2\\ &= \measuredangle_{f(z_0)}(\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2)\end{aligned}$$

וקיבלנו כי f משמרת זוויות בין מסלולים הנחתכים בנקודה z_0. ∎

דוגמה 12: התנאי $f'(z) \neq 0$ בטענה 4.18 הוא הכרחי כפי שנראה בדוגמה זו. הנגזרת של $f(z) = z^3$ מתאפסת בנקודה $z_0 = 0$. בשרטוט 4.16 מוצגים שני מסלולים ישרים $\boldsymbol{\sigma}_1(t) = t$, $\boldsymbol{\sigma}_2(t) = \sqrt{3}t + ti$, שהזווית ביניהם היא $\frac{\pi}{6}$, אבל בתמונה שלהם הזווית מתרחבת ל־$\frac{\pi}{2}$.



איור 4.16: הזווית בין המסלולים $\gamma_1(t) = \sqrt{3}t + ti$, $\gamma_2(s) = s$, בנקודה $z_0 = 0$ היא $\theta = \frac{\pi}{6}$. הזווית בין המסלולים $f(\gamma_1)$, $f(\gamma_2)$ היא $\frac{\pi}{2}$. הזווית אינה נשמרת תחת ההעתקה $f(z) = z^3$ מאחר והפונקציה $f(z)$ אינה קונפורמית בנקודה $z_0 = 0$ ($f'(z_0) = 0$)

המשפט הבא הוא מסקנה מיידית מטענה 4.18.

משפט 4.19: אם $f(z)$ אנליטית בתחום D, ואם $f'(z) \neq 0$ לכל $z \in D$, אז f העתקה קונפורמית מעל D.

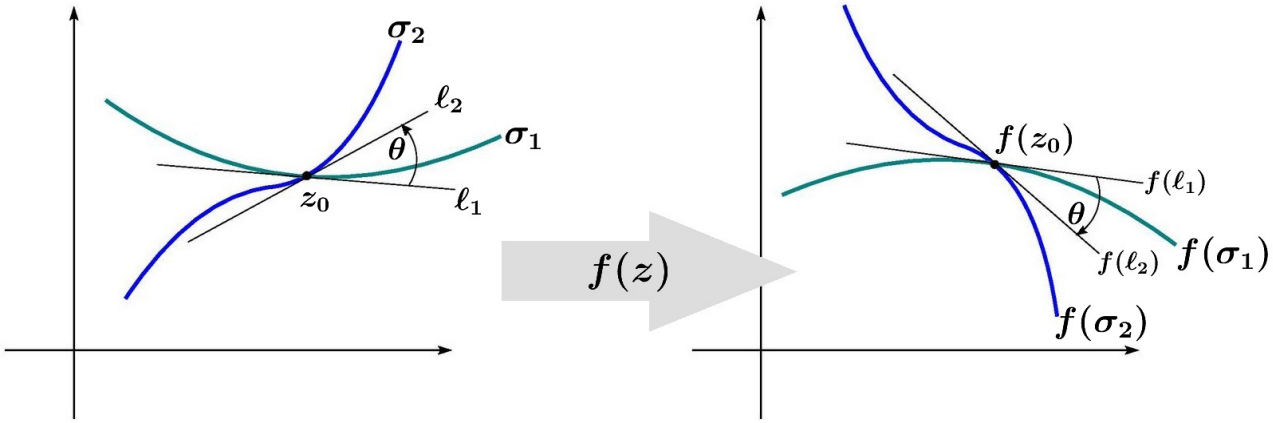
הוכחה: נזכיר שבכדי להוכיח קונפורמיות, על פי הגדרה 4.10 יש להוכיח שני דברים: שימור זווית בין מסלולים, וקיום הגבול $\lim_{z \to z_0} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|}$. שימור זווית בין מסלולים היא מסקנה

מיידית מטענה 4.18. קיום הגבול נובע מהאנליטיות של f

$$\lim_{z\to z_0}\frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|}=\lim_{z\to z_0}\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right|=\left|\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right|=|f'(z_0)|$$

בשלב האחרון הסתמכנו על מסקנה 3.11. ■

בהרבה הקשרים לזווית יש גם כיוון. נציין כי העתקה קונפורמית עשויה לשנות את כיוון הזווית בין מסלולים σ_1, σ_2 כפי שניתן לראות בשרטוט 4.17



איור 4.17: תחת העתקה קונפורמית $f(z)$ כיוון הזווית בין מסלולים σ_1, σ_2 מתהפך (אך עדיין ההעתקה משמרת את הזווית!)

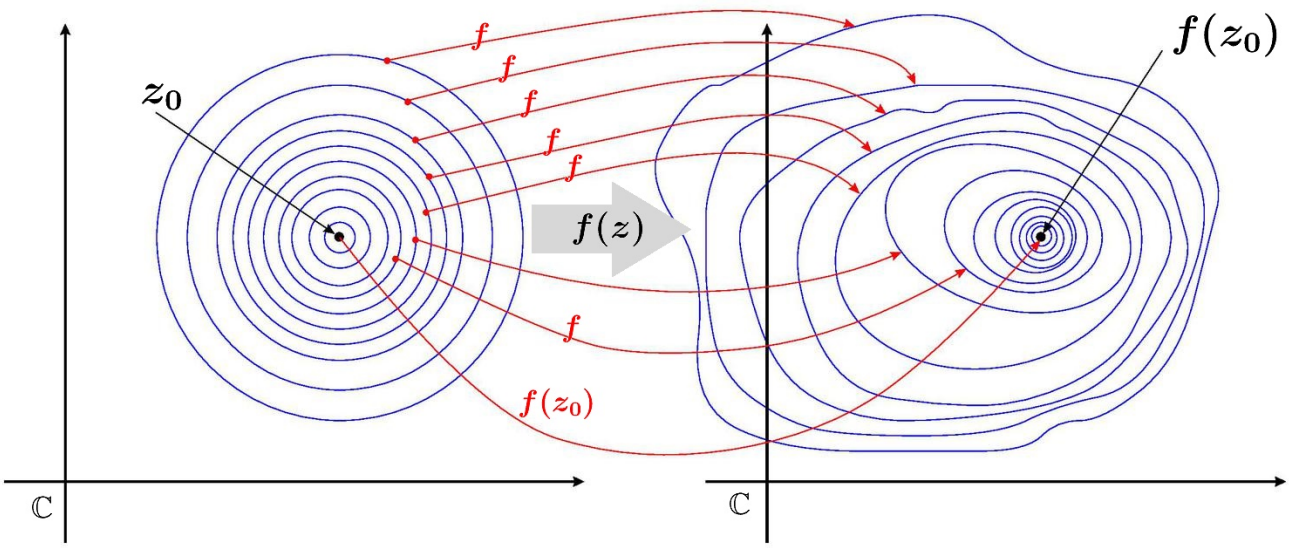
קיום הגבול $\lim_{z\to z_0}\frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|}$

התנאי הראשון לקונפורמיות נדון והודגם בהרחבה. התנאי השני, שניתן לכנותו גם "קיום מקדם מתיחה/כיווץ לוקלי", קשור לשימושים הראשונים שנעשו בהעתקות קונפורמיות בקרטוגרפיה וגרפיקה. הוא מזכיר לנו את ההגדרה של הנגזרת של הפונקציה $f(z)$ בנקודה z_0 אבל הוא למעשה תנאי חלש יותר: קיום תנאי ב' אינו גורר גזירות בנקודה $f(z_0)$.

המשמעות הגאומטרית של תנאי זה נוגע לתכונות המתיחה (או הכיווץ) של הפונקציה. היחס $\frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|}$ הוא למעשה מקדם המתיחה/כיווץ בין גודל המקור $z-z_0$ לתמונה שלו $f(z)-f(z_0)$. תנאי זה הוא למעשה דרישה שמקדם זה יעשה קבוע ככל שהקטע $z-z_0$ הולך וקטן. ניתן להמחיש זאת באמצעות התרשים הבא למה שקורה לסדרת מעגלים קונצנטריים סביב הנקודה z_0 תחת העתקה קונפורמית

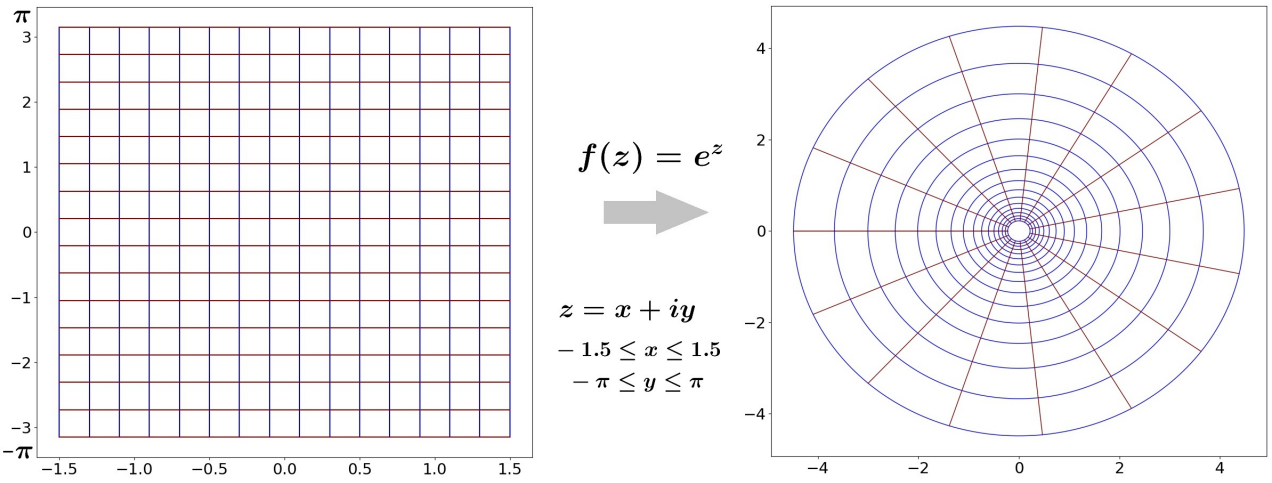
כפי שניתן להבין מהתרשים, פעולת המתיחה/כיווץ של $f(z)$ הולכת ונעשית יותר ויותר אחידה בכל הכיוונים של הנקודה z_0, ולכן מעגלים קטנים סביב z_0 יעברו בקירוב למעגלים (תיתכן מתיחה או כיווץ) סביב $f(z_0)$.

תרגיל 4.6: על סמך משפט 4.19 ההעתקה $f(z)=e^z$ קונפורמית על כל המישור המרוכב $\mathbb{C}$ כי $f'(z)=e^z\neq 0$ לכל $z\in\mathbb{C}$. התבונן בשרטוט 4.19 והוכח כי $f(z)$ מעתיקה קווים אנכיים



איור 4.18: תחת העתקה קונפורמית $f(z)$ סדרת מעגלים קונצנטריים תועתק לסדרת מסלולים סגורים סביב $f(z_0)$ כאשר המסלולים הופכים להיות יותר מעגליים בקירבת $f(z_0)$

למעגלים שמרכזם בראשית הצירים, ומעתיקה קווים אופקיים לקווים ישרים שעוברים דרך ראשית הצירים. יש לשים לב לגוונים של צבעי האדום והכחול בכדי להבחין באופן שבו המלבן בצד שמאל מתמפה לתמונה שלו בצד ימין



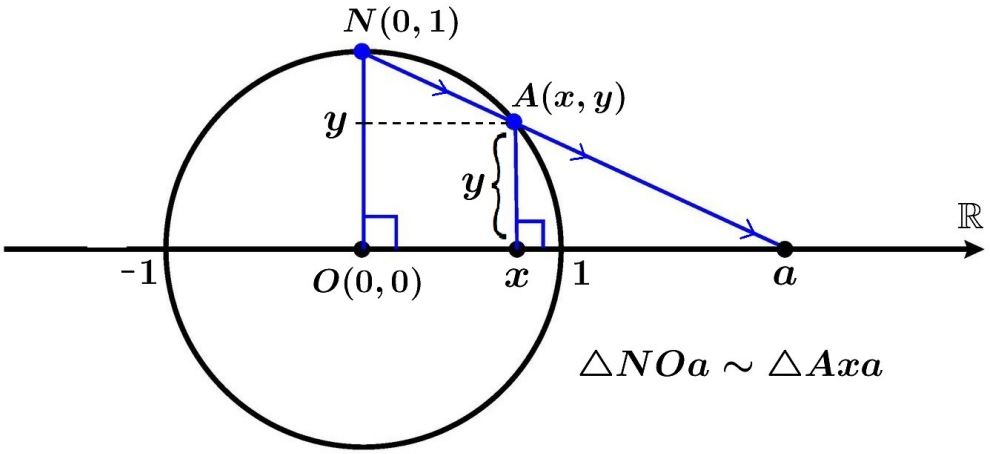
איור 4.19: תמונת המלבן $D = [-1.5, 1.5] \times [-\pi, \pi]$ תחת הפונקציה $f(z) = e^z$

4.5 הספרה של רימן

- בסעיף הבא נציג את העתקות מביוס, שהיא משפחה חשובה ושימושית של פונקציות אנליטיות. למטרה זו אנו נדרשים להבין מודל מורחב של קבוצת המספרים המרוכבים אשר נקרא **הַסְפֵרָה שֶׁל רִימָן**. המודל הזה מתבסס על שקילות טופולוגית שבין שפת הכדור התלת-מימדי (שבלעז קרוי **סְפֵרָה**) ובין המישור המרוכב כשמצרפים אליו נקודה נוספת: ∞.
- לפני הצגת הספרה של רימן נציג את המקבילה הדו-מימדית של הרעיון באמצעות השקילות הטופולוגית שבין מעגל היחידה המנוקב וקבוצת המספרים הממשיים $\mathbb{R}$.
- המעגל המנוקב מוגדר להיות מעגל היחידה $x^2+y^2=1$ ללא הנקודה $(0,1)$ (שלפעמים נקראת "קוטב צפוני")

$$C=\left\{(x,y):\ x^2+y^2=1\right\}-\{(0,1)\}$$

את נקודת הקוטב הצפוני $(0,1)$ נסמן על ידי N. לכל נקודה $A(x,y)$ על המעגל המנוקב C נתאים נקודה a על הציר הממשי באופן הבא: נעביר קו ישר דרך שתי הנקודות N ו־(x,y). ברור שהקו המתקבל חייב לחתוך את הישר הממשי בנקודה ממשית a.



איור 4.20: שקילות טופולוגית בין מעגל מנוקב ובין הישר הממשי

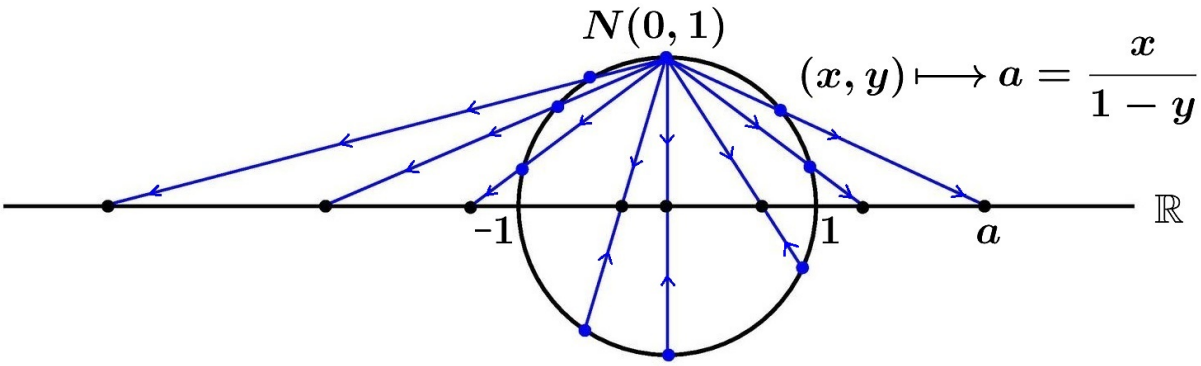
- משיקולים גאומטריים של חפיפת שני משולשים דומים נקבל כי

$$\frac{y}{a-x}=\frac{1}{a}$$

ומכאן נקבל את האיזומורפיזם החלק (העתקה גזירה חד-חד-ערכית ועל) שלנו מהמעגל C לישר הממשי $\mathbb{R}$

$$a=\frac{x}{1-y}$$

יש לשים לב לכך שחצי המעגל התחתון מתמפה לקטע הסגור $[-1,1]$ בעוד שחצי המעגל העליון (ללא נקודת הקוטב $(0,1)$!) מתמפה לכל שאר הנקודות של הישר הממשי (ראה שרטוט 4.21).



איור 4.21: שקילות טופולוגית בין דיסק מנוקב והין הישר הממשי

ההעתקה ההפוכה מקבוצת הממשיים $\mathbb{R}$ למעגל המנוקב C מתקבלת על ידי פתרון המערכת

$$\begin{cases} a = \frac{x}{1-y} \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

מהמשוואה הראשונה נקבל $x=a(1-y)$, ולאחר הצבה במשוואה השנייה נקבל משוואה ריבועית במשתנה y

$$(a^2+1)y^2-2a^2y+(a^2-1)=0$$

שפתרונה הוא $y=\frac{a^2-1}{a^2+1}$, ולכן לכל $a\in\mathbb{R}$ תתאים נקודה $(x,y)\in C$

$$(x,\ y)=\left(\frac{2a}{a^2+1},\quad \frac{a^2-1}{a^2+1}\right)$$

לא קשה לבדוק שמדובר בהעתקה חד-חד-ערכית ועל.

שיקולים גאומטריים דומים מובילים לרעיון השקילות בין הספרה של רימן (Riemann's Sphere) ובין המישור המרוכב $\mathbb{C}$.

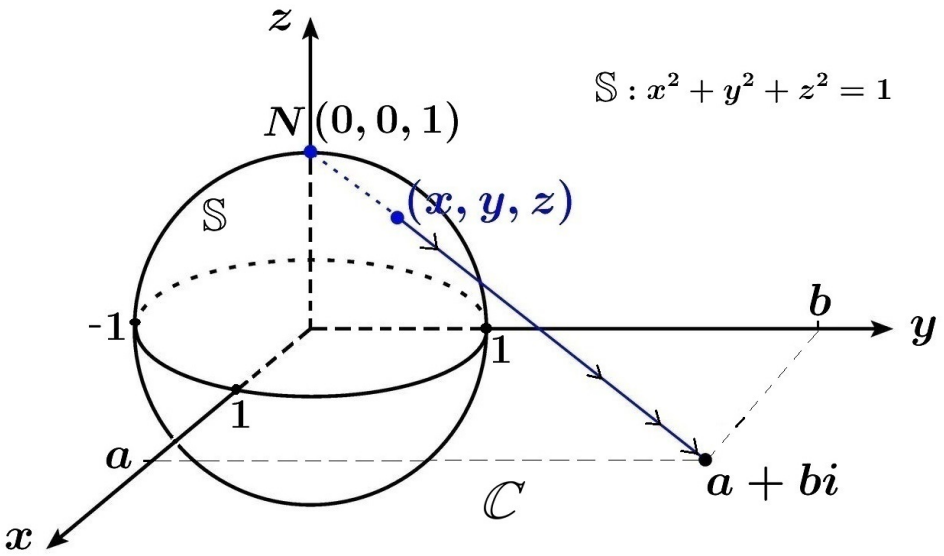
הגדרה 4.11: **הַסְפֵּרָה שֶׁל רִימָן** $\mathbb{S}$ היא שטח הפנים של כדור היחידה במרחב $\mathbb{R}^3$

$$\mathbb{S}=\left\{(x,y,z):\ x^2+y^2+z^2=1\right\}$$

הנקודה $N(0,0,1)$ נקראת **הקוטב הצפוני** של הספרה.

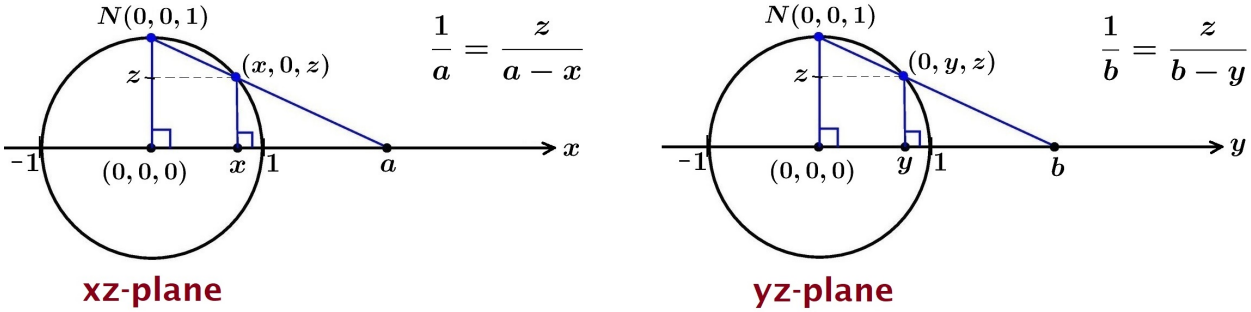
עבור כל נקודה $(x,y,z)\in\mathbb{S}$ השונה מ־N, נעביר את הישר בין N והנקודה (x,y,z) עד

שנפגוש את מישור ה-xy (כלומר את $\mathbb{C}$) בנקודה $a+bi$. ראה שרטוט 4.22.



איור 4.22: הטלה סטראוגרפית מהספרה של רימן למישור המרוכב

אם נסתכל על ההיטלים על מישור-xz ומישור-yz (כפי שרואים בשרטוט 4.23), נקבל את הנוסחאות ההמופיעות בשרטוט 4.23,



איור 4.23: ההיטלים של המצב הגאומטרי הקודם על פני מישור-xz ומישור-yz

אשר מהן ניתן לחלץ בקלות את זוג השוויונים

$$a=\frac{x}{1-z}, \qquad b=\frac{y}{1-z}$$

במילים אחרות ההעתקה

$$a+bi=\frac{x}{1-z}+\frac{y}{1-z}i$$

מהספרה הנקובה

$$\dot{\mathbb{S}}=\Big\{\,(x,y,z):\ x^2+y^2+z^2=1\,\Big\}-\{(0,0,1)\}$$

למישור המרוכב $\mathbb{C}$ היא העתקה חד-חד-ערכית ועל. לכן $\dot{\mathbb{S}}$ הוא מודל נוסף לקבוצת המספרים המרוכבים. העתקה זו נקראת גם **ההטלה הסטראוגרפית**.

ההעתקה ההפוכה מהמישור המרוכב $\mathbb{C}$ לספרה הנקובה $\dot{\mathbb{S}}$ מתקבלת על ידי פתרון המערכת

$$\begin{cases} a = \dfrac{x}{1-z} \\ b = \dfrac{y}{1-z} \\ x^2+y^2+z^2 = 1 \end{cases}$$

שתי המשוואות הראשונות מאפשרות לחלץ את המשתנים x, y באמצעות z

$$\begin{cases} x &= a(1-z) \\ y &= b(1-z) \end{cases}$$

ולאחר הצבה בשוויון השלישי נקבל משוואה ריבועית במשתנה z

$$(a^2+b^2+1)z^2 - 2(a^2+b^2)z + (a^2+b^2-1) = 0$$

שפתרונה הוא $z = \frac{a^2+b^2-1}{a^2+b^2+1}$, ולכן לכל $a+bi \in \mathbb{C}$ תתאים נקודה (x,y,z) בספרה $\mathbb{S}$

$$(x,\ y,\ z) = \left(\frac{2a}{a^2+b^2+1},\quad \frac{2b}{a^2+b^2+1},\quad \frac{a^2+b^2-1}{a^2+b^2+1} \right)$$

שוב, גם כאן לא קשה לבדוק שהעתקה זו היא חד-חד-ערכית, על, ובנוסף גזירה ברציפות.

בכך הוכחנו שקילות טופולוגית בין $\mathbb{C}$ ובין הספרה הנקובה של רימן. אם נוסיף ל־ $\dot{\mathbb{S}}$ את הקוטב הצפוני $N(0,0,1)$ ולמישור המרוכב נוסיף את נקודת האינסוף ∞, נקבל שקילות טופולוגית בין **המישור המרוכב המורחב**

$$\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

ובין ספרת היחידה $\mathbb{S}$.

ההתאמה $T\colon \mathbb{S} \to \mathbb{C}_\infty$ בין הספרה למישור המרוכב המורחב היא

$$T(x,y,z) = \begin{cases} \frac{x}{1-z} + \frac{y}{1-z}i, & z < 1 \\ \infty, & z = 1 \end{cases}$$

ההתאמה ההפוכה $T^{-1}:\mathbb{C}_\infty \to \mathbb{S}$ מהמישור המרוכב המורחב לספרה היא

$$\begin{cases} T^{-1}(a+bi) &= \left(\frac{2a}{a^2+b^2+1},\ \frac{2b}{a^2+b^2+1},\ \frac{a^2+b^2-1}{a^2+b^2+1}\right) \\ T^{-1}(\infty) &= N(0,0,1) \end{cases}$$

יוצא שלאחר הוספת הנקודה ∞ למישור המרוכב, הוא הופך ממישור לכדור (ליתר דיוק שטח פני כדור: **סְפֵרָה**).

כל מודל חדש מאפשר לנו ללמוד דברים חדשים על שדה המספרים המרוכבים. מודל הספרה של רימן חושף בפנינו קשרים מעניינים בין מעגלים וישרים. נבדוק כיצד ההעתקה הטופולוגית בין הספרה של רימן למישור המרוכב פועלת על קבוצות שונות. למשל: מה תהיה התמונה של מעגל בספרה על המישור $\mathbb{C}_\infty$? מה תהיה התמונה של ישר במישור $\mathbb{C}_\infty$ בספרה של רימן?

מעגל על הספרה של רימן מתקבל על ידי חיתוך של מישור עם הספרה

$$\begin{cases} Ax+By+Cz=D \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases} \tag{4.13}$$

נסמן ב־σ את קבוצת הנקודות (x,y,z) המקיימות את המערכת (4.13). אזי מספר מרוכב $a+bi$ שייך לתמונה ההפוכה $T^{-1}[\sigma]$ אם ורק אם התמונה ההפוכה שלו

$$T^{-1}(a+bi)=\left(\frac{2a}{a^2+b^2+1},\ \frac{2b}{a^2+b^2+1},\ \frac{a^2+b^2-1}{a^2+b^2+1}\right)$$

מקיימת את המערכת (4.13). כלומר

$$\frac{2Aa}{a^2+b^2+1}+\frac{2Bb}{a^2+b^2+1}+\frac{C(a^2+b^2-1)}{a^2+b^2+1}=D$$

לאחר הכפלת שני האגפים בביטוי a^2+b^2+1 וסידור איברים נקבל

$$(C-D)(a^2+b^2)+2Aa+2Bb=C+D \tag{4.14}$$

נבחן את האפשרויות הבאות:

1. אם $C=D$ אז המשוואה (4.14) הופכת למשוואה כללית של ישר במישור המרוכב

$$Aa+Bb=2C,\quad (a+bi\in\mathbb{C}) \tag{4.15}$$

יש לשים לב לכך שהתנאי $C=D$ גורר שנקודת הקוטב הצפוני $N(0,0,1)$ מקיימת את משוואת המעגל (4.13)! לכן קיבלנו: כל מעגל על הספרה של רימן העובר דרך N הופך להיות ישר במישור המרוכב. במישור המורחב, תמונת המעגל הופכת לישר העובר דרך הראשית וגם כולל את הנקודה ∞ (שהיא התמונה של הקוטב $N(0,0,1)$).

2. אם $C\neq D$ אז המשוואה (4.14) היא משוואת מעגל במישור המרוכב. במקרה זה ברור כי המעגל (4.13) אינו עובר דרך הקוטב $N(0,0,1)$. לכן קיבלנו: כל מעגל על הספרה של רימן שאינו עובר דרך הקוטב N הופך להיות מעגל במישור המרוכב (שכמובן אינו כולל את הנקודה ∞).
3. אם $C=D=0$ אז המשוואה (4.14) הופכת למשוואת ישר שעובר דרך הראשית

$$Aa+Bb=0,\quad (a+bi\in\mathbb{C}) \tag{4.16}$$

התנאי $C=D=0$ גורר שנקודות הקוטב הצפוני והקוטב הדרומי מקיימות את משוואת המעגל (4.13)! לכן קיבלנו: כל מעגל על הספרה של רימן העובר דרך שני הקטבים, הופך להיות ישר במישור המרוכב שעובר דרך הראשית (כולל ∞).

בשני המקרים קיבלנו שמעגלים בספרה של רימן עוברים למעגלים או ישרים במישור המרוכב, ולכן לפעמים מתייחסים לישר במישור המרוכב בתור **מעגל במובן הרחב** או **מעגל מוכלל** . נסכם את התוצאות הללו בטענה הבאה.

הגדרה 4.12: ישר מוכלל במישור המורחב הוא כל ישר רגיל כשמצרפים אליו את נקודת האינסוף ∞. **מעגל מוכלל** במישור המורחב הוא כל מעגל רגיל או ישר מוכלל.

יש לשים לב לכך שמהגדרה 4.12 נובע שכל ישר מוכלל במרחב $\mathbb{C}_\infty$ הוא גם מעגל מוכלל! ניתן לדמיין את שני קרני הישר נפגשים במובן מופשט בנקודת האינסוף ויוצרים מעגל אינסופי. אבל יותר נכון להבין זאת בצורה טופלוגית: כשמפעילים את T^{-1} על ישר מוכלל מקבלים מעגל בספרה של רימן שעובר דרך הקוטב הצפוני. הקוטב הצפוני היא כאמור הנקודה על הספרה שמתאימה לנקודת האינסוף של $\mathbb{C}_\infty$.

טענה 4.20: ביחס לשקילות הטופולוגית $T:\mathbb{S}\to\mathbb{C}_\infty$, $T^{-1}:\mathbb{C}_\infty\to\mathbb{S}$

א. כל מעגל בספרה העובר דרך שני הקטבים, מועתק לישר מוכלל ב־$\mathbb{C}_\infty$ שעובר דרך הראשית.

ב. כל מעגל בספרה העובר דרך הקוטב הצפוני, מועתק לישר מוכלל ב־$\mathbb{C}_\infty$

ג. כל מעגל בספרה שלא עובר דרך הקוטב הצפוני, מועתק למעגל רגיל ב־$\mathbb{C}_\infty$.

ד. כל אחת מהטענות הקודמות נכונה גם בכיוון ההפוך.

4.6 העתקות מביוס (Möbius)

לאחר שלמדנו על הספרה של רימן נוכל להתקדם להעתקות מביוס הקרויות על שמו של המתמטיקאי **אוגוסט פרדיננד מביוס**



WIKIPEDIA August Ferdinand Möbius 1790–1868

להעתקות מביוס יש שימושים חשובים בתחומי עיבוד תמונה וקרטוגרפיה. הדרך הכי טובה להבין אותן היא על ידי הגדרתם מעל המישור המרוכב המורחב $\mathbb{C}_\infty$.

הגדרה 4.13: הצורה הכללית של **העתקת מביוס** $T:\mathbb{C}_\infty\to\mathbb{C}_\infty$ היא

$$T(z)=\frac{az+b}{cz+d},\qquad z\neq-\frac{d}{c},\infty$$

כאשר $a,b,c,d\in\mathbb{C}$ קבועים מרוכבים המקיימים $ad\neq bc$.

א. אם $c=0$, אז T פולינום ליניארי ב־$\mathbb{C}$, ובנקודת האינסוף $z=\infty$ נגדיר

$$T(\infty)=\lim_{z\to\infty}T(z)=\infty$$

ב. אם $c\neq0$, בנקודה $z=-\frac{d}{c}$ המכנה מתאפס, ולכן נגדיר לחוד

$$T\left(-\tfrac{d}{c}\right)=\lim_{z\to-\frac{d}{c}}T(z)=\infty$$

ובנקודה $z=\infty$ ההגדרה היא

$$T(\infty)=\lim_{z\to\infty}T(z)=\frac{a}{c}$$

ההגדרות של T בנקודה $z=-\frac{d}{c}$, ובנקודה $z=\infty$, הן בהתאם להגדרות הגבולות האינסופיים שסקרנו בסוף פרק 3. ראה הגדרות 3.6, 3.8, בעמודים 110-112.

אם $c\neq0$ אז T היא פונקציה רציונלית (מנה של פולינומים ליניאריים). אם $c=0$ אז T היא פולינום ליניארי. את הגבולות בהגדרה חישבנו כבר בטענות 3.18, 3.19 בסוף פרק 3.

התנאי $ad\neq bc$ מבטיח שזו לא העתקה קבועה (שאינה שייכת לעניין)[5]. סיבה נוספת לכך ניתן לראות בהוכחת הטענה הבאה.

[5] זה קורה כאשר $\frac{az+b}{cz+d}\equiv\lambda$. לכן $az+b=\lambda(cz+d)=\lambda cz+\lambda d$. מדובר בשוויון בין שני פולינומים ממעלה 1 ולכן המקדמים חייבים להיות שווים: $a=\lambda c$, $b=\lambda d$, כלומר $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$, ולכן $ad=bc$.

טענה 4.21: כל העתקת מביוס T היא העתקה קונפורמית מעל $\mathbb{C}$.

הוכחה: לכל $z \in \mathbb{C}$

$$T'(z) = \frac{a(cz+d) - (az+b)c}{(cz+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} \neq 0$$

קיבלנו כי $T'(z) \neq 0$ לכל $z \in \mathbb{C}$. לכן לפי משפט 4.19, T העתקה קונפורמית מעל $\mathbb{C}$. ∎

הכפלת הקבועים a, b, c, d, בקבוע $r \neq 0$ מניבה העתקת מביוס זהה

$$\frac{az+b}{cz+d} \equiv \frac{r(az+b)}{r(cz+d)}$$

ולכן נהוג "לנרמל" העתקת מביוס באמצעות הדרישה $ad-bc=1$. העתקת מביוס שמקדמיה מקיימים $ad-bc=1$ נקראת **מנורמלת** (או בעלת **צורה נורמלית**).

טענה 4.22: כל העתקת מביוס T היא העתקה חד-חד-ערכית ועל בין $\mathbb{C}_\infty$ ל-$\mathbb{C}_\infty$, וההעתקה ההפוכה T^{-1} גם היא העתקת מביוס.

הוכחה: יהי $z \in \mathbb{C}$. אם נחלץ את הנעלם w מהשוויון $z = \frac{aw+b}{cw+d}$ נקבל שלכל העתקת מביוס $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ יש העתקה הפוכה אשר גם היא העתקת מביוס:

$$T^{-1}(z) = \frac{dz-b}{-cz+a} \tag{4.17}$$

אם $c \neq 0$ אז $T^{-1}(a/c) = \infty$ ו- $T^{-1}(\infty) = -d/c$. אם $c=0$ אז $T^{-1}(\infty) = \infty$. נשאיר לתלמיד לברר את הפרטים. ∎

העתקה קונפורמית שהיא חד-חד-ערכית ועל בין מרחב לעצמו נקראת **אוטומורפיזם**. משני הטענות הקודמות נובע שכל העתקת מביוס היא אוטומורפיזם של $\mathbb{C}_\infty$.

טענה 4.23: הרכבה של שתי העתקות מביוס היא העתקת מביוס.

הוכחה: יהיו

$$T_1(z) = \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1}, \qquad T_2(z) = \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2}$$

שתי העתקות מביוס נתונות

$$T_1(T_2(z)) = \frac{a_1 \cdot \frac{a_2 z+b_2}{c_2 z+d_2} + b_1}{c_1 \cdot \frac{a_2 z+b_2}{c_2 z+d_2} + d_1} = \frac{a_1(a_2 z+b_2)+b_1(c_2 z+d_2)}{c_1(a_2 z+b_2)+d_1(c_2 z+d_2)}$$
$$= \frac{(a_1 a_2+b_1 c_2)z + a_1 b_2 + b_1 d_2}{(c_1 a_2+d_1 c_2)z + c_1 b_2 + d_1 d_2}$$

צורת הביטוי האחרון היא כמובן של העתקת מביוס. נשאיר לתלמיד לוודא ש־$T_1(T_2)$ מקבלת את הערכים הנכונים בנקודות $z=-\frac{d_2}{c_2}$, $z=\infty$. ∎

תוצאת ההרכבה $T_1(T_2)$ נראית דומה באופן מחשיד לכפל מטריצות

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 a_2+b_1 c_2 & a_1 b_2+b_1 d_2 \\ c_1 a_2+d_1 c_2 & c_1 b_2+d_1 d_2 \end{bmatrix}$$

ובנוסף המטריצה ההופכית של מקדמי העתקת מביוס

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

מניבה את מקדמי העתקת מביוס ההפוכה (אשר הדטרמיננטה שלה היא 1).

נסמן ע"י $\mathbf{Auto}(\mathbb{C}_\infty)$ את קבוצת כל העתקות מביוס על $\mathbb{C}_\infty$. לא קשה להוכיח כי לקבוצה זו יש מבנה אלגברי של חבורה תחת פעולות ההרכבה וההיפוך. איבר היחידה של $\mathbf{Auto}(\mathbb{C}_\infty)$ היא העתקת הזהות $T(z)$ שהיא כמובן העתקת מביוס אשר מקדמיה הם $a=1$, $b=c=0$, $d=1$, או בצורת מטריצה $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

תזכורת לגבי מושג החבורה כמבנה אלגברי מוצגת באיור 4.24 (לחץ על האיור בכדי לגשת לדף הויקיפדיה המתאים).

חבורה G היא מבנה אלגברי בסיסי הכולל קבוצה עם פעולה בינארית · ("סגורה": לכל $a,b \in G$ מתקיים ש־$a \cdot b \in G$), אשר מקיימת את התכונות הבאות:

- אסוציאטיביות (קיבוציות): לכל $a,b,c \in G$ מתקיים ש־$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.
- קיום איבר יחידה: קיים איבר $e \in G$ כך שלכל $a \in G$ מתקיים $a \cdot e = e \cdot a = a$.
- קיום איבר הופכי: לכל $a \in G$ קיים $b \in G$ כך ש־$a \cdot b = b \cdot a = e$.

(מהאקסיומות נובע שיש רק איבר יחידה אחד, ושלכל איבר יש הפכי אחד).

חבורה אבלית (חילופית) היא חבורה שבה מתקיים, בנוסף, תנאי הקומוטטיביות (חילופיות) $a \cdot b = b \cdot a$ לכל $a,b \in G$.

איור 4.24: הגדרת החבורה כמבנה אלגברי (ויקיפדיה)

אם נתאים לכל העתקת מביוס $T(z)=\frac{az+b}{cz+d}$ שמקדמיה מנורמלים ($ad-bc=1$) למטריצה $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ נקבל איזומורפיזם בין החבורה הליניארית (Special Linear Group)

$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})=\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2} \;\middle|\; ad-bc=1 \right\}$$

ובין חבורת האוטומורפיזמים $\mathrm{Auto}(\mathbb{C}_\infty)$. זוהי תוצאה מיידית משלושת הטענות שהוכחנו לעיל. נשאיר לתלמיד את הפרטים.

דוגמה 13: כדוגמאות ראשונות בנושא נציג את ארבעת **העתקות מביוס היסודיות**, אשר ניתן לבנות מהן (ע"י הרכבות) את כל שאר העתקות מביוס

טבלה 4.1: העתקות מביוס יסודיות

פעולה	Action	נוסחה
הזזה	translation	$z \longmapsto z+b$
סיבוב	rotation, $a=e^{i\alpha}$	$z \longmapsto az$
מתיחה או כיווץ	dilation, $r\in\mathbb{R}, r>0$	$z \longmapsto rz$
אינוורסיה (היפוך)	inversion	$z \longmapsto \frac{1}{z}$

טענה 4.24: כל העתקת מביוס ניתן לקבל כהרכבה של העתקות מביוס יסודיות.

הוכחה: תהי $T(z)=\frac{az+b}{cz+d}$ העתקת מביוס ($ad\neq bc$). נבדוק שני מקרים שונים.

א. אם $c=0$ אז בהכרח $d\neq 0$, ולכן נוכל לחלק את המונה והמכנה ב־d

$$T(z)=\frac{az+b}{d}=\frac{a}{d}z+\frac{b}{d}$$

תהי $re^{i\theta}=\frac{a}{d}$ ההצגה הקוטבית של $\frac{a}{d}$. אזי ההעתקה T מתקבלת על ידי שרשרת הפעולות הבאה

$$z \xrightarrow{\text{סיבוב}} e^{i\theta}z \xrightarrow{\text{מתיחה}} re^{i\theta}z=\frac{a}{d}z \xrightarrow{\text{הזזה}} \frac{a}{d}z+\frac{b}{d}=T(z)$$

ב. אם $c \neq 0$ אז נוכל לרשום

$$\begin{aligned} T(z) &= \frac{az+b}{cz+d} = \frac{\frac{a}{c}z+\frac{b}{c}}{z+\frac{d}{c}} \\ &= \frac{\frac{a}{c}\cdot\left(z+\frac{d}{c}\right)+\frac{b}{c}-\frac{ad}{c^2}}{z+\frac{d}{c}} = \frac{a}{c}+\frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{z+\frac{d}{c}} \\ &= p+\frac{q}{z+r} \end{aligned}$$

בשלב האחרון סימננו: $p=\frac{a}{c}$, $q=\frac{bc-ad}{c^2}$, $r=\frac{d}{c}$. לכן נוכל לרשום

$$T(z)=\frac{az+b}{cz+d}=p+\frac{q}{z+r}=p+\frac{|q|e^{i\theta}}{z+r}$$

כאשר $\theta=\operatorname{Arg}(q)$. לא קשה לזהות את הפעולות האלמנטריות המעורבות בביטוי האחרון

$$z \xrightarrow{\text{הזזה}} z+r \xrightarrow{\text{היפוך}} \frac{1}{z+r} \xrightarrow{\text{סיבוב}} \frac{e^{i\theta}}{z+r} \xrightarrow{\text{מתיחה}} \frac{|q|e^{i\theta}}{z+r}=\frac{q}{z+r} \xrightarrow{\text{הזזה}} p+\frac{q}{z+r}=T(z)$$

מסקנה 4.25: העתקה $T:\mathbb{C}_\infty\to\mathbb{C}_\infty$ היא העתקת מביוס אם ורק אם היא ליניארית $T(z)=az+b$, $a\neq 0$, או שהיא מהצורה

$$T(z)=p+\frac{q}{z+r} \tag{4.18}$$

עבור קבועים $p,q,r\in\mathbb{C}$, $q\neq 0$.

[1] יש כמובן להוסיף כי $T(-r)=\infty$, $T(\infty)=p$

[2] בספרים מסוימים ההגדרה של העתקת מביוס מתבססת על נוסחה (4.18)

התכונה הבאה של העתקת מביוס שנדון בה היא אופן הפעולה שלה על ישרים ומעגלים. קל להוכיח שפעולות ההזזה, סיבוב, מתיחה או כיווץ מעתיקים ישרים לישרים, ומעגלים למעגלים. נשאיר עובדה זו כתרגיל בית לתלמיד. לגבי פעולת ההיפוך (Inversion) $\frac{1}{z}$ המצב קצת יותר עדין:

טענה 4.26: תחת ההעתקה $T(z)=\frac{1}{z}$

א. כל ישר העובר דרך ראשית הצירים עובר לישר שגם הוא עובר דרך ראשית הצירים ואשר שיפועו הפוך.

ב. כל ישר שאינו עובר דרך ראשית הצירים עובר למעגל שעובר דרך ראשית הצירים.

ג. כל מעגל העובר דרך ראשית הצירים עובר לישר (שאינו עובר דרך הראשית).

ד. כל מעגל שאינו עובר דרך ראשית הצירים עובר למעגל שגם הוא לא עובר דרך הראשית.

הוכחה: חלק א' הוא ברור, ולכן נתמקד בחלקים האחרים בלבד. ניתן להוכיח טענה זו בדרכים שונות. הנה הוכחה מתוך הספר Complex Variables של R.B. Ash and W.P. Novinger, עמודים 79-80. ניתנה רשות המחברים להורידו מהקישור הבא:

Complex Variables, R.B. Ash and W.P. Novinger

ננסה להעביר את ההוכחה של אש ונובינגר לעברית קלה:

טענת עזר (משוואה קנונית של מעגל במישור $\mathbb{C}$): לכל מעגל L במישור $\mathbb{C}$ קיים קבוע מרוכב α וקבוע ממשי p כך ש־L הוא אוסף הנקודות במישור $\mathbb{C}$ המקיימות את המשוואה

$$z\overline{z} - \alpha\overline{z} - \overline{\alpha}z = p$$

הוכחת טענת העזר: יהי L מעגל כללי שמרכזו α ורדיוסו r

$$|z-\alpha|^2 = r^2$$

נוכל לרשום

$$(z-\alpha)(\overline{z}-\overline{\alpha}) = r^2$$

ולאחר פתיחת סוגריים וכינוס איברים נקבל

$$z\overline{z} - \alpha\overline{z} - \overline{\alpha}z = r^2 - |\alpha|^2$$

נסמן $p = r^2 - |\alpha|^2$. אזי p ממשי וקיבלנו

$$|z-\alpha|^2 = r^2 \iff z\overline{z} - \alpha\overline{z} - \overline{\alpha}z = p$$

ולכן המשוואה $z\overline{z} - \alpha\overline{z} - \overline{\alpha}z = p$ מתארת את המעגל L.

הכיוון השני ברור: לכל מרוכב α וממשי $p \geq 0$, המשוואה $z\overline{z} - \alpha\overline{z} - \overline{\alpha}z = p$ מתארת מעגל שרדיוסו הוא $r = \sqrt{p + |\alpha|^2}$ ומרכזו α. כל שנדרש הוא לחזור על הצעדים הקודמים מהסוף להתחלה ולקבל שהמשוואה מובילה למשוואה $|z-\alpha|^2 = r^2$. סוף הוכחת טענת העזר.

נחזור להוכחת הטענה המרכזית: מעגל L עובר דרך ראשית הצירים אם ורק אם $r = |\alpha|$.

כלומר אם"ם $p=0$. תחת ההעתקה $w=\frac{1}{z}$, המעגל L יעבור לקבוצה במישור-w שמשוואתה

$$\frac{1}{w}\cdot\frac{1}{\overline{w}}-\alpha\frac{1}{\overline{w}}-\frac{\overline{\alpha}}{w}=p \qquad (*)$$

נניח כי $p\neq 0$ (כלומר המעגל L אינו עובר דרך הראשית). נכפול את שני אגפי השוויון בביטוי $\frac{w\overline{w}}{p}$

$$1-\frac{\alpha}{p}w-\frac{\overline{\alpha}}{p}\overline{w}=w\overline{w}$$

נסמן $\beta=-\frac{\overline{\alpha}}{p}$ (נזכור כי p ממשי) ונקבל

$$w\overline{w}-\beta\overline{w}-\overline{\beta}w=1$$

קיבלנו משוואה קנונית של מעגל במישור-w אשר מרכזו הוא β ורדיוסו $r=\sqrt{1+\beta^2}$ (שאינו עובר דרך הראשית).

אם $p=0$ (L עובר דרך הראשית), אז לאחר הכפלת השוויון (*) ב־$w\overline{w}$ נקבל את המשוואה

$$1-\alpha w-\overline{\alpha w}=0$$

כלומר $\mathrm{Re}\,(\alpha w)=\frac{1}{2}$. אם נסמן $\alpha=a+bi$, $w=x+iy$, אז $\mathrm{Re}\,(\alpha w)=ax-by=\frac{1}{2}$.
קיבלנו משוואת ישר $a-by=\frac{1}{2}$ אשר אינו עובר דרך ראשית הצירים. ∎

משפט 4.27: העתקת מביוס מעתיקה מעגלים מוכללים למעגלים מוכללים.

הוכחה: על פי טענה 4.24, כל העתקת מביוס מתקבלת על ידי הרכבה של ההעתקות היסודיות: הזזה, סיבוב, מתיחה, והיפוך. קל להוכיח שפעולות הזזה, סיבוב, ומתיחה מעבירות מעגלים למעגלים, וישרים לישרים (ראה תרגיל מתאים בסוף הפרק). על פי הטענה הקודמת, פעולת ההיפוך מעתיקה ישרים ומעגלים לישרים ומעגלים. לכן ההרכבה של כל הפעולות תעביר מעגלים מוכללים למעגלים מוכללים. ∎

דוגמה 14: תהי $T(z)=\frac{z-i}{z+i}$.

א. הוכח כי T מעתיקה את ציר ה־x למעגל היחידה $|z|=1$.

ב. הוכח כי T מעתיקה את חצי המישור העליון $\mathrm{Im}\,(z)>0$ לעיגול היחידה $|z|<1$.

פתרון: א. קל לבדוק שעבור כל x ממשי

$$|T(x)|=\left|\frac{x-i}{x+i}\right|=\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}=1$$

ולכן ציר ה־x עובר למעגל היחידה $|z|=1$. גם נקודת האינסוף $x=\infty$ עוברת לנקודה $z=1$. בדיקה זו לא מוכיחה שנקודות אשר אינן על ציר-x אינן עוברות למעגל היחידה. לכן מומלץ להכיר שיטת פתרון נוספת.

פתרון שני: מאחר ו־T היא העתקת מביוס, על פי משפט 4.27 התמונה של ציר-x חייבת להיות קו ישר או מעגל. לכן בדיקת התמונה של שלוש נקודות על ציר-x תספיק בכדי למצוא את התמונה שלו תחת T. נבחר למשל בנקודות $x=-1,0,1$

$$\begin{aligned} T(-1) &= \tfrac{-1-i}{-1+i}=\tfrac{(-1-i)(-1-i)}{2}=\tfrac{2i}{2}=i \\ T(0) &= \tfrac{0-i}{0+i}=-1 \\ T(1) &= \tfrac{1-i}{1+i}=\tfrac{(1-i)(1-i)}{2}=\tfrac{-2i}{2}=-i \end{aligned}$$

שלושת הנקודות $z=i,-1,-i$ נמצאות על מעגל היחידה $|z|=1$ ולכן בהכרח התמונה של ציר ה־x היא מעגל היחידה[6]. החישוב גם מוכיח כי כיוון העתקת ציר-x למעגל היחידה הוא בניגוד לכיוון השעון. ניתן לבדוק כי הקטע $(-\infty,\infty)$ עובר לקבוצה $e^{i\theta}$, $0<\theta<2\pi$, באותו הסדר. הנקודה $x=\infty$ מועתקת לנקודה $z=1$.

ב. יספיק להוכיח שהחלק החיובי של הציר המדומה עובר לתוך עיגול היחידה $|z|<1$. תהי yi, $y>0$, נקודה על הציר המדומה החיובי. אזי

$$|T(yi)|=\left|\frac{yi-i}{yi+i}\right|=\left|\frac{y-1}{y+1}\right|<1$$

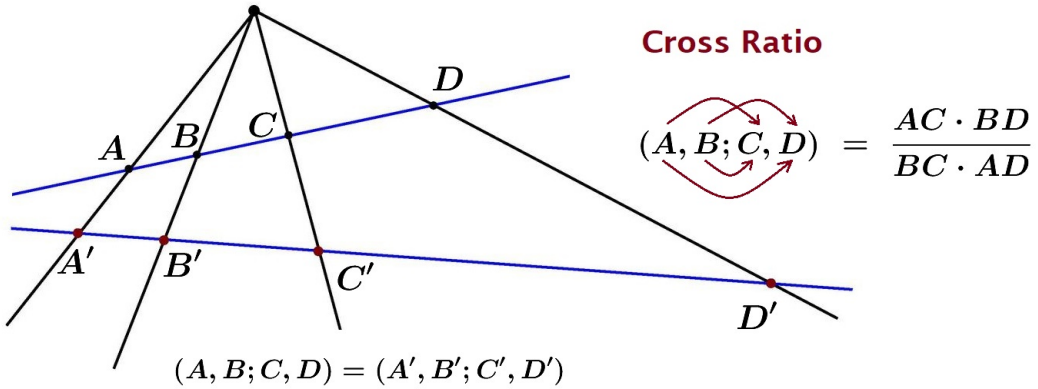
הסיבה לכך שבדיקה זו מספיקה היא שאם היתה נקודה $x+iy$, $y>0$, היא שעל פי טענה 3.16, התמונה של חצי המישור העליון חייבת להיות קשירה, ולכן חייבת להיות כלולה בתוך עיגול היחידה הפתוח (כי הציר המדומה העליון כבר עבר לשם).

שימור היחס הכפול

אחת מהתכונות החשובות של העתקת מביוס היא **שימור היחס הכפול**. מושג היחס הכפול מגיע מתחום הגאומטריה הפרוייקטיבית העוסקת בתכונות של היטלים. בשרטוט 4.25 מוצגת אחת מהתוצאות היסודיות של הגאומטריה הפרוייקטיבית: היחס הכפול נשמר תחת הטלה פרוייקטיבית. היחס הכפול בין ארבעה נקודות A, B, C, D, הנמצאות על ישר מישור (באותו הסדר) מוגדר על ידי $\frac{AC\cdot BD}{BC\cdot AD}$, ומסומן על ידי $(A,B;C,D)$. אם מטילים את ארבעת הנקודות האלה על ישר שני כפי שרואים בשרטוט 4.25 היחס נשמר.

אם נחליף את הנקודות A, B, C, D בארבעה מספרים מרוכבים **שונים** z_1, z_2, z_3, z_4,

[6] יש לדייק ולכלול בציר x את נקודת האינסוף $x=\infty$ שעוברת לנקודה $T(\infty)=\frac{\infty-i}{\infty+i}=1$



איור 4.25: המקור של היחס הכפול בתחום הגאומטריה הפרוייקטיבית שבבסיסה עומד משפט הגאומטרי המוצג בתרשים

אז נקבל

$$AC = z_1 - z_3, \quad BD = z_2 - z_4, \quad BC = z_2 - z_3, \quad AD = z_1 - z_4$$

ונקבל את ההגדרה של היחס הכפול בהקשר של העתקת מביוס

$$(A,B;C,D) = \frac{AC \cdot BD}{BC \cdot AD} = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_2 - z_3)(z_1 - z_4)} = (z_1, z_2; z_3, z_4)$$

במקרה המרוכב, הנקודות z_1, z_2, z_3, z_4, אינן חייבות להמצא על אותו ישר. בנוסף לזאת, אחת הנקודות עשויה להיות נקודת האינסוף ∞. במקרה כזה מתבצע צימצום בין המונה והמכנה. למשל אם $z_1 = \infty$, אז

$$(z_1, z_2; z_3, z_4) = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_2 - z_3)(z_1 - z_4)} = \frac{(\infty - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_2 - z_3)(\infty - z_4)} = \frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3}$$

טענה 4.28: תהי $T: \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ העתקת מביוס נתונה. לכל ארבע נקודות שונות $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}_\infty$ מתקיים השוויון

$$(T(z_1), T(z_2); T(z_3), T(z_4)) = (z_1, z_2; z_3, z_4)$$

כלומר העתקת מביוס **משמרת את היחס הכפול**.

הוכחה: על פי טענה 4.24, יספיק להוכיח שכל העתקת מביוס יסודית משמרת את היחס הכפול. מבחינה אינטואיטיבית ברור כי הזזה וסיבוב אינן משנות את המרחקים בין הנקודות z_1, z_2, z_3, z_4, ולכן היחס הכפול ביניהן נשמר. לגבי פעול המתיחה (או כיווץ) $T(z) = rz$,

$r \in \mathbb{R}$, $r \neq 0$, היחס בין המרחקים נשמר ולכן היחס הכפול נשמר

$$\begin{aligned}(T(z_1), T(z_2); T(z_3), T(z_4)) &= \frac{(T(z_1) - T(z_3))(T(z_2) - T(z_4))}{(T(z_2) - T(z_3))(T(z_1) - T(z_4))} \\ &= \frac{(rz_1 - rz_3)(rz_2 - rz_4)}{(rz_2 - rz_3)(rz_1 - rz_4)} \\ &= \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_2 - z_3)(z_1 - z_4)} = (z_1, z_2; z_3, z_4)\end{aligned}$$

נותר לנו להוכיח את הטענה עבור העתקת ההיפוך $T(z) = \frac{1}{z}$.

$$\begin{aligned}(T(z_1), T(z_2); T(z_3), T(z_4)) &= \frac{(T(z_1) - T(z_3))(T(z_2) - T(z_4))}{(T(z_2) - T(z_3))(T(z_1) - T(z_4))} \\ &= \frac{(\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_3})(\frac{1}{z_2} - \frac{1}{z_4})}{(\frac{1}{z_2} - \frac{1}{z_3})(\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_4})} = \frac{\frac{z_3 - z_1}{z_1 z_3} \cdot \frac{z_4 - z_2}{z_2 z_4}}{\frac{z_3 - z_2}{z_2 z_3} \cdot \frac{z_4 - z_1}{z_1 z_4}} \\ &= \frac{(z_3 - z_1)(z_4 - z_2)}{(z_3 - z_2)(z_4 - z_1)} = (z_1, z_2; z_3, z_4)\end{aligned}$$

מאחר וכל העתקת מביוס מתקבלת כהרכבה של ארבעת ההעתקות היסודיות, הרי שהיא גם משמרת יחס כפול. ∎

משפט 4.29: עבור כל שלוש נקודות שונות $z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}_\infty$, ועבור כל שלוש נקודות שונות $w_2, w_3, w_4 \in \mathbb{C}_\infty$, קיימת העתקת מביוס אחת ויחידה $T: \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ המקיימת $T(z_2) = w_2$, $T(z_3) = w_3$, $T(z_4) = w_4$.

הוכחה: בהנחה שקיימת העתקה T כזו היא חייבת לקיים את טענה 4.28. לכל $z \in \mathbb{C}_\infty$

$$(z, z_2; z_3, z_4) = (T(z), T(z_2); T(z_3), T(z_4)) = (T(z), w_2; w_3, w_4)$$

השוויון מאפשר לנו לקבל משוואה שמתוכה ניתן לחלץ את $T(z)$

$$(T(z), w_2; w_3, w_4) = \frac{(T(z) - w_3)(w_2 - w_4)}{(w_2 - w_3)(w_1 - w_4)} = \frac{(z - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_2 - z_3)(z - z_4)}$$

ומכאן קל לקבל

$$T(z) = w_3 + \frac{(z - z_3)(z_2 - z_4)(w_2 - w_3)(w_1 - w_4)}{(z_2 - z_3)(z - z_4)(w_2 - w_4)}$$

נסמן

$$p=\frac{(z_2-z_4)(w_2-w_3)(w_1-w_4)}{(z_2-z_3)(w_2-w_4)}$$

זהו מספר קבוע שאינו קשור למשתנה z, ולכן

$$T(z)=w_3+\frac{p(z-z_3)}{z-z_4}=\frac{(p+w_3)z-(pz_3+w_3z_4)}{z-z_4}$$

על פי צורת אגף ימין ברור כי זוהי העתקת מביוס. ∎

מבחינה מעשית הדרך הכי פשוטה וקלה לזכירה בכדי למצוא את T היא על ידי חילוץ המשתנה w מהנוסחה הבאה

$$(z,z_2;z_3,z_4)=(w,w_2;w_3,w_4) \tag{4.19}$$

או בצורה היותר מפורשת

$$\frac{(z-z_3)(z_2-z_4)}{(z_2-z_3)(z-z_4)}=\frac{(w-w_3)(w_2-w_4)}{(w_2-w_3)(w-w_4)} \tag{4.20}$$

דוגמה 15: מצא העתקת מביוס שמעתיקה את הציר המדומה למעגל $|z-5|=1$.

פתרון: נבחר בשלוש נקודות על הציר המדומה: $z_2=-i$, $z_3=0$, $z_4=i$, ושלוש נקודות על המעגל $|z-5|=1$: $w_2=4$, $w_3=5+i$, $w_4=6$, ונשתמש בנוסחה (4.20)

$$\frac{(z-0)(-i-i)}{(-i-0)(z-i)}=\frac{(w-(5+i))(4-6)}{(4-(5+i))(w-6)}$$

לאחר פישוט נקבל

$$\frac{2iz}{iz+1}=\frac{-2w+10+2i}{-(1+i)w+6+6i}$$

ולאחר החילוץ של w נקבל

$$w=T(z)=\frac{(5-i)z+5+i}{z+1}$$

מומלץ לבדוק כי $T(-i)=4$, $T(0)=5+i$, $T(i)=6$.

למשתמשי שפת התיכנות Python מומלץ להשתמש בחבילה Sympy בכדי לוודא כי קיבלנו

© Samy Zafrany (mail@samyzaf.com)

את התוצאה הנכונה

```
from sympy import *
z = Symbol("z", complex=True)
w = Symbol("w", complex=True)
eqn = (-2*w+10+2*I)/(-(1+I)*w+6+6*I) - (2*I*z)/(z*I +1)
solve(eqn, w)
=> [(5*z - I*z + 5 + I)/(z + 1)]
```

ניתן כמובן להשתמש גם בתוכנת Matlab או Mathematica למטרה זו.

דוגמה 16: דרך נוספת לפתור את הבעייה הקודמת היא על ידי בחירה יותר "חכמה" של נקודות שעשויה לכלול גם את נקודת האינסוף. נבחר למשל בשלוש נקודות על הציר המדומה: $z_2=0$, $z_3=i$, $z_4=\infty$, ושלוש נקודות על המעגל $|z-5|=1$: $w_2=4$, $w_3=5+i$, $w_4=6$, ונשתמש שוב בנוסחה (4.20)

$$\frac{(z-i)(0-\infty)}{(0-i)(z-\infty)}=\frac{(w-(5+i))(4-6)}{(4-(5+i))(w-6)}$$

לאחר פישוט נקבל

$$iz+1=\frac{-2w+10+2i}{-(1+i)w+6+6i}$$

שהיא קלה יותר לתימרון מהדוגמה הקודמת. לאחר חילוץ w נקבל

$$w=T(z)=\frac{6z+4}{z+1}=6-\frac{2}{z+1}$$

זוהי כמובן העתקה שונה מזו שקיבלנו בדוגמה הקודמת מאחר ובחירות נקודות ההתאמה היא שונה, אך כמובן מבצעת את המשימה הדרושה: T מעבירה את הציר המדומה למעגל $|z-5|=1$.

דוגמה 17: מהו המקום הגאומטרי של כל הנקודות המקיימות את המשוואה

$$\left|\frac{z-3}{z+3}\right|=2$$

פתרון: מדובר בתמונה הפוכה של העתקת מביוס $T(z)=\frac{z-3}{z+3}$ של המעגל $|z|=2$. על פי טענה 4.22, T חד-חד-ערכית וההופכית שלה גם היא העתקת מביוס. על פי נוסחה (4.17)

$$T(z)=\frac{az+b}{cz+d}\implies T^{-1}(z)=\frac{dz-b}{-cz+a}$$

לכן במקרה שלנו ההעתקה ההפוכה היא

$$T^{-1}(z)=\frac{3z+3}{-z+1}$$

על פי משפט 4.27 התמונה של המעגל $|z|=2$ תחת T^{-1} צריכה להיות מעגל או ישר מוכלל. לכן תספיק בדיקה של שלוש נקודות שונות על המעגל $|z|=2$ בכדי לקבוע. נציב למשל את הנקודות $z=2,-2,2i$ ונקבל

$$T^{-1}(2)=-9,\quad T^{-1}(-2)=-1,\quad T^{-1}(2i)=-1.8+2.4i$$

רואים מייד שמדובר במעגל. שלושת הנקודות יוצרות משולש ישר זווית שהיתר שלו הוא הקטע $(-9,-1)$. לכן משוואת המעגל היא $|z+5|=4$.

4.7 קישורים למקורות ברשת האינטרנט

קישורים למקורות בנושאי גזירות והעתקות קונפורמיות

להעתקות קונפורמיות יש שימושים קלאסיים בתחום הקרטוגרפיה (מפות גאוגרפיות ומיפוי שטחים). כזכור, הייצוג הגאומטרי של המספרים המרוכבים באמצעות המישור הממשי הוצע על ידי המתמטיקאי והקרטוגרף הבלגי Caspar Wessel (1745-1818). להעתקות קונפורמיות יש שימושים שונים בפיזיקה, בגרפיקה ממוחשבת, ולאחרונה גם בנושאים כמו זיהוי תבניות וזיהוי פנים (הקישור הראשון להרצאה של פרופסור ירון ליפמן).

- What does it mean to take a complex derivative? (visually explained)
- But what is the Riemann zeta function? Visualizing analytic continuation
- A Few Applications of Conformal Mappings for Surface Comparison — Prof. Yaron Lipman
- Obama deformed by holomorphic complex functions (conformal map)
- Complex Analysis 02: Mappings
- 232 Application of conformal mapping
- Mercator projection
- What is the best way to explain conformal mapping?
- Conformal Mapping and its Applications

קישורים למקורות בנושא הספרה של רימן

- Stereographic projection of Riemann sphere
- Mapping Lines and Circles onto the Riemann Sphere 1
- Mapping Lines and Circles onto the Riemann Sphere 2
- Möbius Transformations Revealed [HD]
- 1/z map, part 1/2
- 1/z map, part 2/2

תרגילים לפרק 4

1. הוכח: אם $f(z)$, $g(z)$ אנליטיות בתחום S, ואם $\mathrm{Re}\,(f(z)) = \mathrm{Re}\,(g(z))$ בכל נקודה של S, אז קיים קבוע C כך ש־$f(z) = g(z) + C$ בכל S. במילים אחרות: פונקציה אנליטית נקבעת עד כדי קבוע על ידי החלק הממשי שלה.

2. מצא פונקציה $f(z)$ רציפה על כל $\mathbb{C}$ אך גזירה רק על הישר $y = x$.

הדרכה: $u = x^2$, $v = y^2$

3. אם $f: S \to \mathbb{C}$ פונקציה אנליטית מעל תחום S המקבלת ערכים ממשיים בלבד, אז f היא פונקציה קבועה.

הדרכה: נרשום $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. על פי הנתון $v(x,y) = 0$ בכל נקודה $x + iy \in S$. לכן $v_x = v_y = 0$. ממשוואות קושי-רימן נקבל גם $u_x = u_y = 0$.

4. חשב את נגזרת הפונקציה $f(z) = \mathrm{Log}\,(iz^2 + 3)$ ומצא את תחום האנליטיות שלה.

5. מצא את התחום המקסימלי שבו הפונקציה $f(z) = \mathrm{Log}\,(1 - z^n)$ אנליטית, כאשר $n \geq 1$ מספר טבעי.

6. תהי $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ פונקציה שלמה המקיימת $u_y - v_x = -2$ עבור כל $z \in \mathbb{C}$. הוכח כי f היא פונקציה ליניארית (כלומר מהצורה $az + b$).

7. מהם הערכים של a, b, c אשר עבורם הפונקציה $f(z) = a(x^2 + y^2) + ibxy + c$ אנליטית על כל המישור המרוכב?

8. על ידי שימוש במשוואות קושי-רימן מצא איפיון של כל הפונקציות השלמות המקיימות $\mathrm{Re}\,(f'(z)) = 0$.

9. הוכח כי הפונקציה

$$f(z)=\begin{cases}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{xyi}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

מקיימת את משוואת קושי-רימן בנקודה $z=0$ אך f אינה גזירה בנקודה זו.

10. תהי $f(z)$ פונקציה שלמה. הוכח כי הפונקציה $g(z)=\overline{z}f(z)$ גזירה בנקודה z אם ורק אם $f(z)=0$.

11. בדוק האם הפונקציה הבאה גזירה בנקודה $z=0$

$$f(z)=\begin{cases}z\sin\frac{1}{|z|}, & z\neq 0\\ 0, & z=0\end{cases}$$

12. עבור כל אחת מהפונקציות הבאות, מצא את כל הנקודות בהן היא אנליטית, ואת כל הנקודות שבהן היא גזירה אך אינה אנליטית

א. $f(z)=|z|^2$ **ב.** $f(z)=z^2+\overline{z}$ **ג.** $f(z)=2xy+i(x^2-y^2)$

ד. $f(z)=2|z|^2+i\overline{z}^2$ **ה.** $f(z)=\cos|z|+i\sin|z|$ **ו.** $f(z)=\frac{z}{1+|z|^2}$

13. הוכח כי לא קיימת פונקציה אנליטית $f(z)$ המקיימת $\mathrm{Re}\,(f)=xy^2$.

14. מצא את כל פונקציות האנליטיות $f(z)$ המקיימות $[\mathrm{Re}\,(f)]^2=\mathrm{Im}\,(f)$.

15. תהי $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ פונקציה אנליטית המקיימת $v(x,y)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}\sin y$, $f(0)=0$. מצא את f.

16. מצא פונקציה אנליטית $f(z)$ המקיימת $\mathrm{Re}\,(f)=xy+\frac{x}{x^2+y^2}$.

17. תהי $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ פונקציה אנליטית אשר החלק הממשי שלה $u=e^{\lambda x}\cos y$. מצא את כל הערכים של λ אשר עבורם u היא פונקציה הרמונית. מה תהיה ההרמונית המשלימה של u?

18. תהי $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ פונקציה אנליטית בתחום פשוט קשר D. הוכח שמשפחת קווי הגובה של u אורתוגונלית למשפחת קווי הגובה של v.

הדרכה: קווי הגובה של u הם העקומים הנתונים בצורה סתומה על ידי $u(x,y)=C$, לכל קבוע ממשי C. יש להראות שכל עקום $u(x,y)=C_1$ ניצב לכל עקום $v(x,y)=C_2$ בכל נקודת חיתוך ביניהם. יספיק להוכיח שמכפלת הגרדיאנטים (מכפלה פנימית!) מתאפסת. כזכור הגרדיאנט הוא $\vec{\nabla}u=(u_x,u_y)$.



19. תהי $f(z)$ פונקציה אנליטית מעל תחום D. ידוע כי התמונה שלה $f(D)$ כלולה בתוך ישר. הוכח כי f פונקציה קבועה.



20. מהי הפונקציה ההרמונית הכללית ביותר שצורתה $ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3$.

21. בדוק אם הפונקציה הממשית הבאה היא הרמונית, ואם כן, מצא את ההרמונית הצמודה שלה

$$u(x,y)=\sin x\cdot\cosh y+2\cos x\cdot\sinh y+x^2-y^2+2xy$$

הדרכה: נוסחה סטנדרטית לחישוב הרמונית צמודה: $v(x,y)=\int_0^y u_x(x,t)dt-\int_0^x u_y(s,0)ds$. או לחלופין, ניתן להגיע להרמונית הצמודה על ידי שימוש במשוואות קושי-רימן.

22. עבור שוב על טבלת העתקות מביוס היסודיות (טבלה 4.1 בעמוד 163) והוכח באופן פורמלי כי פעולות ההזזה, סיבוב, ומתיחה, מעבירות ישרים לישרים, ומעגלים למעגלים.



23. תהי $T(z)=\frac{az+b}{cz+d}$ העתקת מביוס נתונה. נקודה z נקראת **נקודת שבת (Fixed Point)** של T אם $T(z)=z$. הוכח כי לכל העתקת מביוס יש לכל היותר שתי נקודות שבת שונות ומצא את הנוסחה לחישובן.

24. מצא העתקת מביוס שמעבירה את הישר הממשי לעיגול היחידה $|z|=1$.

25. מצא העתקת מביוס שמעבירה את מעגל היחידה לעצמו ואת הנקודה 0 ל־$\frac{1}{2}$.

26. מצא העתקת מביוס שמעבירה את עיגול היחידה $|z|<1$ לחצי המישור הבא

$$S=\{\,x+iy:\ x+y>0\,\}$$

27. נתונה העתקת מביוס $T(z)=\frac{z+1}{z-1}$. מצא את התמונה של הציר הממשי, הציר המדומה, ומעגל היחידה $|z|=1$ תחת T. מהי התמונה של עיגול היחידה $|z|<1$ תחת T?

רמז: בדוק מהי תמונת מעגל היחידה $|z|=1$, ולאחר מכן בדוק לאן הולכת הנקודה $z=0$?

28. מצא העתקת מביוס שמעתיקה את המעגל $|z|=2$ למעגל $|z+1|=1$, את הנקודה $z=-2$ לנקודה $z=0$, ואת הנקודה $z=0$ לנקודה $z=i$.



29. מצא איפיון אלגברי פשוט ככל האפשר של כל העתקות מביוס שמעתיקות את הישר הממשי לעצמו. הוכח שכל העתקת מביוס שמעתיקה את הציר הממשי לעצמו ניתן לבטא באמצעות מקדמים ממשיים בלבד.

הדרכה: למען הדיוק יש לדרוש $T(\mathbb{R}_\infty)=\mathbb{R}_\infty$, כאשר $\mathbb{R}_\infty$ הוא הציר הממשי כולל נקודת האינסוף. אבל זה נגרר מהרציפות של T.

30. מצא איפיון אלגברי פשוט ככל האפשר של כל העתקות מביוס שמעתיקות את חצי המישור העליון לעצמו.

31. מצא איפיון אלגברי פשוט ככל האפשר של כל העתקות מביוס שמעתיקות את מעגל היחידה לעצמו.

רמז: T מתאפיינת על ידי התנאי $T(z)\overline{T(z)}=1 \implies z\bar{z}=1$.

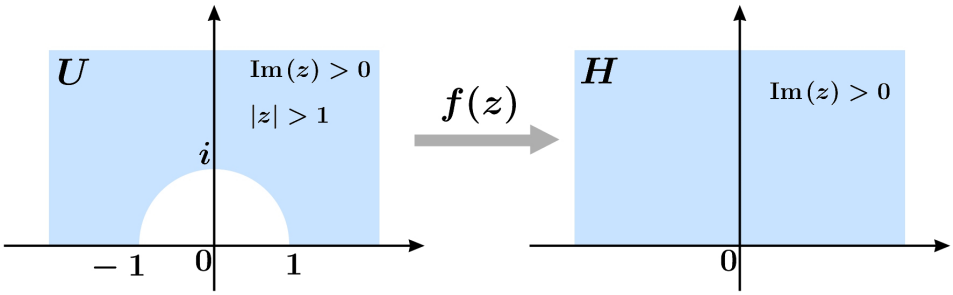
32. הוכח כי הפונקציה $f(z)=z|z|$ היא העתקה קונפורמית בנקודה $z=0$ למרות ש־$f'(0)=0$. האם זה עומד בסתירה לטענה 4.18?

33. מצא העתקה קונפורמית $f(z)$ שמעתיקה את הקבוצה

$$U=\{\,z\in\mathbb{C}:\ \operatorname{Im}(z)>0 \text{ and } |z|>1\,\}$$

לחצי המישור העליון $H:\ \operatorname{Im}(z)>0$ (ראה שרטוט 4.26).

הצעה: נסה לבנות העתקת מביוס שמעבירה את הציר הממשי לעצמו ואת מעגל היחידה לציר המדומה.



איור 4.26: שרטוט עזר לתרגיל 33

34. יהי n מספר טבעי חיובי. מצא העתקה קונפורמית שמעתיקה את הגיזרה $0<\operatorname{Arg}(z)<\frac{\pi}{n}$ על עיגול היחידה $|z|<1$.

35. בנה העתקה אנליטית וחד-חד-ערכית מהחצי הימני של עיגול היחידה $|z|<1,\ \operatorname{Re}(z)>0$, לעיגול היחידה המלא $|z|<1$.

הדרכה: יש לפעול בשלבים. בשלב ראשון נזכור כי ההעתקה $T_1(z)=iz$ מעתיקה את החצי הימני של העיגול לחצי העליון. (כזכור מהפרק הראשון, הכפלה ב־i שקולה לסיבוב של $90°$!). בשלב השני הראה כי העתקת מביוס $T_2(z)=\frac{1+z}{1-z}$ מעבירה את חצי העיגול העליון לרביע הראשון של המישור המרוכב (פתור קודם את תרגיל 27). ההעתקה $T_3(z)=z^2$ מעבירה את הרביע הראשון לחצי המישור העליון, ולבסוף ההעתקה $T_4(z)=\frac{z-i}{z+i}$ היא איזומורפיזם מחצי המישור העליון לעיגול היחידה (ראה דוגמה 14).

36. הוכח או הפרך:

א. אם $f(z)$ פונקציה אנליטית בתחום D, אז גם $\overline{f(z)}$ אנליטית ב־D.

ב. קיימת העתקת מביוס שמעתיקה את הרבעון הראשון הפתוח על העיגול $|z|<1$.

ג. הפונקציה $e^{i\mathrm{Re}(z)}$ אינה גזירה בשום נקודה.

ד. קיימת העתקה קונפורמית מהרצועה $0<\mathrm{Re}\,(z)<\pi$ לחצי המישור העליון $\mathrm{Im}\,(z)>0$.

ה. קיימת העתקה קונפורמית מהרצועה $0<\mathrm{Im}\,(z)<\pi$ לעיגול היחידה $|z|<1$.

ו. אם $f(z)$ פונקציה אנליטית בתחום D, אז גם $\overline{f(\overline{z})}$ אנליטית ב־D.

ז. אם $f(z)$ פונקציה שלמה, ואם $f'(z)\neq 0$ לכל $z\in\mathbb{C}$, אז f חד-חד-ערכית.



37. פונקציה אנליטית $f(z)$ בתחום D נקראת **ענף אנליטי של** $\log$ **בתחום** D אם $e^{f(z)}=z$ לכל $z\in D$. הוכח את ארבעת הטענות הבאות

א. אם D הוא עיגול פתוח כלשהו שאינו מכיל את הנקודה $z=0$, אז קיים ענף אנליטי של $\log$ מעל D.

ב. אם L היא קרן היוצאת מהנקודה $z=0$, אז קיים ענף אנליטי של $\log$ מעל $\mathbb{C}-L$.

ג. אם D תחום שמכיל את המעגל $|z|=1$, אז לא קיים ענף אנליטי של $\log$ מעל D.

ד. אם $g(z)$ פונקציה רציפה בתחום D, המקיימת $e^{g(z)}=z$, לכל $z\in D$, אז g היא בהכרח פונקציה אנליטית ב־D, ולכן בהכרח g היא ענף אנליטי של $\log$ בתחום D.



38. יהיו D תחום פשוט קשר, $f(z)$ פונקציה אנליטית ב־D, $r>0$ מספר ממשי נתון.

א. הוכח כי הקבוצה $S_r=\{\,z\in D:\ |f(z)|<r\,\}$ היא קבוצה פתוחה.

ב. הוכח כי כל מרכיב קשירות של S_r הוא תחום פשוט קשר.



39. יהיו $f(z)$, $g(z)$, שתי פונקציות אנליטיות בתחום D. נתון כי לכל $z\in D$

$$|f(z)|^2+|g(z)|^2=1$$

הוכח כי שתי הפונקציות $f(z)$, $g(z)$, קבועות ב־D.

קישור לפתרונות

פרק 5

אינטגרציה

כמו בחשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי של המספרים הממשיים, גם לפונקציות מרוכבות יש פעולת אינטגרציה וכמה משפטים עמוקים, אלגנטיים, ובעלי שימושים חשובים בתחומים רבים ומגוונים.

5.1 אינטגרציה של פונקציה מרוכבת מעל קטע ממשי

- נתחיל עם הכללה פשוטה של האינטגרל המסוים לאורך קטע ממשי המוכר לנו מחדו"א 1: $\int_a^b f(t)\,dt$, כאשר $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה ממשית.
- אם $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ היא פונקציה מרוכבת אז כמובן יש לה הצגה קרטזית

$$f(t)=x(t)+iy(t)$$

כאשר $x(t)$, $y(t)$ פונקציות ממשיות מעל הקטע $[a,b]$.

הגדרה 5.1: תהי $f:[a,b]\to\mathbb{C}$, $f(t)=x(t)+iy(t)$. נאמר כי f **אינטגרבילית**[1] **מעל הקטע** $[a,b]$, אם הפונקציות הממשיות $x(t)$, $y(t)$ אינטגרביליות מעל הקטע $[a,b]$. האינטגרל של f מעל $[a,b]$ מוגדר על ידי

$$\int_a^b f(t)\,dt=\int_a^b x(t)\,dt+i\int_a^b y(t)\,dt$$

[1] במובן של רימן (Riemann). יש גם אינטגרביליות במובן של לבג (Lebesgue) שנלמד בקורסים יותר מתקדמים של אנליזה מתימטית.

דוגמה 1: חשב את הערך של $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{it}dt$

פתרון:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{it}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\cos t + i \sin t]dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\, dt + i \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\, dt = 1 + i$$

לאור הרדוקציה הפשוטה לשני אינטגרלים ממשיים, רוב משפטי האינטגרל המסוים המוכרים לנו מחדו"א 1 נכונים אוטומטית גם עבור האינטגרל המרוכב מעל קטע. לא נטרח להוכיח את הנוסחאות הבאות, ונשאיר לתלמיד לבדוק את הפרטים.

משפט 5.1: אם $f(t)$, $g(t)$, שתי פונקציות אינטגרביליות מעל הקטע $[a,b]$ אז

$$\int_a^b [f(t) \pm g(t)]dt = \int_a^b f(t)\, dt \pm \int_a^b g(t)\, dt \tag{5.1}$$

$$\int_a^b cf(t)\, dt = c\int_a^b f(t)\, dt \tag{5.2}$$

$$F'(t) = f(t) \quad \Longrightarrow \quad \int_a^b f(t)\, dt = F(b) - F(a) \tag{5.3}$$

$$F(t) = \int_a^t f(s)\, ds \quad \Longrightarrow \quad F'(t) = f(t) \tag{5.4}$$

[3] הנוסחה השלישית היא המשפט היסודי של החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי.

[4] הנוסחה הרביעית היא נוסחת ניוטון-לייבניץ.

הוכחה: נסתפק בהוכחת נוסחה (5.2) בלבד. הוכחת שאר הנוסחאות דומה לחלוטין. על פי הנתון, $f(t) = x(t) + iy(t)$, כאשר $x(t)$, $y(t)$, פונקציות ממשיות אינטגרביליות מעל הקטע $[a,b]$. לכן על פי משפטי אינטגרציה מהקורס חדו"א 1

$$\begin{aligned}\int_a^b cf(t)\, dt &= \int_a^b c[x(t) + iy(t)]\, dt = \int_a^b cx(t)\, dt + i\int_a^b cy(t)\, dt \\ &= c\int_a^b x(t)\, dt + ic\int_a^b y(t)\, dt = c\left[\int_a^b x(t)\, dt + i\int_a^b y(t)\, dt\right] \\ &= c\int_a^b f(t)\, dt\end{aligned}$$

האי-שוויון הבא יהיה שימושי מאוד לשם הערכת גודל אינטגרל של פונקציה מרוכבת. הוא אינו נובע מהמקבילה הממשית ולכן דורש בדיקה והוכחה מתאימה.

משפט 5.2: (אי-שוויון משולש אינטגרלי) אם f פונקציה אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ אזי

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \le \int_a^b |f(t)|dt \le (b-a)\cdot \underset{a\le t\le b}{\mathrm{Max}}|f(t)| \tag{5.5}$$

הוכחה: נרשום $f(t)=x(t)+iy(t)$, כאשר $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ פונקציה רציפה נתונה. תהי $\mathcal{P}$ חלוקה של הקטע $[a,b]$

$$a=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_{n-1}<t_n=b$$

יהי $\Delta(\mathcal{P})$ הפרמטר של החלוקה $\mathcal{P}$,

$$\Delta(\mathcal{P})=\mathrm{Max}\{\Delta t_0,\ \Delta t_1,\ \Delta t_2,\ \ldots,\ \Delta t_{n-1}\}$$

לכל $k=0,1,2,\ldots,n-1$, תהי $\hat{t}_k$ נקודה שרירותית בקטע $\Delta t_k=[t_k,t_{k+1}]$

$$t_k\le \hat{t}_k\le t_{k+1}$$

הסכום רימן המתאים לחלוקה $\mathcal{P}$ מוגדר על ידי

$$\mathcal{S}(\mathcal{P})=\sum_{k=0}^{n-1} f(\hat{t}_k)\cdot\Delta t_k=\sum_{k=0}^{n-1}[x(\hat{t}_k)+iy(\hat{t}_k)]\cdot\Delta t_k$$

על ידי פירוק $\mathcal{S}(\mathcal{P})$ לשני סכומים אינטגרליים ניתן להוכיח כי $f(t)$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ אם ורק אם קיים הגבול

$$\int_a^b f(t)dt=\lim_{\Delta(\mathcal{P})\to 0}\mathcal{S}(\mathcal{P})=\lim_{\Delta(\mathcal{P})\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} f(\hat{t}_k)\cdot\Delta t_k$$

על פי אי-שוויון המשולש

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=0}^{n-1} f(\hat{t}_k)\cdot\Delta t_k\right| &= \left|f(\hat{t}_0)\cdot\Delta t_1+f(\hat{t}_1)\cdot\Delta t_1+\cdots+f(\hat{t}_{n-1})\cdot\Delta t_{n-1}\right|\\ &\le \left|f(\hat{t}_0)\right|\cdot\Delta t_1+\left|f(\hat{t}_1)\right|\cdot\Delta t_1+\cdots+\left|f(\hat{t}_{n-1})\right|\cdot\Delta t_{n-1}\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\left|f(\hat{t}_k)\right|\cdot\Delta t_k\end{aligned}$$

קיבלנו בצד ימין את הסכום רימן של הפונקציה **<u>הממשית</u>** $|f(t)|$ מעל הקטע $[a,b]$. על

סמך הנתון ש־ $f(t)$ רציפה, גם $|f(t)|$ רציפה, ולכן אינטגרבילית. לכן

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| = \lim_{\Delta(\mathcal{P})\to 0}\left|\sum_{k=0}^{n-1} f(\hat{t}_k)\cdot\Delta t_k\right| \le \lim_{\Delta(\mathcal{P})\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}\left|f(\hat{t}_k)\right|\cdot\Delta t_k = \int_a^b |f(t)|dt$$

נסמן $M = \mathrm{Max}_{a\le t\le b}|f(t)|$. אזי M הוא חסם עליון של הפונקציה <u>הממשית</u> $|f(t)|$ בקטע $[a,b]$, ולכן על פי משפט מתאים של חדו"א 1: $\int_a^b |f(t)|dt \le M(b-a)$. ∎

שתי הוכחות נוספות שמתבססות על אי-שוויון קושי-שוורץ וטכניקת מודול ניתן לקרוא בשני הקישורים הבאים

Absolute Value of Complex Integral

Modulus of Complex Integral

אורך מסלול

אחת הנוסחאות הראשונות שלומדים בקורס חדו"א 2 היא נוסחת האורך של מסלול חלק $\boldsymbol{\sigma}:[a,b]\to\mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{\sigma}(t) = (x(t),y(t))$

$$\ell(\boldsymbol{\sigma}) = \int_a^b |\boldsymbol{\sigma}'(t)|dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt$$

כאשר $\ell(\boldsymbol{\sigma})$ מציין את אורך המסלול $\boldsymbol{\sigma}$. מאחר ומבחינתנו $\mathbb{R}^2$ הוא מודל עבור קבוצת המספרים המרוכבים, אין למעשה הבדל מהותי בין המסלול $\boldsymbol{\sigma}(t) = (x(t),y(t))$ למסלול $\boldsymbol{\sigma}(t) = x(t)+iy(t)$. אם $\boldsymbol{\sigma}$ מסלול חלק למקוטעין, יש לסכום את אורכי המסלולים החלקים שמרכיבים אותו.

דוגמה 2: חשב את אורך הספירלה $\boldsymbol{\sigma}(t) = te^{it}$, $0\le t\le 2\pi$.

פתרון:

$$\begin{aligned}
\ell(\boldsymbol{\sigma}) &= \int_0^{2\pi}|\boldsymbol{\sigma}'(t)|\,dt = \int_0^{2\pi}\left|e^{it}+ite^{it}\right|dt \\
&= \int_0^{2\pi}\left|e^{it}\right||1+it|\,dt = \int_0^{2\pi}|1+it|\,dt \\
&= \int_0^{2\pi}\sqrt{1+t^2}\,dt = \frac{t\sqrt{1+t^2}}{2}+\frac{\ln\left|t+\sqrt{1+t^2}\right|}{2}\Bigg|_0^{2\pi} \\
&= \frac{\sqrt{1+4\pi^2}}{2}+\frac{\ln\left|2\pi+\sqrt{1+4\pi^2}\right|}{2}
\end{aligned}$$

נשאיר לתלמיד לבדוק כי $\int \sqrt{1+t^2}\,dt = \frac{\sqrt{1+4t^2}}{2} + \frac{\ln\left|2t+\sqrt{1+4t^2}\right|}{2}$.

5.2 אינטגרציה של פונקציות מרוכבות לאורך מסלול

ניגש עכשיו להכללה של האינטגרל המסוים $\int_a^b f(x)dx$ מהחשבון האינטגרלי הממשי לאינטגרל המסוים מרוכב. בכדי לעשות זאת, את הקטע הממשי $[a,b]$ המחבר בין הנקודה a לנקודה b יש להחליף במסלול σ המחבר בין נקודה $z_1 = \sigma(a)$ לנקודה $z_2 = \sigma(b)$, כאשר

$$\sigma : [a,b] \to \mathbb{C}$$

הוא מסלול במישור המרוכב.

במקרה הממשי, קיים מסלול אחד ויחיד המחבר בין נקודה a לנקודה b, בעוד שבמישור המרוכב קיימים אינסוף מסלולים כאלה, ולכן בשלב הראשון, במקרה המרוכב אנו נדרשים להגדיר **אינטגרל לאורך מסלול** $\int_\sigma f(z)dz$, מאחר ולאינטגרל בין שתי נקודות z_1, z_2, אין מובן חד-משמעי (בינתיים). ניזכר במושגי החלוקה וסכום רימן המוכרים לנו מהחשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי.

הגדרה 5.2: חלוקה של קטע ממשי $[a,b]$ מורכבת משני מרכיבים:

1. סדרה סופית של נקודות בקטע $[a,b]$

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_k < t_{k+1} < \cdots < t_n = b$$

2. סדרת נקודות ביניים $\hat{t}_k$ מכל תת-קטע $\Delta t_k = [t_k, t_{k+1}]$: $t_k \le \hat{t}_k \le t_{k+1}$.

הגדרה 5.3: סכום רימן (Riemann) של פונקציה $f(z)$ מעל מסלול $\sigma : [a,b] \to \mathbb{C}$ המתאים לחלוקה נתונה $\mathcal{P}$ מוגדר על ידי

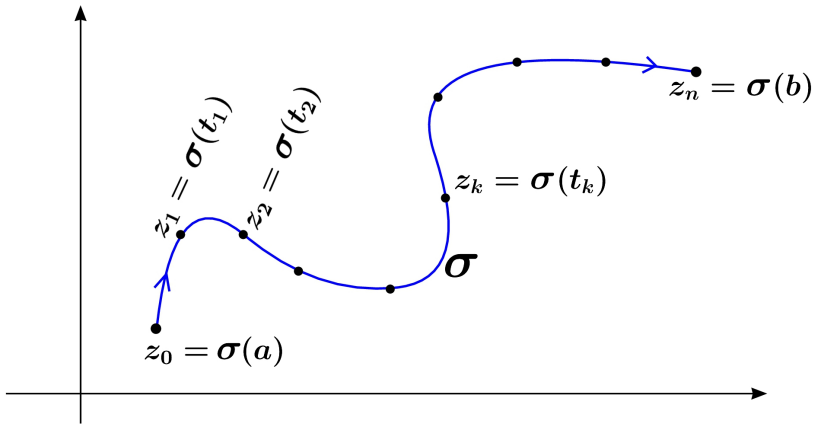
$$\mathcal{S}(\mathcal{P}) = \sum_{k=0}^{n} f(\sigma(\hat{t}_k))[\sigma(t_{k+1}) - \sigma(t_k)] \tag{5.6}$$

נסמן $z_k = \sigma(t_k)$, $\Delta z_k = z_{k+1} - z_k$ ונקבל נוסחה קצרה יותר

$$\mathcal{S}(\mathcal{P}) = \sum_{k=0}^{n} f(\sigma(\hat{t}_k)) \cdot \Delta z_k \tag{5.7}$$

הפרמטר של החלוקה $\Delta(\mathcal{P})$ מוגדר על ידי

$$\Delta(\mathcal{P}) = \operatorname*{Max}_{0 \le k \le n-1} (t_{k+1} - t_k)$$



איור 5.1: מיפוי נקודות החלוקה $\mathcal{P}$ על המסלול σ

זהו האורך המקסימלי של קטעי החלוקה. כאשר הגודל הזה $\Delta(\mathcal{P})$ שואף לאפס, אז אורכי כל קטעי החלוקה שואפים לאפס, ואז הסכומי רימן $\mathcal{S}(\mathcal{P})$ אמורים להתכנס לערך של האינטגרל (במידה והוא קיים).

הגדרה 5.4: תהי $f(z)$ פונקציה מרוכבת המוגדרת מעל תחום הכולל בתוכו מסלול

$$\sigma : [a,b] \to \mathbb{C}$$

האינטגרל של f לאורך המסלול σ, שיסומן על ידי $\int_\sigma f(z)\,dz$, מוגדר להיות הגבול של כל סכומי רימן $\mathcal{S}(\mathcal{P})$, כאשר הפרמטר של החלוקה $\Delta(\mathcal{P})$ שואף לאפס

$$I = \int_\sigma f(z)\,dz = \lim_{\Delta(\mathcal{P})\to 0} \mathcal{S}(\mathcal{P})$$

את הטענה האחרונה יש להבין כך: לכל $\varepsilon > 0$, קיים $\delta > 0$, כך שלכל חלוקה $\mathcal{P}$, אם $\Delta(\mathcal{P}) < \delta$, אז $\left|I - \mathcal{S}(\mathcal{P})\right| < \varepsilon$. אם הגבול הזה קיים, אז נאמר כי f **אינטגרבילית לאורך המסלול σ**.

אם נפרש את הפונקציה $f(z)$ כגודל פיזיקאלי סקאלארי (מרוכב) כגון לחץ או טמפרטורה בנקודה z (שנמדד באמצעות ערכים מרוכבים), אז האינטגרל של f לאורך המסלול σ הוא הסכום הרציף של הערכים לאורך המסלול. למשל, כשמדובר בטמפרטורה, האינטגרל מחשב את כמות החום הצבור לאורך המסלול.

כמובן הגבול הנ"ל עשוי לא להיות קיים ואז f אינה אינטגרבילית לאורך המסלול σ. חישוב האינטגרל על פי ההגדרה הוא כמובן משימה לא פרקטית ויש למצוא שיטות פרקטיות למטרה הזו. המאמץ הרב שהושקע בתאוריה של סכומי רימן בחשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי הממשי, מניב את תוצאותיו גם במקרה המרוכב ומאפשר לקבל את התוצאה הבאה.

משפט 5.3: תהי $f(z)$ פונקציה מרוכבת רציפה מעל תחום הכולל בתוכו מסלול חלק

$\sigma:[a,b]\to\mathbb{C}$. אזי f אינטגרבילית מעל המסלול σ ובנוסף

$$\int_{\sigma} f(z)\,dz=\int_a^b f(\sigma(t))\sigma'(t)\,dt \tag{5.8}$$

אם σ מסלול חלק למקוטעין, כלומר $\sigma=\sigma_1+\sigma_2+\cdots+\sigma_n$ הוא שירשור של n מסלולים חלקים, אז האינטגרל של f לאורך σ יתקבל על ידי

$$\int_{\sigma} f(z)\,dz=\int_{\sigma_1} f(z)\,dz+\int_{\sigma_2} f(z)\,dz+\cdots+\int_{\sigma_n} f(z)\,dz \tag{5.9}$$

אם σ מסלול סגור אז נציין זאת על ידי הסימון: $\oint_{\sigma} f(z)\,dz$.

הוכחה: נציג את ליבת הרעיון של ההוכחה מבלי להיכנס לפרטים והדקויות של חישובי גבול של סכומי רימן. תהי $\mathcal{P}$ חלוקה של המסלול $\sigma(t)=x(t)+iy(t)$, $a\le t\le b$, כמתואר בהגדרות 5.2, 5.3. נפתח קצת את הנוסחה (5.6).

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}(\mathcal{P})&=\sum_{k=0}^{n} f(\sigma(\hat{t}_k))[\sigma(t_{k+1})-\sigma(t_k)]\\
&=\sum_{k=0}^{n} f(\sigma(\hat{t}_k))\cdot\Big\{[x(t_{k+1})+iy(t_{k+1})]-[x(t_k)+iy(t_k)]]\Big\}\\
&=\sum_{k=0}^{n} f(\sigma(\hat{t}_k))\cdot\Big\{[x(t_{k+1})-x(t_k)]+i\,[y(t_{k+1})-y(t_k)]\Big\}\\
&=\sum_{k=0}^{n} f(\sigma(\hat{t}_k))\cdot\left[\frac{x(t_{k+1})-x(t_k)}{t_{k+1}-t_k}+i\,\frac{y(t_{k+1})-y(t_k)}{t_{k+1}-t_k}\right]\cdot(t_{k+1}-t_k)\\
&\approx\sum_{k=0}^{n} f(\sigma(\hat{t}_k))\cdot\Big[x'(\hat{t}_k)+iy'(\hat{t}_k)\Big]\cdot(t_{k+1}-t_k)
\end{aligned}$$

על פי משפט ערך הביניים של לגרנז', קיימת נקודת ביניים $t_k<\bar{t}<t_{k+1}$, כך ש־

$$\frac{x(t_{k+1})-x(t_k)}{t_{k+1}-t_k}=x'(\bar{t})$$

נוסחה דומה תתאים עבור $y(t)$. על פי הנתון, המסלול σ חלק, ולכן שני רכיביו $x(t)$, $y(t)$, גזירים ברציפות. מהרציפות של $x'(t)$, ומכך שפרמטר החלוקה $\Delta(\mathcal{P})$ שואף לאפס, נוכל להניח כי $x'(\bar{t})\approx x'(\hat{t})$, ולכן בשורה האחרונה של הפיתוח הנ"ל התבססנו על הקירובים

$$\frac{x(t_{k+1})-x(t_k)}{t_{k+1}-t_k}\approx x'(\hat{t}_k)\qquad\qquad\frac{y(t_{k+1})-y(t_k)}{t_{k+1}-t_k}\approx y'(\hat{t}_k)$$

ולכן ניתן לקרב את הסכום רימן $\mathcal{S}(\mathcal{P})$ על ידי

$$\begin{aligned}\mathcal{S}(\mathcal{P}) &\approx \sum_{k=0}^{n} f(\sigma(\hat{t}_k)) \cdot \left[x'(\hat{t}_k) + iy'(\hat{t}_k)\right] \cdot (t_{k+1} - t_k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} f(\sigma(\hat{t}_k)) \cdot \sigma'(\hat{t}_k) \cdot \Delta t_k\end{aligned}$$

קל לראות כי הביטוי שבאגף ימין הוא למעשה סכום רימן של האינטגרל $\int_a^b f(\sigma(t))\cdot\sigma'(t)\,dt$, ולכן

$$\begin{aligned}\int_{\sigma} f(z)\,dz &= \lim_{\Delta(\mathcal{P})\to 0} \mathcal{S}(\mathcal{P}) \\ &= \lim_{\Delta(\mathcal{P})\to 0} \sum_{k=0}^{n} f(\sigma(\hat{t}_k)) \cdot \sigma'(\hat{t}_k) \cdot \Delta t_k \\ &= \int_a^b f(\sigma(t))\sigma'(t)\,dt\end{aligned}$$

האינטגרל $\int_a^b f(\sigma(t))\sigma'(t)\,dt$ קיים כי $f(z)$ רציפה, $\sigma(t)$ וגם $\sigma'(t)$ רציפות, ולכן הפונקציה $f(\sigma(t))\sigma'(t)$ אינטגרבילית מעל הקטע $[a,b]$, ובכך אנו מקבלים את הנוסחה (5.8) שהיא בסיס טענת המשפט. ∎

- ברוב המקרים המסלול σ הוא מסלול חלק למקוטעין פתוח או סגור ($\sigma(a) = \sigma(b)$). כאשר המסלול פתוח האינטגרל יסומן על ידי $\int_{\sigma} f(z)\,dz$, וכשהמסלול סגור הסימון הוא $\oint_{\sigma} f(z)\,dz$.

- ברוב הספרים, האינטגרל הקווי $\int_{\sigma} f(z)dz$ מוגדר ישירות על ידי הנוסחה (5.8):

$$\int_{\sigma} f(z)\,dz = \int_a^b f(\sigma(t))\,\sigma'(t)\,dt$$

זה כמובן חוסך את הדיון בסכומי רימן ובהוכחת המשפט האחרון, אך מסתיר את הסיבות להגדרה שלו ככזה (למשל, מאיפה הגיעה נגזרת המסלול $\sigma'(t)$?). בכל מקרה, מבחינה פרקטית אפשר לדלג על הדיון שקדם לנוסחה (5.8) ולהתייחס אליה כאל ההגדרה הרישמית של האינטגרל הקווי.

- דרך נוספת לפרש אינטגרל של פונקציה מרוכבת $f(z)$ לאורך מסלול היא על ידי פירוש של $f(z)$ כשדה כוח וקטורי, כאשר לכל נקודה מישורית z, המספר $f(z)$ מציין את וקטור הכוח הפועל בנקודה z. אז הביטוי $f(\sigma(t))\sigma'(t)$ מציין רכיב כוח הפועל בנקודה $\sigma(t)$ בכיוון התנועה של המסלול, ולכן האינטגרל הקווי $\int_a^b f(\sigma(t))\sigma'(t)\,dt$ הוא מעין חישוב עבודה המתבצעת על ידי שדה הכוח לאורך המסלול σ.

דוגמה 3: חשב את האינטגרל הקווי של $f(z)=\overline{z}^2$ לאורך המסלול $\sigma(t)=t+ti$, $0\le t\le 1$.

פתרון: המסלול σ הוא הקטע הישר שמחבר את הנקודה $z=0$ לנקודה $z=1+i$. זהו כמובן מסלול חלק, ולכן נוכל להשתמש במשפט 5.3

$$\begin{aligned}\int_{\sigma} f(z)\,dz &= \int_0^1 (t-it)^2(1+i)dt = \int_0^1 (t^2-2it^2-t^2)^2(1+i)dt \\ &= -2i(1+i)\int_0^1 t^2dt = -2i(1+i)\frac{t^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{2-2i}{3}\end{aligned}$$

טענה 5.4: תהי $f(z)$ פונקציה רציפה מעל מסלול חלק למקוטעין $s:[a,b]\to\mathbb{C}$. אזי

$$\left|\int_{\sigma} f(z)\,dz\right| \le \ell(\sigma)\cdot \underset{a\le t\le b}{\mathrm{Max}}|f(\sigma(t))|$$

הוכחה: על פי הנתון, הפונקציה $|f(\sigma(t))|$ רציפה בקטע הסגור $[a,b]$, ולכן יש לה מקסימום $M=\underset{a\le t\le b}{\mathrm{Max}}|f(\sigma(t))|$.

$$\begin{aligned}\left|\int_{\sigma} f(z)\,dz\right| &= \left|\int_a^b f(\sigma(t))\sigma'(t)dt\right| \le \int_a^b |f(\sigma(t))|\cdot|\sigma'(t)|dt \\ &\le \int_a^b M\cdot|\sigma'(t)|dt = M\int_a^b \sigma'(t)|dt \\ &= \ell(\sigma)\cdot \underset{a\le t\le b}{\mathrm{Max}}|f(\sigma(t))|\end{aligned}$$

השתמשנו במשפט 5.2, בנוסחת אורך מסלול, ובתכונות האינטגרל המסוים. ∎

טענה 5.5: אם $\sigma:[a,b]\to\mathbb{C}$ מסלול חלק למקוטעין ו־$f(z)$ פונקציה אנליטית על σ אז:

$$\int_{\sigma} f'(z)dz = f(\sigma(b))-f(\sigma(a))$$

הוכחה: על פי כלל השרשרת (ראה משפט 3.25)

$$\frac{d}{dt}\left[f(\sigma(t))\right] = f'(\sigma(t))\cdot\sigma'(t)$$

לכן על פי הגדרת האינטגרל לאורך מסלול

$$\begin{aligned}\int_{\sigma} f'(z)dz &= \int_a^b f'(\sigma(t))\cdot\sigma'(t)\,dt = \int_a^b \frac{d}{dt}\left[f(\sigma(t))\right]\,dt \\ &= f(\sigma(t))\Big|_{t=a}^{t=b} = f(\sigma(b)) - f(\sigma(a))\end{aligned}$$

■

מסקנה 5.6: אם $\sigma:[a,b]\to\mathbb{C}$ מסלול **סגור** וחלק למקוטעין, ואם לפונקציה $f(z)$ יש פונקציה אנליטית קדומה מעל σ אז:

$$\oint_{\sigma} f(z)dz = 0$$

הוכחה: תהי $F(z)$ פונקציה אנליטית קדומה של $f(z)$. כלומר $F'(z)=f(z)$ לכל נקודה z על המסלול σ. על פי הטענה הקודמת

$$\int_{\sigma} f(z)dz = F(\sigma(b)) - F(\sigma(a)) = 0$$

זה נובע מכך שהמסלול σ סגור ולכן $\sigma(a)=\sigma(b)$. ■

הערות

1. המשמעות של טענה 5.5 היא שאם ל־f יש פונקציה קדומה אנליטית מעל σ, אז האינטגרל לאורך המסלול σ תלוי רק בנקודות הקצה של σ. כלומר, לכל שני מסלולים σ_1, σ_2, אם $\sigma_1(a)=\sigma_2(a)$, $\sigma_1(b)=\sigma_2(b)$, אז $\int_{\sigma_1} f(z)dz = \int_{\sigma_2} f(z)dz$.
2. ההנחה כי $F(z)$ אנליטית על המסלול σ כוללת כמובן את ההנחה שהמסלול σ כלול בתוך קבוצה פתוחה D אשר בה $F(z)$ אנליטית. אבל לא נדרש שהפנים של המסלול σ גם הוא יהיה כלול ב־D (כאשר σ הוא מסלול סגור).
3. כמו-כן, יש לשים לב לכך שאין דרישה שהמסלול σ יהיה פשוט! כל מה שנדרש הוא שהוא יהיה סגור וחלק למקוטעין. ייתכן בהחלט שהוא יחתוך את עצמו מספר פעמים!
4. המשפט היסודי של חדו"א 1 טוען כי לכל פונקציה ממשית רציפה $f(x)$ יש פונקציה ממשית קדומה $F(x)$ כך ש־$F'(x)=f(x)$. כרגע אין לנו משפט דומה עבור פונקציות מרוכבות ונצטרך לעבוד קשה בכדי להוכיח את משפט קושי-גורסה, אשר ממנו ניתן להסיק תוצאה דומה לזו של המשפט היסודי של החדו"א.

דוגמה 4: חשב את $\int_{\sigma}\frac{dz}{z}$ כאשר $\sigma(t)=te^{it}$, $\pi\le t\le 2\pi$.

פתרון: פונקציה קדומה של $\frac{1}{z}$ היא $\mathrm{Log}(z)$. לכן על פי טענה 5.5

$$\begin{aligned}\int_{\sigma}\frac{dz}{z} &= \mathrm{Log}(\sigma(2\pi))-\mathrm{Log}(\sigma(\pi))=\mathrm{Log}\left(2\pi e^{2\pi i}\right)-\mathrm{Log}\left(\pi e^{\pi i}\right)\\ &= \mathrm{Log}(2\pi)-\mathrm{Log}(-\pi)=\ln 2-\pi i\end{aligned}$$

טענה 5.7: לכל נקודה $z_0\in\mathbb{C}$ ולכל מספר ממשי $r>0$,

$$\oint_{|z-z_0|=r}\frac{dz}{z-z_0}=2\pi i$$

כאשר הביטוי $|z-z_0|=r$ באינטגרל יציין תמיד את הפרמטריזציה הסטנדרטית של המעגל ברדיוס r סביב z_0: $\sigma(t)=z_0+re^{it}$, $0\le t\le 2\pi$.

הוכחה: נשתמש בהגדרת האינטגרל

$$\oint_{|z-z_0|=r}\frac{dz}{z-z_0}=\int_0^{2\pi}\frac{\frac{d}{dt}[re^{it}]dt}{(z_0+re^{it})-z_0}=\int_0^{2\pi}\frac{ire^{it}dt}{re^{it}}=\int_0^{2\pi}i\,dt=2\pi i$$

■

5.3 משפט קושי-גורסה (Cauchy-Goursat)

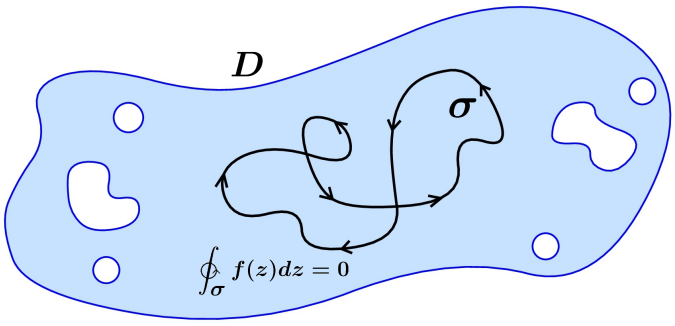
משפט קושי-גורסה הוא אחד המשפטים החשובים והשימושיים בתחום הפונקציות המרוכבות. הוא מבטא את אחת התכונות הכי חשובות ושימושיות של פונקציות אנליטיות: האינטגרל של פונקציה אנליטית לאורך מסלול סגור מתאפס (תחת תנאים מתאימים כמובן).

ברוב הספרים המשפט מנוסח עבור מסלול משולש או מלבני, או לכל היותר מסלול פשוט וחלק למקוטעין, אך הוא נכון עבור כל מסלול סגור[2]. אנו נוכיח את המשפט עבור מסלול סגור חלק למקוטעין, למרות המאמץ הנוסף שנדרש לשם כך, מאחר וזה מפשט מאוד את הוכחת המסקנות החשובות הנובעות ממשפט זה (בפרט את נוסחת האינטגרל של קושי).

משפט 5.8: (קושי-גורסה): תהי $f(z)$ פונקציה אנליטית בקבוצה פתוחה D, ויהי σ מסלול סגור וחלק למקוטעין, הכלול יחד עם הפנים שלו בתוך D. אזי

$$\oint_{\sigma}f(z)dz=0$$

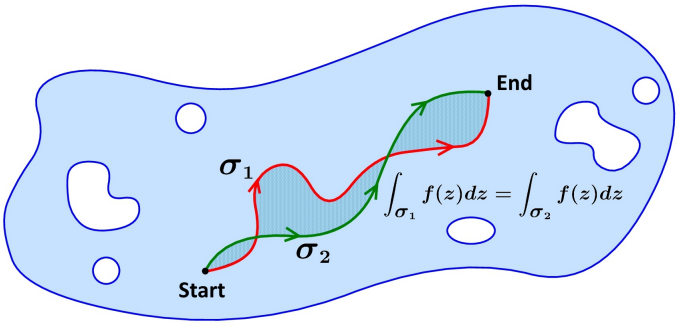
[2] אך זה מצריך הגדרה יותר כללית של אינטגרל לאורך מסלול כללי שאינו בהכרח גזיר. ההגדרה שלנו, שהיא ההגדרה המקובלת ברוב ספרי הלימוד, מתבססת על תכונת החלקות של המסלול, ולכן אינה חלה על מסלול שהוא רציף בלבד.



איור 5.2: המסלול σ וגם הפנים שלו כלולים בתוך קבוצה פתוחה D

מסקנה 5.9: (קושי-גורסה 2): תהי $f(z)$ פונקציה אנליטית בקבוצה פתוחה D, ויהיו σ_1, σ_2, שני מסלולים היוצאים מאותה נקודה ומסיימים באותה נקודה, כך שהתחום החסום ביניהם כלול בתחום D. אזי

$$\oint_{\sigma_1} f(z)dz = \oint_{\sigma_2} f(z)dz$$



איור 5.3: מסקנה מיידית ממשפט קושי-גורסה: ערך האינטגרל תלוי רק בנקודות המוצא והסיום ולא במסלול

הוכחה: זוהי טענה שקולה למשפט קושי-גורסה. אם נהפוך את הכיוון של המסלול σ_2 ונשרשר אותו למסלול σ_1, נקבל מסלול סגור $\sigma_1 + (-\sigma_2)$ המקיים את תנאי משפט קושי-גורסה, ולכן

$$\oint_{\sigma_1+(-\sigma_2)} f(z)dz = 0$$

אבל

$$\oint_{\sigma_1+(-\sigma_2)} f(z)dz = \oint_{\sigma_1} f(z)dz - \oint_{\sigma_2} f(z)dz = 0$$

ולכן $\oint_{\sigma_1} f(z)dz = \oint_{\sigma_2} f(z)dz$. ∎

הוכחת משפט קושי-גורסה תתבצע בארבעה שלבים

א. נציג הוכחה קלה למקרה שבו התחום D הוא עיגול או מלבן,

ב. נוכיח את המשפט עבור מסלול משולש (ותחום D כללי),

ג. נוכיח את המשפט עבור מסלול מצולע כללי (פוליגון סגור),

ד. נוכיח את המשפט עבור מסלול חלק למקוטעין סגור.

א. הוכחת משפט קושי-גורסה עבור עיגול או מלבן D

טענה 5.10: יהיו $u(x,y)$, $v(x,y)$, שתי פונקציות ממשיות גזירות ברציפות בתוך מלבן או עיגול פתוח D שמרכזו בנקודה (x_0,y_0). אם $u_y=v_x$ מעל D, אז קיימת פונקציה ממשית $P(x,y)$ גזירה פעמיים ברציפות, כך ש־$P_x=u$, $P_y=v$, מעל כל D.

הוכחה: הפונקציה $P(x,y)$ נקראת לפעמים "פונקציית פוטנציאל" ולכן סומנה P. לכל נקודה $(x,y)\in D$ נגדיר

$$P(x,y)=\int_{x_0}^{x}u(t,y_0)dt+\int_{y_0}^{y}v(x,t)dt \tag{5.10}$$

שני האינטגרלים מוגדרים היטב כי התחום שלנו D הוא מלבן או עיגול, ולכן הקטע הישר שמחבר בין נקודת המרכז (x_0,y_0) לנקודה (x,y_0), הדרוש עבור האינטגרל הראשון, מוכל בשלמותו בתוך D. באופן דומה, הקטע הישר שמחבר בין הנקודה (x,y_0) לנקודה (x,y), הדרוש עבור האינטגרל השני, גם הוא מוכל בשלמותו בתוך D. על פי המשפט היסודי של החשבון הדיפרנציאלי

$$P_y(x,y)=v(x,y)$$

האינטגרל הראשון מניב פונקציה של x בלבד, ולכן הנגזרת שלו לפי y היא 0. זה מוכיח את החלק הראשון של הטענה. לגבי P_x יש להשתמש שוב במשפט היסודי של החשבון הדיפרנציאלי על האינטגרל הראשון של (5.10)

$$\frac{d}{dx}\int_{x_0}^{x}u(t,y_0)dt=u(x,y_0)$$

ובכלל של לייבניץ עבור האינטגרל השני (ראה משפט 5.33 בעמוד 220), ושימוש בנתון $u_y=v_x$

$$\begin{aligned}P_x(x,y) &= \frac{d}{dx}\int_{x_0}^{x}u(t,y_0)dt+\frac{d}{dx}\int_{y_0}^{y}v(x,t)dt\\ &= u(x,y_0)+\int_{y_0}^{y}v_x(x,t)dt\\ &= u(x,y_0)+\int_{y_0}^{y}u_y(x,t)dt\\ &= u(x,y_0)+u(x,y)-u(x,y_0)\\ &= u(x,y)\end{aligned}$$

ברור כי P גזירה פעמיים ברציפות, כי הנגזרות החלקיות שלה מסדר ראשון הן $P_x=u$,

$P_y = v$, ושתי הפונקציות u, v, גזירות ברציפות. ∎

משפט 5.11: תהי $f(z)$ פונקציה אנליטית מעל עיגול או מלבן D. אזי קיימת ל־f פונקציה פרימיטיבית מעל D.

הוכחה: נרשום את f בכתיב קרטזי $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$. זוג הפונקציות u, $-v$, מקיימות את משוואות קושי-רימן $u_y = -v_x$, ולכן זוג הפונקציות u, $-v$, מקיימות את תנאי טענה 5.10, ולכן קיימת פונקציית פוטנציאל $P(x,y)$, גזירה פעמיים ברציפות, המקיימת $P_x = u$, $P_y = -v$.

ע"פ קושי-רימן, מתקיים גם $u_x = v_y$, ולכן קיימת פונקציית פוטנציאל $Q(x,y)$ המקיימת $Q_x = v$, $Q_y = u$. נגדיר את הפונקציה

$$F(x+iy) = P(x,y) + iQ(x,y)$$

לא קשה להראות כי F מקיימת את משוואות קושי-רימן, ובנוסף הנגזרות החלקיות של P, Q, רציפות מעל התחום D, לכן על פי מסקנה 4.4 (עמוד 128), F היא פונקציה אנליטית. קל לראות שגם $F'(z) = f(z)$ מעל התחום D. כלומר, F היא פונקציה פרימיטיבית של f בתחום D. ∎

מסקנה 5.12: (משפט קושי-גורסה עבור עיגול ומלבן) תהי $f(z)$ פונקציה אנליטית מעל עיגול (או מלבן) D, אזי עבור כל מסלול סגור וחלק למקוטעין σ בתוך D מתקיים

$$\oint_{\sigma} f(z)dz = 0$$

הוכחה: על פי המשפט הקודם יש לפונקציה $f(z)$ פונקציה קדומה $F(z)$ מעל התחום D, ולכן על פי מסקנה 5.6, $\oint_{\sigma} f(z)dz = 0$. ∎

יש לשים לב לכך שבניסוח של מסקנה 5.12 לא מדובר במסלול פשוט! הדרישות היחידות הן שהמסלול σ יהיה חלק למקוטעין, וסגור, אך יכול לחתוך את עצמו בנקודות ביניים.

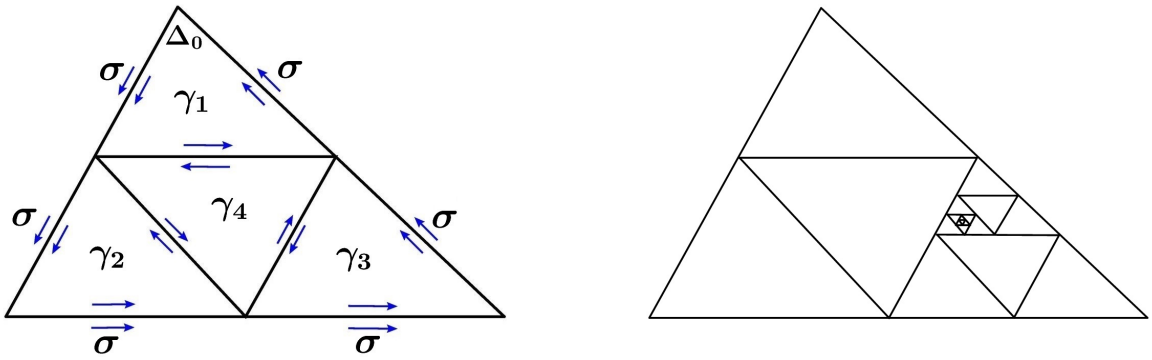
ב. הוכחת משפט קושי-גורסה עבור מסלול משולש

בשלב ב' נוכיח את משפט קושי-גורסה 5.8 עבור מסלול משולש מעל קבוצה פתוחה D. ההנחה היחידה הדרושה לנו כמובן היא שהפנים של המשולש σ כלול בתוך הקבוצה D.

נסמן $I = \oint_{\sigma} f(z)dz$. מטרתנו להוכיח כי $I = 0$. נניח בשלילה ש־$I > 0$ ונקבל סתירה. נסמן $\sigma_0 = \sigma$ ונסמן על ידי $\triangle_0$ את המשולש החסום על ידי σ_0. נחלק את המשולש $\triangle_0$

לארבעה משולשים כפי שרואים בשרטוט 5.4. מהשרטוט קל לראות כי

$$\begin{aligned} I &= \left|\oint_{\gamma_1} f(z)dz + \oint_{\gamma_2} f(z)dz + \oint_{\gamma_3} f(z)dz + \oint_{\gamma_4} f(z)dz\right| \\ &\leq \left|\oint_{\gamma_1} f(z)dz\right| + \left|\oint_{\gamma_2} f(z)dz\right| + \left|\oint_{\gamma_3} f(z)dz\right| + \left|\oint_{\gamma_4} f(z)dz\right| \end{aligned}$$



איור 5.4: חלוקת מסלול משולש σ לארבעה מסלולים משולשים $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$

ברור שלפחות אחד מהאינטגרלים שבאגף ימין חייב להיות גדול או שווה $\frac{I}{4}$. נסמן את המסלול המתאים σ_1, ואת המשולש המתאים Δ_1. אם נחזור על פעולה זו שוב ושוב נקבל סדרת משולשים $\{\Delta_n\}_{n=0}^{\infty}$ וסדרת מסלולים $\{\sigma_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\sigma_n = \partial\Delta_n$, עם התכונות הבאות:

$$\ell(\sigma_n) = \frac{\ell(\sigma)}{2^n} \tag{5.11}$$

$$\Delta_{n+1} \subseteq \Delta_n \tag{5.12}$$

$$\operatorname{diam}(\Delta_n) \leq \frac{\ell(\sigma)}{2^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \tag{5.13}$$

$$\left|\oint_{\sigma_n} f(z)dz\right| \geq \frac{I}{4^n} \tag{5.14}$$

מושג הקוטר $\operatorname{diam}(\Delta_n)$ של קבוצה מופיע בהגדרה 2.3. הלמה של קנטור (ראה טענה 2.20 בעמוד 75) מבטיחה כי חיתוך סדרת המשולשים נותן נקודה אחת ויחידה z_0, הנמצאת כמובן בתוך D (לכן היא נקודה פנימית של D, כי D פתוחה).

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_n = \{z_0\}$$

יהי $r > 0$ כך ש־$\mathbb{D}(z_0, r) \subseteq D$. על סמך הלמה של קנטור, קיים מספר טבעי N, כך שעבור כל $n \geq N$, $\Delta_n \subseteq \mathbb{D}(z_0, r)$. לכן המסלול σ_n כלול יחד עם הפנים שלו בתוך העיגול $\mathbb{D}(z_0, r)$. על סמך מסקנה 5.12, $\oint_{\sigma_n} f(z)dz = 0$ בסתירה לאי-השוויון (5.14) $\left|\oint_{\sigma_n} f(z)dz\right| \geq \frac{I}{4^n}$. לכן בהכרח $I = 0$. כלומר מקבלים $\oint_{\sigma} f(z)dz = 0$. ∎

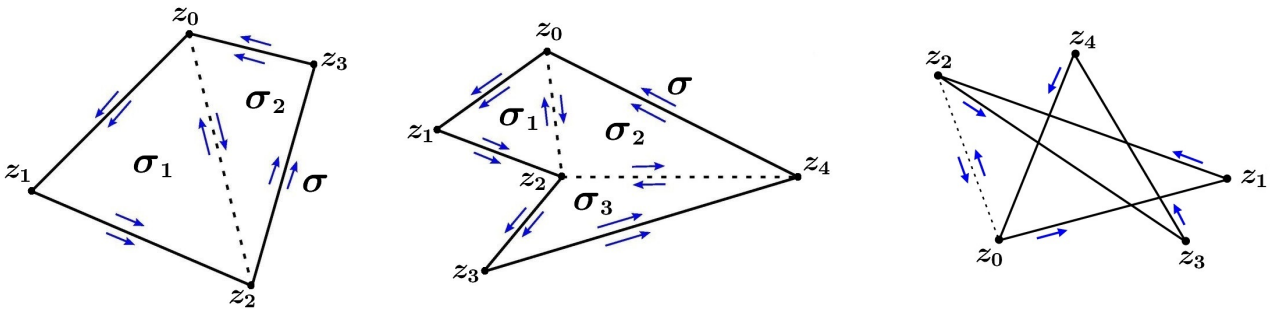
נציין כי ללא ההנחה שהפנים של המשולש σ כלול בקבוצה הפתוחה D, הטיעון הנ"ל לא היה עובד מאחר ואין ערובה לכך שנקודת הגבול z_0 תשתייך לקבוצה D! זהו המקום הקריטי שבו ההנחה שפנים המסלול σ חייב להיות בתוך D נדרשת.

ג. הוכחת משפט קושי-גורסה עבור מצולע

נתחיל קודם בהמחשה ויזואלית של רעיון ההוכחה באמצעות שתי דוגמאות פשוטות של מרובע ומחומש. המרובע $\sigma = [z_0, z_1, z_2, z_3]$ שבשרטוט 5.5 מתפרק לשני משולשים

$$\sigma 1 = [z_0, z_1, z_2, z_0], \quad \sigma_2 = [z_2, z_3, z_0, z_2]$$

בעלי צלע משותפת $[z_0, z_2]$ (בכיוונים מנוגדים).



איור 5.5: פירוק מסלולים מצולעים לסכום של מסלולים משולשים

יש לשים לב גם לכיוון האינטגרציה (סיבוב נגד כיוון השעון, שהוא הכיוון החיובי).

$$\begin{aligned}
\oint_{\sigma} f(z)dz &= \oint_{[z_0,z_1]} f(z)dz + \oint_{[z_1,z_2]} f(z)dz + \oint_{[z_2,z_3]} f(z)dz + \oint_{[z_3,z_0]} f(z)dz \\
&= \left[\oint_{[z_0,z_1]} f(z)dz + \oint_{[z_1,z_2]} f(z)dz + \oint_{[z_2,z_0]} f(z)dz\right] + \left[\oint_{[z_0,z_2]} f(z)dz + \oint_{[z_2,z_3]} f(z)dz + \oint_{[z_3,z_0]} f(z)dz\right] \\
&= \oint_{\sigma_1} f(z)dz + \oint_{\sigma_2} f(z)dz \\
&= 0 + 0 = 0
\end{aligned}$$

בשורה השנייה הוספנו את זוג האינטגרלים $\oint_{[z_2,z_0]} f(z)dz + \oint_{[z_0,z_2]} f(z)dz$ אשר כמובן סכומם אפס בגלל הכיוון המנוגד של הקטעים $[z_2, z_0]$, $[z_0, z_2]$. ניתן לבנות פיתוח דומה עבור המחומש, אבל זו כמובן לא הדרך להוכחה פורמלית. ההוכחה הפורמלית תתבצע באמצעות אינדוקציה מתימטית של מספר הצלעות n.

בסיס האינדוקציה הוא התוצאה הקודמת עבור $n = 3$. מניחים כי $\oint_{\sigma} f(z)dz = 0$ עבור כל מצולע σ בעל n צלעות מוכיחים את התוצאה עבור מצולע פשוט σ בעל $n+1$ צלעות.

$$\sigma = [z_0, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}, z_n, z_0]$$

בהנחה שהמצולע $\boldsymbol{\sigma}$ אינו מנוון[3], ללא הגבלת הכלליות נוכל להניח שכל שלושה קודקודים עוקבים $[z_k, z_{k+1}, z_{k+2}]$ יוצרים משולש לא מנוון. נפרק את המצולע $\boldsymbol{\sigma}$ למשולש

$$\boldsymbol{\sigma_1} = [z_0, z_1, z_2, z_0]$$

ולמצולע בעל n צלעות

$$\boldsymbol{\sigma_2} = [z_0, z_2, z_3, \ldots, z_n, z_0]$$

רואים כי המצולע $\boldsymbol{\sigma_2}$ מתקבל מהמצולע המקורי $\boldsymbol{\sigma}$ באמצעות הסרת הקודקוד z_1. מאחר והטענה מתייחסת למצולעים כלליים (אשר עשויים לחתוך את עצמם בנקודות ביניים), מומלץ להתבונן בכוכב הימני שבשרטוט 5.5 בכדי לעקוב אחרי הרעיון. לשם פשטות וקיצור נסיר את הביטוי $f(z)dz$ מהאינטגרלים

$$\begin{aligned}
\oint_{\boldsymbol{\sigma}} &= \int_{[z_0,z_1]} + \int_{[z_1,z_2]} + \cdots + \int_{[z_{n-1},z_n]} + \int_{[z_n,z_0]} \\
&= \left[\int_{[z_0,z_1]} + \int_{[z_1,z_2]} + \int_{[z_2,z_0]}\right] + \left[\int_{[z_0,z_2]} + \int_{[z_2,z_3]} + \cdots + \int_{[z_{n-1},z_n]} + \int_{[z_n,z_0]}\right] \\
&= \oint_{\boldsymbol{\sigma_1}} + \oint_{\boldsymbol{\sigma_2}} = 0 + 0 = 0
\end{aligned}$$

המעבר משורה 1 לשורה 2 נעשה על ידי הוספת הביטוי $\oint_{[z_2,z_0]} + \oint_{[z_0,z_2]}$ השווה כמובן לאפס ולכן השוויון מוצדק. האינטגרל $\oint_{\boldsymbol{\sigma_1}} f(z)dz$ מתאפס על סמך העובדה שהמסלול $\boldsymbol{\sigma_1}$ הוא משולש, והאינטגרל $\oint_{\boldsymbol{\sigma_2}} f(z)dz$ מתאפס על סמך הנחת האינדוקציה ($\boldsymbol{\sigma_2}$ הוא מצולע בעל n צלעות). ∎

ד. הוכחת משפט קושי-גורסה עבור מסלול סגור חלק למקוטעין

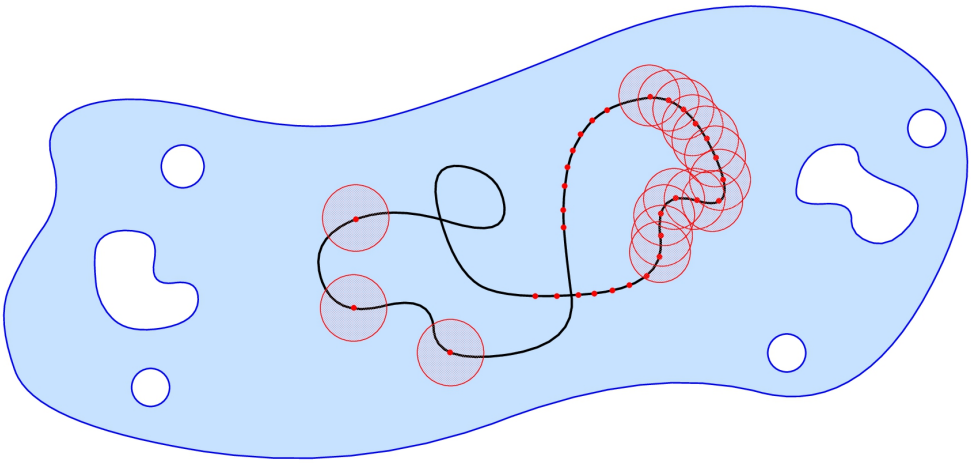
בשעה טובה, הגענו סוף סוף להוכחת משפט קושי-גורסה הכללי 5.8.

המסלול $\boldsymbol{\sigma}$ הוא כמובן תת-קבוצה סגורה וחסומה של D, ולכן על סמך תרגיל 28 שבסוף פרק 2, קיים $r > 0$ כך שלכל נקודה z על המסלול $\boldsymbol{\sigma}$, העיגול $\mathbb{D}(z, r)$ כלול בשלמותו בתוך הקבוצה D (מומלץ לפתור שוב את תרגיל 28 של פרק 2 לפני שממשיכים הלאה).

ללא הגבלת הכלליות נוכל להניח כי אורך המסלול $\boldsymbol{\sigma}$ הוא סופי[4] ולכן נוכל לחלק אותו למספר סופי של תתי-מסלולים $\{\boldsymbol{\sigma}_k\}_{k=0}^{n}$, באמצעות בחירת מספר סופי של נקודות חלוקה $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n$, על המסלול בהתאם לכיוון התנועה של $\boldsymbol{\sigma}$ (ראה שרטוטים 5.6, 5.7), כך שהאורך של כל תת-מסלול $\boldsymbol{\sigma}_k$ קטן מ־$r/2$. לכל $0 \le k < n$, המסלול $\boldsymbol{\sigma}_k$ מתחיל

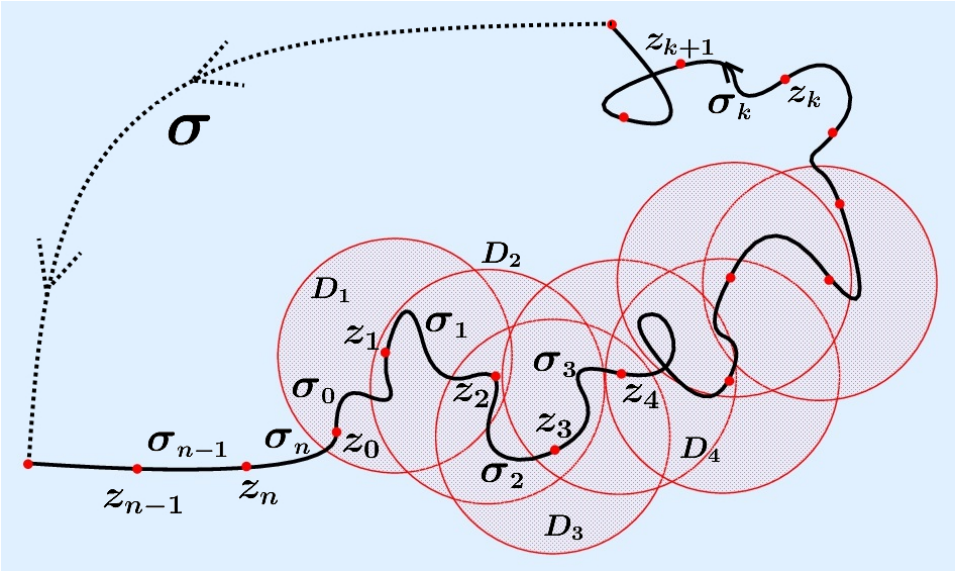
[3] אם $\boldsymbol{\sigma}$ הוא מצולע שכל קודקודיו על אותו ישר, אז התוצאה טריביאלית

[4] המקרה הקיצוני שבו $\boldsymbol{\sigma}$ מסלול בעל אורך אינסופי ניתן לטיפול באמצעות הצגתו כגבול של מסלולים סופיים, אך לא נטרח לעשות זאת כאן מאחר ומסלולים מסוג זה אינם רלבנטיים עבור הקורס הנוכחי.



איור 5.6: כיסוי המסלול σ באמצעות עיגולים פתוחים בעלי רדיוס r

בנקודה z_k ומסתיים בנקודה z_{k+1}. המסלול σ_n מתחיל בנקודה z_n אך מסתיים בנקודה z_0.

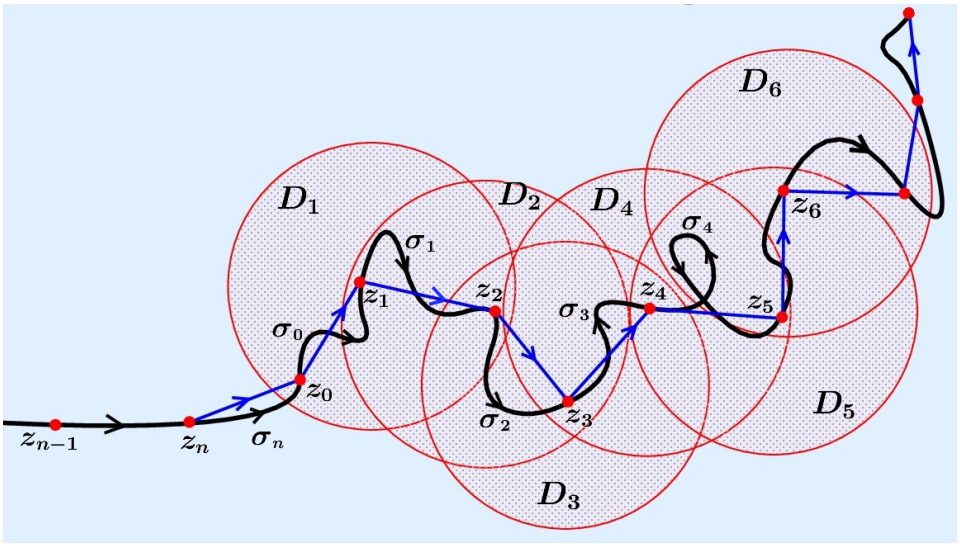


איור 5.7: חלוקת המסלול σ לתתי-קטעים $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$. כל תת-מסלול משתייך לעיגול מתאים.

שרטוט 5.7 מציג קטע קטן מתוך התמונה הגדולה. רואים שם כמה נקודות חלוקה עם העיגולים המכסים של המסלול (שסומנו $D_k = \mathbb{D}(z_k, r)$), וכמה מתתי-המסלולים σ_k שמחברים את נקודות החלוקה z_k, z_{k+1}.

הדרישה שאורך כל תת-המסלול σ_k קטן מ־$r/2$ מבטיחה שהעיגול $\mathbb{D}(z_k, r)$ כולל בתוכו את σ_k בשלמותו, וכמובן כולל בתוכו גם את נקודת החלוקה הבאה z_{k+1}, וגם את הקטע הישר $[z_k, z_{k+1}]$.

אם נצרף את הקטע הישר $[z_{k+1}, z_k]$ (בכיוון הפוך!) לתת-המסלול σ_k, נקבל מסלול סגור בתוך העיגול $\mathbb{D}(z_k, r)$. ראה שרטוט 5.8. על סמך מסקנה 5.12 (משפט קושי-גורסה עבור



איור 5.8: בניית מצולע השקול למסלול σ העברת קטעי ישרים בין מרכזי העיגולים המכסים

תחום עגול)

$$\oint_{\sigma_k+[z_{k+1},z_k]} f(z)dz = 0$$

ולכן

$$\int_{\sigma_k} f(z)dz = \int_{[z_k,z_{k+1}]} f(z)dz$$

נסמן את המצולע המתקבל על ידי חיבור קודקודי החלוקה

$$\gamma = [z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n, z_0]$$

על סמך השלב הקודם של ההוכחה (משפט קוש-גורסה עבור מסלול מצולע)

$$\oint_{\gamma} f(z)dz = 0$$

אבל

$$\begin{aligned}\oint_{\sigma} f(z)dz &= \int_{\sigma_0} f(z)dz + \int_{\sigma_1} f(z)dz + \cdots + \int_{\sigma_n} f(z)dz \\ &= \int_{[z_0,z_1]} f(z)dz + \int_{[z_1,z_2]} f(z)dz + \cdots + \int_{[z_{n-1},z_n]} f(z)dz + \int_{[z_n,z_0]} f(z)dz \\ &= \oint_{\gamma} f(z)dz = 0\end{aligned}$$

ובזאת הסתיימה הוכחת משפט קושי-גורסה המלא. ∎

נשאיר לתלמיד להוכיח את המסקנה הבאה כתרגיל.

מסקנה 5.13: תהי $f(z)$ פונקציה אנליטית מעל תחום פשוט-קשר D. אזי קיימת ל־f פונקציה קדומה מעל D, השווה עד כדי קבוע לפונקציה

$$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(w)\,dw$$

כאשר z_0 היא נקודה קבועה בתחום D.

הדרכה: יש לשים לב לכך כי על פי משפט קושי-גורסה, האינטגרל לאורך כל מסלול חלק למקוטעין בין הנקודה z_0 לנקודה z יניב את אותה תוצאה, ולכן לביטוי $\int_{z_0}^{z} f(w)\,dw$ יש מובן חד-משמעי.

5.4 נוסחת האינטגרל של קושי ומסקנותיה

המסקנה החשובה ביותר ממשפט קושי-גורסה היא נוסחת האינטגרל של קושי, אשר יש לה כמה מסקנות חשובות ושימושים רבים ומגוונים, כמו חישוב אינטגרלים של פונקציות ממשיות, אשר לא ניתן לפתור באמצעות השיטות של חדו"א 1 או 2.

שיטת "הגשר" לאיחוד מסלולים

למטרה זו נזדקק לכמה כלים טופולוגיים לטיפול במסלולים. נתחיל עם טכניקה פשוטה שבאמצעותה ניתן לאחד מספר מסלולים סגורים שונים לכדי מסלול סגור יחיד. נציין שוב שאיננו מוגבלים למסלולים פשוטים (שאינם נחתכים בנקודות ביניים).

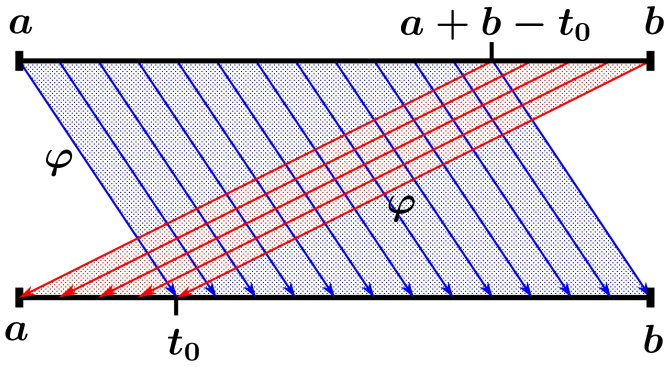
טענה 5.14: יהי $\sigma:[a,b]\to\mathbb{C}$ מסלול סגור, ותהי z_0 נקודה כלשהי על המסלול. אזי קיימת פרמטריזציה שקולה $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ אשר עבורה $\gamma(a)=\gamma(b)=z_0$.

הוכחה: במילים אחרות, אם σ מסלול סגור, אז לכל נקודה z_0 על המסלול יש פרמטריזציה שבה z_0 היא נקודת ההתחלה והסיום של המסלול. במידה ו־$\sigma(a)=\sigma(b)=z_0$ אז סיימנו. אחרת, קיימת נקודה $a<t_0<b$ כך ש־$\sigma(t_0)=z_0$. נגדיר פונקציית "סיבוב" $\varphi:[a,b]\to[a,b]$ על ידי

$$\varphi(t)=\begin{cases} t+t_0-a, & a\le t\le a+b-t_0 \\ t+t_0-b, & a+b-t_0<t\le b \end{cases}$$

הביטוי "סיבוב" מתייחס לפירוש גאומטרי שבו מדמים את הקטע הסגור בצורת מעגל שבו הנקודות a, b, מתלכדות לכדי נקודה אחת. שרטוט 5.9 מציג המחשה גאומטרית למה קורה תחת העתקת הסיבוב φ.

נגדיר פרמטריזציה $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ על ידי $\gamma(t)=\sigma(\varphi(t))$.

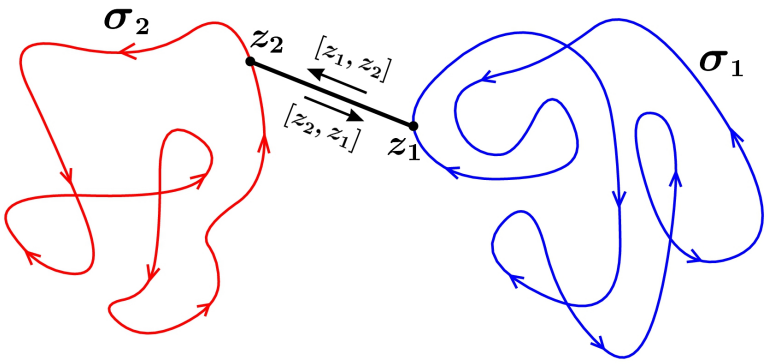


איור 5.9: פונקציית "סיבוב" $\varphi:[a,b]\to[a,b]$

לא קשה לוודא כי $\gamma(a)=\gamma(b)=z_0$. ∎

שיטת "הגשר" לאיחוד מסלולים סגורים:

יהיו $\boldsymbol{\sigma_1}:[a_1,b_1]\to\mathbb{C}$, $\boldsymbol{\sigma_2}:[a_2,b_2]\to\mathbb{C}$, שני מסלולים סגורים. תהי z_1 נקודה על המסלול $\boldsymbol{\sigma_1}$, ותהי z_2 נקודה על המסלול $\boldsymbol{\sigma_2}$. ניתן להשתמש בכל מסלול שמחבר בין z_1 ל־z_2, אבל ברוב המקרים הקטע הישר $[z_1,z_2]$ יספיק בהחלט.



איור 5.10: איחוד שני מסלולים s_1 , $\boldsymbol{\sigma_2}$, באמצעות גשר ישר

הרעיון פשוט מאוד: על סמך טענה 5.14 נוכל להניח כי

$$\boldsymbol{\sigma_1}(a_1)=\boldsymbol{\sigma_1}(b_1)=z_1,\quad \boldsymbol{\sigma_2}(a_2)=\boldsymbol{\sigma_2}(b_2)=z_2$$

נגדיר את המסלול המאוחד $\boldsymbol{\sigma}$ על ידי שירשור ארבעת המסלולים (ראה שרטוט 5.10)

$$\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\sigma_1}+[z_1,z_2]+\boldsymbol{\sigma_2}+[z_2,z_1]$$

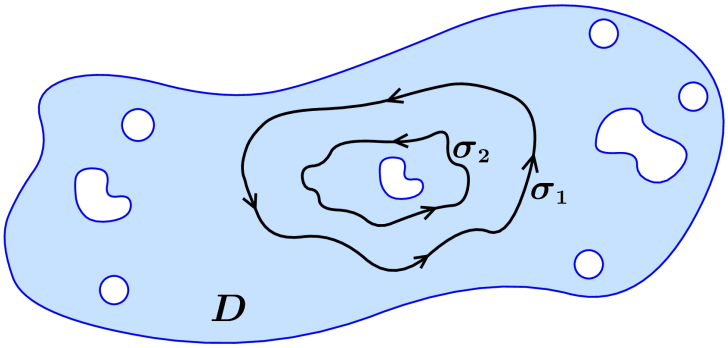
המסלול $\boldsymbol{\sigma}$ מתחיל בנקודה z_1, עובר דרך המסלול $\boldsymbol{\sigma}$ וחוזר לנקודה z_1, עובר דרך הקטע הישר $[z_1,z_2]$ ומגיע לנקודה z_2 (שהיא כאמור נקודת ההתחלה של $\boldsymbol{\sigma_2}$), עובר דרך המסלול $\boldsymbol{\sigma_2}$ וחוזר לנקודה z_2, ומשם דרך הקטע הישר $[z_2,z_1]$ חוזר לנקודת ההתחלה z_1.

נתחיל עם המסקנה הבאה של משפט קושי-גורסה שתעזור לנו בהמשך הדרך. המסקנה

מטפלת במקרים בהם הפנים של המסלול אינו כלול בשלמותו בתחום ההגדרה של הפונקציה. נשתמש במונח "מסלול ז'ורדן" בכדי לציין מסלול פשוט וסגור.

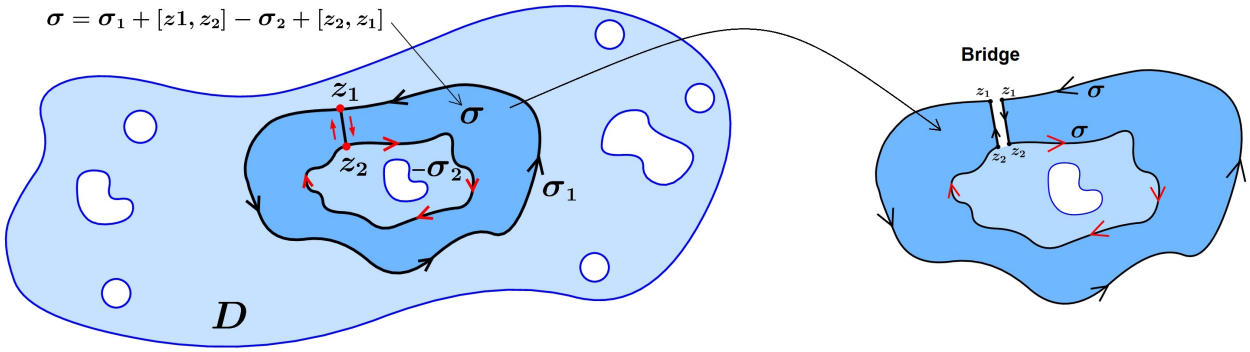
טענה 5.15: תהי $f(z)$ פונקציה אנליטית מעל תחום D. יהיו σ_1, σ_2 שני מסלולי ז'ורדן הכלולים בתחום D, ונניח כי σ_1 מקיף את σ_2. אם f אנליטית באזור שבין σ_1 ו־σ_2 (אך לא בהכרח אנליטית או מוגדרת בפנים של σ_2), אזי

$$\oint_{\sigma_1} f(z)dz = \oint_{\sigma_2} f(z)dz$$



איור 5.11: מסלול ז'ורדן σ_1 מקיף את מסלול ז'ורדן σ_2 אשר מקיף "חור" של D

הוכחה: נבחר נקודה z_1 על המסלול σ_1, ונקודה z_2 על המסלול σ_2 כך שהמרחק בין z_1 ל־z_2 מינימלי (ראה תרגיל 23 בפרק 2). המינימליות מבטיחה שהקטע $[z_1, z_2]$ אינו חותך שום מסלול בנקודות ביניים. על סמך טענה 5.14 נוכל להניח כי z_1 היא נקודת ההתחלה והסוף של σ_1, וכי z_2 היא נקודת ההתחלה והסוף של σ_2. ניצור גשר $[z_1, z_2]$ בין המסלול σ_1 והמסלול $-\sigma_2$ (זה המסלול s_2 בכיוון מהופך), ונגדיר באמצעותו מסלול חדש σ כפי שמתואר בשיטת הגשר בסעיף הקודם. ראה שרטוט 5.12.



איור 5.12: שיטת הגשר לחיבור שני מסלולים לכדי מסלול יחיד. הגשר הוא למעשה קטע יחיד שמחבר בין שני המסלולים.

זהו כמובן מסלול לא פשוט משום שהוא עובר פעמיים דרך הגשר $[z_1, z_2]$, אך הגירסה שלנו למשפט קושי-גורסה תומכת גם במסלולים כאלה. בצד ימין של שרטוט 5.12 הכפלנו את הגשר $[z_1, z_2]$ בכדי להמחיש את המסלול σ_1. כמובן זהו אמצעי המחשה בלבד ולא מדובר

בשני קטעים שונים אלא בקטע יחיד. נוכל לבטא את המסלול $\boldsymbol{\sigma}$ באמצעות הביטוי הבא

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma_1} + [z_1, z_2] + (-\boldsymbol{\sigma_2}) + [z_2, z_1]$$

מהשרטוט רואים שהמסלול $\boldsymbol{\sigma}$ עוקף את החור שמוקף על ידי המסלולים $\boldsymbol{\sigma_1}$, $\boldsymbol{\sigma_2}$, ולכן $\boldsymbol{\sigma}$ והפנים שלו כלולים בשלמותם בתחום D. לכן על פי משפט קושי-גורסה (משפט 5.8)

$$\oint_{\boldsymbol{\sigma}} f(z)dz = 0$$

לכן

$$\begin{aligned}
\oint_{\boldsymbol{\sigma}} f(z)dz &= \oint_{\boldsymbol{\sigma_1}+[z_1,z_2]+(-\boldsymbol{\sigma_2})+[z_2,z_1]} f(z)dz \\
&= \oint_{\boldsymbol{\sigma_1}} f(z)dz + \int_{[z_1,z_2]} f(z)dz + \oint_{-\boldsymbol{\sigma_2}} f(z)dz + \int_{[z_2,z_1]} f(z)dz \\
&= \oint_{\boldsymbol{\sigma_1}} f(z)dz + \int_{[z_1,z_2]} f(z)dz - \oint_{\boldsymbol{\sigma_2}} f(z)dz - \int_{[z_1,z_2]} f(z)dz \\
&= \oint_{\boldsymbol{\sigma_1}} f(z)dz - \oint_{\boldsymbol{\sigma_2}} f(z)dz = 0
\end{aligned}$$

לכן

$$\oint_{\boldsymbol{\sigma_1}} f(z)dz = \oint_{\boldsymbol{\sigma_2}} f(z)dz$$

■

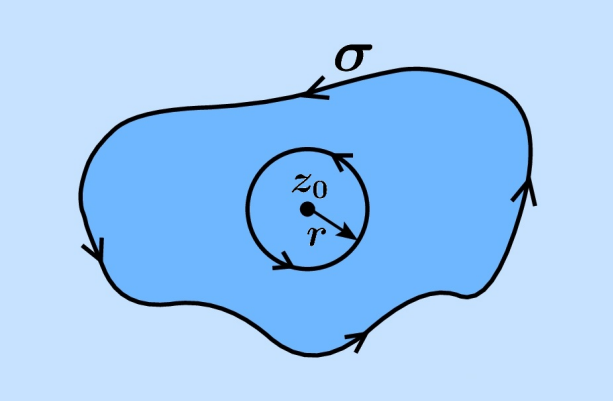
מסקנה 5.16: יהי $\boldsymbol{\sigma}$ מסלול ז'ורדן הכלול בתחום D, z_0 נקודה בתוך הפנים של $\boldsymbol{\sigma}$, ויהי $\boldsymbol{\sigma_r}$ מעגל סביב הנקודה z_0, אשר רדיוסו r, ואשר הפנים שלו מוכל בשלמותו בתוך הפנים של $\boldsymbol{\sigma}$. תהי $f(z)$ פונקציה אנליטית בתחום D פרט אולי לנקודה z_0. אזי

$$\oint_{\boldsymbol{\sigma}} f(z)dz = \oint_{\boldsymbol{\sigma_r}} f(z)dz \tag{5.15}$$

מסקנה 5.17: יהי $\boldsymbol{\sigma}$ מסלול ז'ורדן חלק למקוטעין, z_0 נקודה השייכת לפנים של $\boldsymbol{\sigma}$. אזי

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\boldsymbol{\sigma}} \frac{dz}{z - z_0} = 1 \tag{5.16}$$

הוכחה: מאחר והנקודה z_0 נקודה השייכת לפנים של המסלול $\boldsymbol{\sigma}$, קיים $r > 0$ כך שהעיגול



איור 5.13: אם מסלול ז'ורדן סגור וחלק למקוטעין σ מקיף את הנקודה z_0, אז $\oint_\sigma \frac{dz}{z-z_0} = 2\pi i$

$|z-z_0| < r$ כלול בתוך הפנים של σ. על פי המסקנה הקודמת

$$\oint_{\sigma} \frac{dz}{z-z_0} = \oint_{|z-z_0|=r} \frac{dz}{z-z_0}$$

את האינטגרל סביב העיגול ניתן לחשב בקלות על ידי הפרמטריזציה הסטנדרטית של העיגול:
$\sigma_r(t) = z_0 + re^{it}\ ,\ 0 \le t \le 2\pi$

$$\oint_{|z-z_0|=r} \frac{dz}{z-z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{\frac{d}{dt}[z_0+re^{it}]dt}{(z_0+re^{it})-z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}\,dt}{re^{it}} = i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i$$

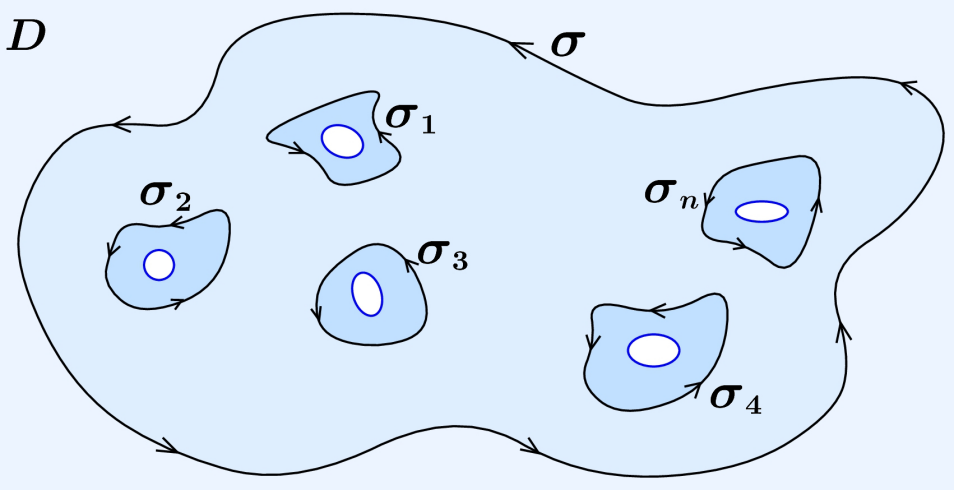
וקיבלנו את נוסחה (5.16). ■

על ידי שימוש חוזר בשיטת הגשר ניתן להכליל את טענה 5.15 באופן הבא. המסקנה הבאה תהיה חשובה מאוד עבור הוכחת משפט השארית של קושי (פרק 7).

מסקנה 5.18: יהיו $\sigma, \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n, n+1$ מסלולי ז'ורדן חלקים למקוטעין בתחום D בעל n חורים, כפי שמתואר בשרטוט 5.14. אזי

$$\oint_{\sigma} f(z)dz = \oint_{\sigma_1} f(z)dz + \oint_{\sigma_2} f(z)dz + \ldots + \oint_{\sigma_n} f(z)dz \tag{5.17}$$

הוכחה: נסתפק בסקיצה של רעיון ההוכחה מבלי להיכנס לכל הפרטים העדינים. בדומה להוכחת טענה 5.15, נעביר גשר $[z_k, w_k]$ בין כל מסלול σ_k למסלול הגדול σ. בשרטוט 5.15 ניתן לצפות בהמחשה ויזואלית שבה כל הגשרים הם קטעים ישרים, אך בפועל ייתכנו מצבים בהן יידרשו גשרים מצולעים מאחר ולא תמיד קיים קטע ישר בין σ למסלול σ_k. נחלק את המסלול σ ל־k מסלולים פשוטים $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$, בהתאם לנקודות החלוקה

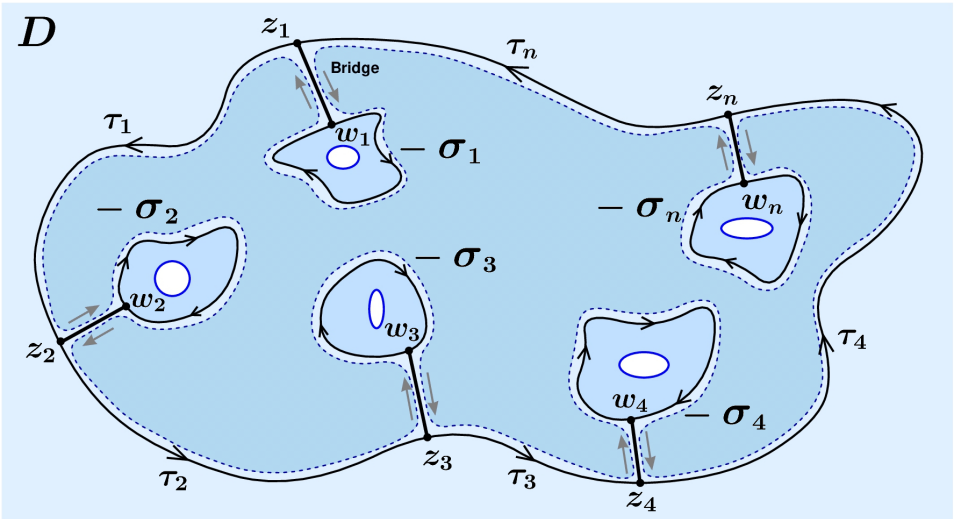


איור 5.14: האינטגרל לאורך המסלול המקיף שווה לסכום האינטגרלים לאורך המסלולים המוכלים בתוכו

$z_1, z_2, \ldots, z_n$ (לכל $k < n$, $\tau_k = [z_k, z_{k+1}]$, $\tau_n = [z_n, z_1]$).

$$
\begin{aligned}
\gamma \;=\; & [z_1, w_1] + (-\sigma_1) + [w_1, z_1] \\
& + \tau_1 + [z_2, w_2] + (-\sigma_2) + [w_2, z_2] + \\
& + \tau_2 + [z_3, w_3] + (-\sigma_3) + [w_3, z_3] + \\
& \vdots \\
& + \tau_{n-1} + [z_n, w_n] + (-\sigma_n) + [w_n, z_n] + \\
& + \tau_n
\end{aligned}
\tag{5.18}
$$

מהשרטוט רואים כי הפנים של המסלול γ (התחום שמודגש בצבע תכלת כהה ומוקף בקו מרוסק) כלול בתוך התחום D מאחר והוא עוקף את כל החורים (צבע לבן בשרטוט) ומשאיר אותם בחוץ. לכן על פי משפט קושי-גורסה 5.8, $\oint_\gamma f(z)dz = 0$.



איור 5.15: האינטגרל לאורך המסלול הגדול שווה לסכום האינטגרלים לאורך המסלולים המוכלים

כמו כן, יש לשים לב לכך שהכיוון של המסלולים σ_k התהפך, ומה שאנו רואים בשרטוט 5.15 הוא את המסלולים ההפוכים $-\sigma_k$. נגדיר מסלול חדש γ על ידי השירשור של המסלולים הללו כפי שרשום באגף ימין של (5.18). על סמך אריתמטיקה פשוטה של מסלולים המופיעים באגף ימין של שוויון (5.18), רואים כי כל הגשרים מתבטלים, סכום המסלולים τ_k יוצא σ,

$$\begin{aligned} 0 &= \oint_{\gamma} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{\tau_k} f(z)dz + \sum_{k=1}^{n} \oint_{-\sigma_n} f(z)dz \\ &= \oint_{\sigma} f(z)dz - \sum_{k=1}^{n} \oint_{\sigma_n} f(z)dz \end{aligned}$$

ולאחר העברה מאגף לאגף מקבלים את שוויון (5.17). ∎

נוסחת האינטגרל של קושי (Cauchy)

- המסקנה החשובה הראשונה שנקבל ממשפט קושי-גורסה היא **נוסחת האינטגרל של קושי**.
- ניתן לפרש את האינטגרל של פונקציה מרוכבת $f(z)$ לאורך מסלול σ כסוג של "סכום אינסופי" של ערכי הפונקציה $f(z)$ לאורך מסלול. אם נחלק את הסכום הזה באורך המסלול נקבל ממוצע של $f(z)$ על המסלול σ. אם נכפול כל ערך של $f(z)$ בפונקציית משקל $W(z)$ נקבל ממוצע משוקלל ($W(z)$ היא פונקציית המשקל).
- בקצרה: ביטוי מהצורה $\frac{1}{\ell(\sigma)} \oint_{\sigma} f(z)W(z)dz$ מייצג ממוצע משוקלל של f מעל σ. בנוסחת האינטגרל של קושי, פונקציית המשקל היא $W(z) = \frac{1}{z-z_0}$, עבור נקודה נתונה z_0 (כלומר משקלה של נקודה קטן ביחס הפוך למרחקה מהמרכז z_0). אם σ הוא מסלול ז'ורדן חלק למקוטעין, ואם f אנליטית על ובפנים של σ, אז נוסחת האינטגרל של קושי תטען כי הממוצע המשוקלל של f לאורך σ ביחס לפונקציית המשקל $\frac{1}{z-z_0}$ תיתן את $f(z_0)$. נציין רק שהאורך של σ מיוצג סימבולית על ידי $2\pi i$ (אורך זוויתי של מעגל)

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\sigma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

ובכך קיבלנו הנמקה אינטואיטיבית לנוסחת האינטגרל של קושי. נעבור לניסוח המדויק של המשפט.

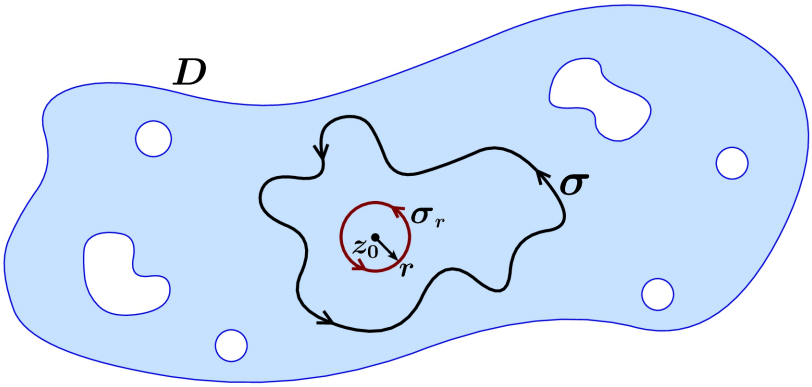
- בשתי ההוכחות הנ"ל השתמשנו במונחים "פנים" ו־"חוץ" של מסלול סגור מבלי לתת להם הגדרה מתמטית מדויקת. עבור מסלול פשוט, משפט ז'ורדן 2.13 (עמוד 69) נותן איפיון חד-משמעי לשני המונחים הללו, .אך אינו נותן מענה למקרה הכללי. במשך שנים רבות היתה סברה שמשפט ז'ורדן חיוני עבור קורס בפונקציות מרוכבות. לאחרונה מתפתחת גישה חדשה המתבססת על מושג האינדקס (או מספר הליפוף) של מסלול ביחס לנקודה, אשר

באמצעותו ניתן לתת הגדרה מדויקת וכללית יותר של **פנים** ו־**חוץ** עבור כל מסלול סגור (גם אם הוא נחתך בנקודות ביניים). בכדי לא להוסיף לעומס של הפרק הנוכחי, נושא זה מטופל בתרגילים 59-63 שבסוף הפרק.

משפט 5.19: (נוסחת האינטגרל של קושי Cauchy) תהי $f(z)$ פונקציה רציפה בתחום D, σ מסלול ז'ורדן חלק למקוטעין, בעל כיוון חיובי, אשר הוא והפנים שלו כלולים בתוך D, ותהי z_0 נקודה בתוך הפנים של σ. אזי

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\sigma}\frac{f(z)}{z-z_0}dz \tag{5.19}$$

הוכחה: במהלך ההוכחה נתייחס לשרטוט 5.16



איור 5.16: אינטגרציה של פונקציה $f(z)$ לאורך מסלול ז'ורדן חלק למקוטעין σ המקיף את הנקודה z_0

מאחר ו־z_0 נקודה פנימית קיים $r>0$ אשר עבורו המעגל σ_r סביב הנקודה z_0 כלול בשלמותו בתוך הפנים של המסלול σ.

על פי מסקנה 5.16

$$\oint_{\sigma}\frac{f(z)}{z-z_0}dz=\oint_{\sigma_r}\frac{f(z)}{z-z_0}dz \tag{1}$$

על פי נוסחת הקירוב הליניארי (טענה 3.20 בעמוד 114) קיימת פונקציה $\rho(z)$ בסביבת z_0 כך ש־

$$f(z)=f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)+\rho(z)(z-z_0)$$

וכך ש־ $\lim_{z\to z_0}\rho(z)=0$, ולכן

$$\oint_{\sigma_r}\frac{f(z)}{z-z_0}dz = \oint_{\sigma_r}\frac{f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)+\rho(z)(z-z_0)}{z-z_0}dz \tag{2}$$

$$= \oint_{\sigma_r}\frac{f(z_0)}{z-z_0}dz + \boxed{\oint_{\sigma_r} f'(z_0)dz} + \oint_{\sigma_r}\rho(z)dz \tag{3}$$

$$\boxed{=0}$$

$$= \oint_{\sigma_r}\frac{f(z_0)}{z-z_0}dz + \oint_{\sigma_r}\rho(z)dz \tag{4}$$

$$= f(z_0)\boxed{\oint_{\sigma_r}\frac{1}{z-z_0}dz} + \oint_{\sigma_r}\rho(z)dz \tag{5}$$

$$= \boxed{2\pi i}f(z_0) + \boxed{\oint_{\sigma_r}\rho(z)dz} \xrightarrow{r\to 0} 0 \tag{6}$$

א. במשוואה (3), האינטגרל השני $\oint_{\sigma_r} f'(z_0)dz = f'(z_0)\oint_{\sigma_r} 1\cdot dz$ מתאפס כי לפונקציה הקבועה $g(x)\equiv 1$ יש פונקציה קדומה על כל $\mathbb{C}$.

ב. קל לראות שהאינטגרל $\oint_{\sigma_r}\rho(z)dz$ שואף לאפס כאשר $r\to 0$

$$\left|\oint_{\sigma_r}\rho(z)dz\right| \le \ell(\sigma_r)\cdot \sup_{|z-z_0|=r}|\rho(z)| = 2\pi r\cdot \sup_{|z-z_0|=r}|\rho(z)| \xrightarrow[r\to 0]{} 0\cdot 0 = 0$$

אך למעשה אפשר לקבל $\oint_{\sigma_r}\rho(z)dz = 0$ ישירות ממסקנה 5.12 (כי $\rho(z)$ אנליטית וניתן להקיף את σ_r בעיגול שמוכל בתחום).

ג. במשוואה (5), המעבר מהאינטגרל $\oint_{\sigma_r}\frac{1}{z-z_0}dz$ לערך $2\pi i$ נובע ממסקנה 5.17.

ד. על פי משוואה (1) הערך של האינטגרל $\oint_{\sigma_r}\frac{f(z)}{z-z_0}dz$ אינו תלוי ברדיוס r, וזה מתאפשר רק אם $\oint_{\sigma_r}\rho(z)dz = 0$ לכל $r>0$ בתחום.

אנו נותרים לכן עם השוויון

$$\oint_{\sigma_r}\frac{f(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i f(z_0)$$

לכן על פי שוויון (1)

$$\oint_{\sigma}\frac{f(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i f(z_0)$$

וזוהי למעשה נוסחת האינטגרל של קושי. ∎

דוגמה 5: חשב את ערך האינטגרל $\oint_{\sigma}\frac{e^z}{z^2-2z}dz$ סביב המעגל הקנוני $|z|=3$.

פתרון: ניתן לבחור פרמטריזציה $\sigma(t)=3e^{it}$, $0\le t\le 2\pi$, אבל כל פרמטריזציה אחרת

תתאים כל עוד היא בכיוון חיובי.

$$\oint_{\sigma}\frac{e^z}{z^2-2z}dz=\frac{1}{2}\oint_{\sigma}\frac{e^z}{z-2}dz-\frac{1}{2}\oint_{\sigma}\frac{e^z}{z}dz=\frac{1}{2}\cdot 2\pi i e^2-\frac{1}{2}\cdot 2\pi i e^0=\pi i(e^2-1)$$

הפונקציה $f(z)=e^z$ אנליטית על כל המישור המרוכבת והנקודות $z=0$, $z=2$, כלולות בפנים של המעגל $|z|=3$. לכן על פי נוסחת האינטגרל של קושי

$$2\pi i f(z_0)=2\pi i e^{z_0}=\oint_{\sigma}\frac{f(z)}{z-z_0}dz=\oint_{\sigma}\frac{e^z}{z-z_0}dz$$

הצבת $z_0=0$, $z_0=2$ בנוסחה זו מניבה את התוצאה שקיבלנו בסוף החישוב.

מסקנה 5.20: (נוסחת הערך הממוצע) תהי $f(z)$ פונקציה אנליטית בעיגול סגור $\overline{\mathbb{D}}(z_0,r)$. אזי

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_0+re^{it})\,dt$$

הוכחה: מהנחת האנליטיות בעיגול הסגור נובע שקיימת קבוצה פתוחה D הכוללת את העיגול הסגור $\overline{\mathbb{D}}(z_0,r)$ אשר בה f אנליטית. על פי נוסחת האינטגרל של קושי

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-z_0|=r}\frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

נשתמש בפרמטריזציה $\sigma(t)=z_0+re^{it}$, $0\le t\le 2\pi$, עבור המעגל $|z-z_0|=r$

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(z_0+re^{it})}{re^{it}}\cdot ire^{it}\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_0+re^{it})\,dt$$

■

הסיבה לשם "נוסחת הערך הממוצע" שהוא מציין את אחת התכונות הבולטות שיש לפונקציה אנליטית: ערך הפונקציה $f(z)$ במרכז המעגל הוא הערך הממוצע של ערכיה סביב המעגל.

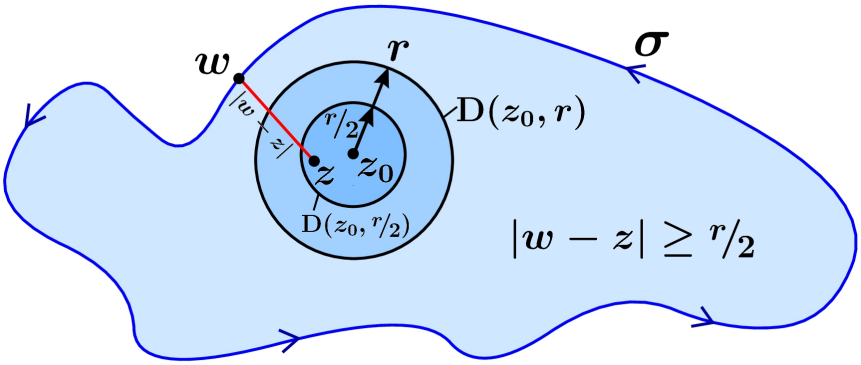
בשלב הבא נוכיח כי אם פונקציה אנליטית בנקודה, אז היא בהכרח גזירה בה מכל סדר! יתירה מזו, נקבל גם נוסחת נגזרת n-ית (נוסחת הנגזרת של קושי). לפני המשפט העיקרי נזדקק לטענת העזר הבאה.

טענה 5.21: תהי $g(w)$ פונקציה רציפה מעל מסלול ז'ורדן חלק למקוטעין σ. לכל נקודה z שאינה על σ נגדיר את הפונקציה

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\sigma}\frac{g(w)}{w-z}dw$$

אזי $f(z)$ אנליטית בקבוצה $\mathbb{C}-\sigma$.

הוכחה: תהי z_0 נקודה שאינה על המסלול σ. בשרטוט 5.18 בחרנו נקודה בתוך הפנים של σ, אבל באותה מידה ניתן לבחור נקודה חיצונית! נבחר $r>0$ כך שהדיסק $\mathbb{D}(z_0,r)$ אינו חותך את המסלול σ. מהבנייה ברור שלכל נקודה $w\in\sigma$ ולכל נקודה z בדיסק $\mathbb{D}(z_0,\frac{r}{2})$ מתקיים[5] $|w-z|\geq\frac{r}{2}$.



איור 5.18: שרטוט עזר לטענה 5.21

בכדי להוכיח כי f גזירה בנקודה z_0, ננסה להעריך את גודל הביטוי $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ ולהוכיח שהגבול שלו כאשר $z\to z_0$ קיים. נצטמצם לערכי z שנמצאים בדיסק $\mathbb{D}(z_0,r)$ בלבד.

$$\begin{aligned}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} &= \frac{1}{z-z_0}\cdot[f(z)-f(z_0)]\\ &= \frac{1}{z-z_0}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_\sigma\frac{g(w)}{w-z}-\frac{1}{2\pi i}\oint_\sigma\frac{g(w)}{w-z_0}\right]\\ &= \frac{1}{2\pi i(z-z_0)}\oint_\sigma\frac{g(w)[(w-z_0)-(w-z)]}{(w-z)(w-z_0)}\\ &= \frac{1}{2\pi i(z-z_0)}\oint_\sigma\frac{g(w)(z-z_0)}{(w-z)(w-z_0)}\\ &= \frac{1}{2\pi i}\oint_\sigma\frac{g(w)}{(w-z)(w-z_0)}\end{aligned}$$

מהשורה האחרונה ניתן לנחש ש־

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\frac{1}{2\pi i}\oint_\sigma\frac{g(w)}{(w-z_0)^2}dw$$

[5] פשוט: $|w-z|+|z-z_0|\geq|w-z_0|$ ולכן $|w-z|\geq|w-z_0|-|z-z_0|\geq r-\frac{r}{2}=\frac{r}{2}$

בכדי לאמת את הניחוש ננסה להעריך את גודל ההפרש

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}-\frac{1}{2\pi i}\oint_{\sigma}\frac{g(w)}{(w-z_0)^2}\right| &= \left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{\sigma}\left[\frac{g(w)}{(w-z)(w-z_0)}-\frac{g(w)}{(w-z_0)^2}\right]dw\right| \\ &= \left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{\sigma}\frac{g(w)}{w-z_0}\left[\frac{1}{w-z}-\frac{1}{w-z_0}\right]dw\right| \\ &= \left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{\sigma}\frac{g(w)}{w-z_0}\cdot\frac{z-z_0}{(w-z)(w-z_0)}dw\right| \\ &\le \frac{|z-z_0|}{2\pi i}\oint_{\sigma}\frac{|g(w)|}{|w-z|\cdot|w-z_0|^2}dw \\ &\le \frac{|z-z_0|}{2\pi i}\cdot\ell(\sigma)\cdot\frac{M}{\frac{r}{2}\cdot r^2} \xrightarrow[z\to z_0]{} 0\end{aligned}$$

כאשר $M=\mathrm{Max}_{w\in\sigma}|g(w)|$, ו־$\ell(\sigma)$ הוא אורך המסלול σ. כל הביטויים M, $\ell(\sigma)$, r הם ביטויים קבועים, אך הביטוי $|z-z_0|$ שואף לאפס כאשר $z\to z_0$! קיבלנו לכן

$$f'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\sigma}\frac{g(w)}{(w-z_0)^2}dw$$

■

משפט 5.22: תהי $g(w)$ פונקציה רציפה מעל מסלול ז'ורדן חלק למקוטעין σ. לכל נקודה z שאינה על σ נגדיר את הפונקציה

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\sigma}\frac{g(w)}{w-z}dw$$

אזי $f(z)$ גזירה מכל סדר n בתחום $\mathbb{C}-\sigma$ ובנוסף, לכל מספר טבעי n

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_{\sigma}\frac{g(w)}{(w-z)^{n+1}}dw \tag{5.20}$$

הוכחה: נשתמש באינדוקציה מתמטית. ההוכחה עבור $n=1$ נתונה במשפט הקודם. נניח כי טענת המשפט נכונה עבור מספר טבעי נתון n

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_{\sigma}\frac{g(w)}{(w-z)^{n+1}}dw$$

אזי

$$f^{(n+1)}(z)=\frac{d}{dz}\left[\frac{n!}{2\pi i}\oint_{\sigma}\frac{g(w)}{(w-z)^{n+1}}dw\right]$$

$$= \frac{n!}{2\pi i}\oint_{\sigma}\frac{d}{dz}\left[\frac{g(w)}{(w-z)^{n+1}}\right]dw$$

$$= \frac{n!}{2\pi i}\oint_{\sigma}\frac{(n+1)g(w)}{(w-z)^{n+2}}dw$$

$$= \frac{(n+1)!}{2\pi i}\oint_{\sigma}\frac{g(w)}{(w-z)^{n+2}}dw$$

החלפת סדר הגזירה והאינטגרציה בשורה השניה נובעת מכלל לייבניץ עבור פונקציות מרוכבות (לא קשה לבדוק שהתנאים מתקיימים). הניסוח המדויק וההוכחה של כלל לייבניץ נמצא בנספח שבסוף הפרק הנוכחי. ∎

הערות

1. את שלב האינדוקציה ניתן לבצע גם על ידי הערכת גודל ההפרש

$$\left|\frac{f^{(n)}(z)-f^{(n)}(z_0)}{z-z_0}-\frac{g(w)}{(w-z_0)^{n+2}}\right|$$

אבל יש שם סיבוך אלגברי לא פשוט (שימוש בנוסחת פירוק של $a^{n+1}-b^{n+1}$), ולכן במקרה זה השימוש בכלל לייבניץ מפשט את ההוכחה.

2. כלל לייבניץ שבו השתמשנו עבור שלב האינדוקציה אמור להיות הכללה של כלל לייבניץ המקורי עבור פונקציות מרוכבות, שכמובן מצריך מאמץ שלא נדרש בקורס. לתלמידים המתעניינים, ניסוח והוכחה מלאה מופיעים כנספח בסוף הפרק הנוכחי.

3. למעשה ניתן להתחיל את האינדוקציה מהשלב $n=1$. על פי ההגדרה

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\sigma}\frac{g(w)}{w-z}dw$$

ולכן על פי כלל לייבניץ

$$f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{d}{dz}\oint_{\sigma}\frac{g(w)}{w-z}dw=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\sigma}\frac{d}{dz}\left[\frac{g(w)}{w-z}\right]dw=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\sigma}\frac{g(w)}{(w-z)^2}dw$$

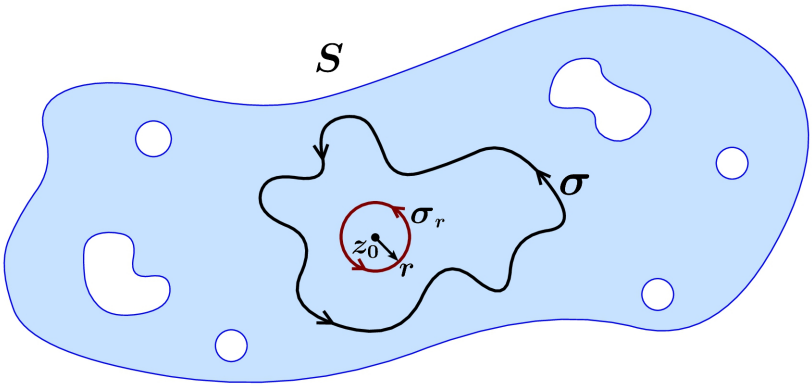
וזה כמובן חוסך את החישוב בתחילת ההוכחה של טענה 5.21.

4. המסקנה המיידית של טענה 5.21 היא שאם $f(z)$ אנליטית בתחום D אז יש לה נגזרות מכל סדר ב־D! בנוסף לכך מקבלים גם הכללה של נוסחת האינטגרל של קושי עבור הנגזרת ה־n־ית של f.

מסקנה 5.23: (נוסחת הנגזרת של קושי) אם $f(z)$ פונקציה אנליטית בקבוצה פתוחה S, אז f גזירה ב־S מכל סדר n, ובנוסף, לכל נקודה $z_0 \in S$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_{\sigma}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dw \tag{5.21}$$

עבור כל מסלול ז'ורדן חלק למקוטעין σ המקיף את הנקודה z_0, והפנים שלו כלול ב־S.



איור 5.19: אינטגרציה של פונקציה $f(z)$ לאורך מסלול ז'ורדן חלק למקוטעין σ המקיף את הנקודה z_0

הוכחה: תהי $z_0 \in S$ נקודה נתונה בקבוצה הפתוחה S, ויהי σ_r מסלול מעגלי סביב z_0 ברדיוס r, הכלול ב־S יחד עם הפנים שלו. על פי נוסחת האינטגרל של קושי (משפט 5.19)

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\sigma_r}\frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

על פי משפט 5.22, f גזירה מכל סדר ומתקיים

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_{\sigma_r}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$$

אם $\sigma:[a,b]\to\mathbb{C}$ מסלול ז'ורדן חלק למקוטעין שמקיף את z_0 בכיוון החיובי, אז פונקציית המרחק $h(t)=|\sigma(t)-z_0|$ היא פונקציה רציפה מעל הקטע הסגור $[a,b]$, ולכן מקבלת בו מינימום $r_0>0$. לכן נוכל לבחור $0<r<r_0$ כך שהמעגל σ_r יהיה כלול בתוך הפנים של המסלול σ, כפי שרואים בשרטוט 5.19. על פי מסקנה 5.16

$$\oint_{\sigma}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz = \oint_{\sigma_r}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$$

ולכן נקבל גם את הנוסחה

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_{\sigma}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$$

עבור כל מסלול ז'ורדן חלק למקוטעין σ המקיף את z_0 בכיוון חיובי. ■

דוגמה 6: חשב את ערך האינטגרל הקווי $\oint_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^3} dz$

פתרון: הביטוי z^3 מזמין שימוש בנוסחה (5.21) (מסקנה 5.23). נציב את $f(z) = \cos z$, $z_0 = 0$, $n = 2$.

$$f^{(2)}(0) = -\cos 0 = -1 = \frac{2!}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^3} dz$$

קיבלנו לכן

$$\oint_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^3} dz = -\pi i$$

מסקנה 5.24: (אי-שוויון קושי) תהי $f(z)$ פונקציה אנליטית על ובתוך מסלול מעגלי σ_r שמרכזו z_0 ורדיוסו $r > 0$. אזי עבור כל n טבעי

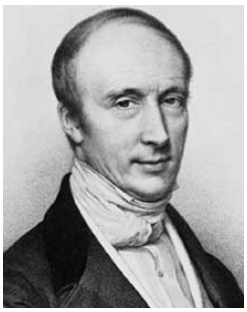
$$\left| f^{(n)}(z_0) \right| \le \frac{n! M}{r^n}$$

כאשר $M = \underset{z \in \sigma_r}{\text{Max}} |f(z)|$.

הוכחה: על פי נוסחת הנגזרת של קושי

$$\begin{aligned} |f^{(n)}(z_0)| &= \left| \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\sigma_r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \right| \le \frac{n!}{2\pi} \cdot \ell(\sigma_r) \cdot \frac{\underset{z \in \sigma_r}{\text{Max}} |f(z)|}{r^{n+1}} \\ &= \frac{n!}{2\pi} \cdot 2\pi r \cdot \frac{M}{r^{n+1}} = \frac{n! M}{r^n} \end{aligned}$$

מסקנה 5.25: יהיו $f(z)$, $g(z)$, שתי פונקציות אנליטיות המוגדרות על ובתוך מסלול ז'ורדן חלק למקוטעין σ. אם $f(z) = g(z)$ על המסלול σ אז שתי הפונקציות זהות גם בתוך המסלול.



איור 5.20: Augustin-Louis Cauchy
1789-1857



איור 5.21: Édouard Goursat
1858-1936



איור 5.22: Joseph Liouville
1809-1882

משפט ליוביל (Joseph Liouville 1809-1882)

מסקנה חשובה נוספת של נוסחת האינטגרל של קושי היא **משפט לִיוּבִיל**, שהוא אחד מאבני היסוד של האנליזה המרוכבת. כזכור, פונקציה שלמה היא פונקציה אנליטית המוגדרת על כל המישור המרוכב.

משפט 5.26: (משפט לִיוּבִיל) תהי $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ פונקציה שלמה. אם f חסומה אז f היא פונקציה קבועה.

הוכחה: נניח כי $|f(z)|\le M$ עבור כל $z\in\mathbb{C}$. יהי z_0 מספר מרוכב נתון. לכל ממשי חיובי $r>0$, נסמן על ידי $\boldsymbol{\sigma}_r$ את המעגל שרדיוסו r סביב הנקודה z_0 (כיוון חיובי). על פי מסקנה 5.24

$$|f'(z_0)|\le\frac{\underset{z\in\boldsymbol{\sigma}_r}{\mathrm{Max}}|f(z)|}{r}\le\frac{M}{r}\quad\xrightarrow[r\to\infty]{}\quad 0$$

אי-השוויון שמובטח לנו על פי מסקנה 5.24 מתקיים עבור כל רדיוס r. לכן כאשר הרדיוס r שואף לאינסוף, אגף ימין של אי-השוויון שואף לאפס. לכן בהכרח $f'(z_0)=0$ עבור כל נקודה $z_0\in\mathbb{C}$. על פי טענה 4.5, f חייבת להיות פונקציה קבועה על כל $\mathbb{C}$. ∎

במילים אחרות, טענת משפט ליוביל היא שכל פונקציה שלמה לא-קבועה היא בהכרח לא-חסומה. אחת המסקנות החשובות ממשפט ליוביל היא המשפט היסודי של האלגברה.

משפט 5.27: (המשפט היסודי של האלגברה)
לכל פולינום לא קבוע יש לפחות שורש אחד.

הוכחה: יהי $p(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n$ פולינום לא קבוע. אם ל־$p(z)$ אין שורשים אז $f(z)=\frac{1}{p(z)}$ היא פונקציה שלמה ובנוסף

$$|f(z)|=\left|\frac{1}{p(z)}\right|=\frac{1}{|z|^n}\cdot\frac{1}{\left|\frac{a_0}{z^n}+\frac{a_1}{z^{n-1}}+\cdots+a_n\right|}\quad\xrightarrow[|z|\to\infty]{}\quad\frac{1}{\infty}\cdot\frac{1}{|0+0+\cdots+a_n|}=0$$

לכן קיים רדיוס R כך ש־$|f(z)|<1$ עבור כל $|z|>R$. המודול $|f(z)|$ הוא פונקציה חסומה בדיסק $|z|\le R$ על פי משפט וויירשטראס (פונקציה רציפה מעל קבוצה סגורה וחסומה). קיבלנו ש־$f(z)$ שלמה וחסומה על $\mathbb{C}$, ולכן על פי משפט ליוביל היא חייבת להיות קבועה על $\mathbb{C}$, ולכן $p(z)$ פולינום קבוע בסתירה לנתון. לכן בהכרח ל־$p(z)$ יש שורש אחד לפחות. ∎

הגדרה 5.5: מספר z_1 נקרא **שורש בעל ריבוי** k של פולינום $p(z)$ אם קיים פולינום $q(z)$

כך ש־

$$p(z) = (z - z_1)^k q(z)$$

ובנוסף $q(z_1) \neq 0$.

משפט 5.28: יהי $p(z)$ פולינום ממעלה n, ויהיו $z_1, z_2, \ldots, z_m$ כל השורשים השונים שלו. יהיו $k_1, k_2, \ldots, k_m$ הריבוים של כל אחד מהשורשים על פי אותו סדר. אזי $k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n$, ובנוסף

$$p(z) = (z - z_1)^{k_1}(z - z_2)^{k_2} \cdots (z - z_m)^{k_m}$$

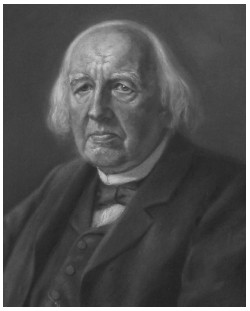
הוכחה: על פי המשפט היסודי של האלגברה קיים שורש z_1. יהי k_1 הריבוי שלו, ויהי $q_1(z)$ פולינום שעבורו $p(z) = (z - z_1)^{k_1} q_1(z)$. שוב, על פי המשפט היסודי של האלגברה קיים שורש z_2 עבור הפולינום $q_1(z)$. יהי k_2 הריבוי של z_2, ויהי $q_2(z)$ פולינום שעבורו $q_1(z) = (z - z_2)^{k_2} q_2(z)$. נוכל להמשיך כך עד שנקבל $k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n$. החלק השני ברור. ∎



איור 5.23: Giacinto Morera
1856-1909



איור 5.24: Bernhard Riemann
1826-1866



איור 5.25: Karl Weierstrass
1815-1897

5.5 משפט מוררה (Giacinto Morera 1856-1909)

בסעיף הקודם הוכחנו את אחת התכונות הכי חשובות של פונקציה אנליטית: האינטגרל הקווי לאורך כל מסלול חלק למקוטעין הכלול בתחום ההגדרה שלה מתאפס תמיד.

המתמטיקאי האיטלקי **ג'סינטו מוֹרֶרָה** (1856-1909), שחקר את נושא הפונקציות המרוכבות, ביקש לדעת האם תכונה זו מאפיינת את הפונקציות האנליטיות? או האם קיימות פונקציות בעלות תכונה זו שאינן אנליטיות?

המשפט הקרוי על שמו של מוררה נותן תשובה חיובית לשאלה: התאפסות האינטגרל הקווי על מסלולי ז'ורדן חלקים למקוטעין היא אכן תכונה המאפיינת פונקציות אנליטיות בלבד.

משפט 5.29: (משפט מוררה) תהי $f(z)$ פונקציה רציפה בתחום D אשר האינטגרל הקווי שלה מתאפס מעל כל מסלול משולש הכלול ב־D (יחד עם הפנים שלו). אזי f פונקציה אנליטית מעל D.

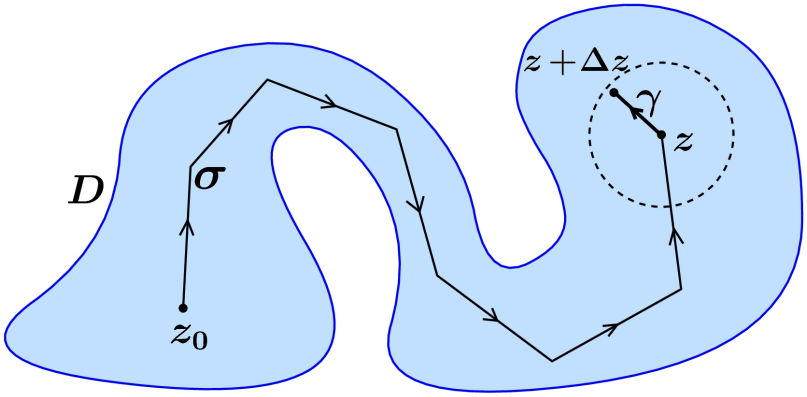
הוכחה: כפי שראינו בהוכחת משפט קושי-גורסה (משפט 5.8) כל מסלול מצולע ניתן לפרק לסכום של מסלולים משולשים, ולכן אנו מקבלים כי $\oint_{\sigma} f(z)dz = 0$ לכל מסלול מצולע σ. על סמך הטיעון שפגשנו בהוכחת מסקנה 5.9, התכונה הקודמת שקולה לכך ש־

$$\oint_{\sigma_1} f(z)dz = \oint_{\sigma_2} f(z)dz$$

עבור כל שני מסלולים מצולעים σ_1, σ_2, בתחום D, שמתחילים ומסיימים באותן נקודות קצה (ראה שרטוט 5.3). תהי $z_0 \in D$ נקודה נתונה. על סמך משפט 2.11 (עמוד 66), לכל נקודה $z \in D$, קיים מסלול מצולע σ בתוך התחום D המחבר בין הנקודה z_0 לנקודה z (ראה שרטוט 5.26). נגדיר

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(w)\,dw = \int_{\sigma} f(w)\,dw$$

כאשר σ הוא מסלול מצולע כלשהו ב־D המחבר בין z_0 ל־z (שהרי כל המסלולים המצולעים בין z_0 ל־z יניבו את אותו ערך!).



איור 5.26: הגדרת פונקציה פרימיטיבית $F(z) = \int_{z_0}^{z}$ באמצעות אינטגרל לאורך מצולע מ־z_0 ל־z

נוכיח כי F היא פונקציה אנליטית ושהנגזרת שלה היא הפונקציה $f(z)$. למטרה זו, נתבונן בסביבה קטנה של הנקודה z הכלולה בתוך D, ותהי $z+\Delta z$ נקודה כלשהי בסביבה זו שמתקבלת על ידי התוספת Δz לנקודה z. יהי $\gamma = [z, z+\Delta z]$ הקטע המחבר בין הנקודה z לנקודה $z+\Delta z$. עלינו להוכיח כי

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} = f(z)$$

לשם כך נבחין כי

$$F(z+\Delta z)-F(z)=\int_{\sigma+\gamma}f(w)dw-\int_{\sigma}f(w)dw=\int_{\gamma}f(w)dw \tag{5.22}$$

נסמן $z=x+iy$, $\Delta z=a+bi$. פרמטריזציה פשוטה של הקטע γ היא

$$\gamma(t)=(x+at)+(y+bt)i,\quad 0\le t\le 1$$

לכן

$$\int_{\gamma}f(w)dw=\int_0^1 f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt=\int_0^1 f(\gamma(t))\cdot(a+bi)\,dt=\Delta z\cdot\int_0^1 f(\gamma(t))\,dt$$

ולכן

$$\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}=\frac{1}{\Delta z}\cdot\int_{\gamma}f(w)dw=\int_0^1 f(\gamma(t))\,dt$$

נשתמש בכתיב קרטזי $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$. משוויון (5.22) מקבלים

$$\begin{aligned}\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z} &= \int_0^1 f(\gamma(t))\,dt\\ &= \int_0^1 u(x+at,y+bt)\,dt+i\int_0^1 v(x+at,y+bt)\,dt\end{aligned}$$

מבחינת הדיון, הפונקציות $u(x+at,y+bt)$, $v(x+at,y+bt)$, הן פונקציות של המשתנה היחיד t. על פי משפט ערך הביניים האינטגרלי (עבור פונקציה עם משתנה בודד t), קיימים t_1 , t_2 , בקטע $[0,1]$ עבורם

$$\begin{aligned}\int_0^1 u(x+at,y+bt)\,dt &= u(x+at_1,y+bt_1)\\ \int_0^1 v(x+at,y+bt)\,dt &= v(x+at_2,y+bt_2)\end{aligned}$$

ולכן אנו מקבלים

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{\Delta z}=u(x+at_1,y+bt_1)+iv(x+at_2,y+bt_2)$$

כאמור, $0\le t_1\le 1$, $0\le t_2\le 1$. לכן אנו מקבלים

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}=\lim_{\substack{a\to 0\\ b\to 0}}\left[u(x+at_1,y+bt_1)+iv(x+at_2,y+bt_2)\right]$$

$$= u(x,y) + iv(x,y)$$

$$= f(z)$$

קיבלנו כי $F(z)$ גזירה בנקודה z ומקיימת $F'(z) = f(z)$. על פי נוסחת הנגזרת של קושי (מסקנה 5.23), $F(z)$ גזירה מכל סדר בתחום D! לכן גם $f(z)$ אנליטית בתחום D. ∎

הערות

1. למעשה הוכחנו כי אם f מקיימת את תנאי המשפט אז יש לה פונקציה קדומה $F(z)$. עובדה זו עשויה להיות שימושית בהקשרים אחרים.
2. ברוב הספרים משפט מוררה מנוסח במונחים של מסלולים סגורים כלליים או מלבניים. יש לשים לב לכך שבחרנו במסלולים משולשים! אך כמובן כל הנוסחים האלה שקולים בסופו של דבר.
3. למרות זאת, ייתכן שבתרגילים שונים יהיה יתרון לשימוש דווקא במסלולים מרובעים או עגולים! ברור שנוכל להשתמש בהן במקום מסלולים משולשים אם זה יידרש.
4. נקודה נוספת שיש לציין היא שנוכל בהקשרים שונים להסתפק במשולשים קטנים כרצוננו או במשולשים מסוג מסוים (כגון משולשים ישרי זווית) מאחר וכל מסלול משולש ניתן לפרק לסכום של מסלולים משולשים קטנים כרצוננו (כמו-כן כל משולש ניתן לפרק לסכום ו/או הפרש של משולשים ישרי זווית).

למשפט מוררה יש שימושים חשובים ומעניינים. נביא למשל את מסקנה הבאה שאלמלא משפט מוררה היה מאוד קשה להוכיח. המשפט יובן ויוצג בהרחבה במשפט 6.18 בפרק הבא על טורים.

דוגמה 7: תהי $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות אנליטיות מעל תחום D, המתכנסת במידה שווה לפונקציה $f(z)$. אזי גם הפונקציה $f(z)$ אנליטית מעל התחום D.

הוכחה: נוכיח כי $\oint_{\sigma} f(z)\,dz = 0$ עבור כל מסלול משולש σ בתחום D. לכן ממשפט מוררה יינבע כי f אנליטית בתחום D. התכנסות במידה שווה מעל קבוצה קומפקטית σ גוררת כי $\text{Max}_{t\in[a,b]}\,|f(\sigma(t)) - f_n(\sigma(t))| \to 0$, ולכן

$$\left|\oint_{\sigma} f(z)\,dz - \oint_{\sigma} f_n(z)\,dz\right| \le \oint_{\sigma} |f(z) - f_n(z)|\,dz \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

קיבלנו לכן

$$\oint_{\sigma} f(z)\,dz = \lim_{n\to\infty} \oint_{\sigma} f_n(z)\,dz = 0$$

לכן גם f אנליטית מעל D. ∎

*נושא סדרות וטורים של פונקציות מכוסה בפרק הבא, במשפט 6.18, ולכן אפשר בינתיים לדלג על דוגמא זו למי שאין רקע בנושא.

5.6 עקרון המקסימום

אחת מהמסקנות המיידיות של נוסחת הערך הממוצע שהוכחנו בחלק השלישי של הפרק הנוכחי (מסקנה 5.20) היא **עקרון המקסימום** שטוען כי פונקציה אנליטית מעל תחום חסום שאינה קבועה לעולם לא תקבל מקסימום או מינימום מוחלט בנקודה פנימית של תחום ההגדרה שלה. באותה המידה לא תיתכן נקודת מקסימום או מינימום מקומי בנקודה פנימית של תחום ההגדרה.

הגדרה 5.6: (מינימום ומקסימום מוחלט) תהי $f(z)$ פונקציה המוגדרת מעל קבוצה S. נקודה $z_0 \in S$ נקראת **נקודת מקסימום מוחלט** של הפונקציה f בקבוצה S, אם לכל $z \in S$, $|f(z)| \leq |f(z_0)|$. המספר $M = |f(z_0)|$ נקרא **המקסימום המוחלט** של f מעל S. באופן דומה נגדיר מהי **נקודת מינימום מוחלט** ומהו **מינימום מוחלט**.

קיימים מספר ניסוחים של עקרון המקסימום. נציג שני ניסוחים שביניהם הניסוח השני יהיה הניסוח הרישמי שלנו, אבל הניסוח הראשון חשוב להוכחת הניסוח השני. בכדי לא להתבלבל, לניסוח הראשון מקובל לקרוא **עקרון המודול המקסימלי**, ומה שהוא טוען בקיצור הוא: אם המודול $|f(z)|$ של פונקציה אנליטית בתחום D מקבל מקסימום מוחלט בנקודה פנימית של D, אז f היא פונקציה קבועה על D.

משפט 5.30: (עקרון המודול המקסימלי) תהי f אנליטית בתחום D. אם קיימת נקודה פנימית $z_0 \in D$ כך שלכל $z \in D$, $|f(z)| \leq |f(z_0)|$, אזי f קבועה על D.

הוכחה: על פי טענה 4.7 (עמוד 131) יספיק להוכיח כי $|f(z)|$ קבועה בתחום D. נניח שקיימת נקודה z_0 בתוך D שבה f מקבלת ערך מקסימלי M

$$\forall z \in D: \quad |f(z)| \leq |f(z_0)| = M$$

על פי נוסחת הערך הממוצע (מסקנה 5.20), לכל $r > 0$ אשר עבורו הדיסק $\overline{\mathbb{D}}(z_0, r)$ כלול בתחום D,

$$|f(z_0)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(z_0 + re^{it}) \right| dt$$

מהנתון $M = |f(z_0)| \geq |f(z)|$ נקבל

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})|dt \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0)|dt = |f(z_0)|$$

ולכן

$$|f(z_0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})|dt$$

נוכל לרשום זאת גם כך

$$\begin{aligned} 0 &= |f(z_0)| - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})|dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0)|dz - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})|dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left[|f(z_0)| - |f(z_0 + re^{it})|\right] dt \end{aligned}$$

קיבלנו שהאינטגרל של הפונקציה האי-שלילית והרציפה $|f(z_0)| - |f(z_0 + re^{it})|$ (כזכור $|f(z_0)| = \operatorname{Max}|f(z)|$!) מתאפס ולכן על פי חדו"א 1, הפונקציה חייבת להתאפס זהותית[6]. לכן $f(z) = f(z_0)$ עבור כל z על המעגל $|z - z_0| = r$, עבור כל r שהדיסק המתאים כלול ב־D. מאחר וזה נכון לכל המעגלים, אז זה נכון לכל הסביבה.

לסיכום, קיבלנו את התכונה הכללית: אם z נקודה כלשהי שבה מתקבל המקסימום $f(z) = M$, אז כל הנקודות בסביבת z מקבלות את אותו ערך M.

נגדיר את הקבוצה הבאה

$$E = \{\, z \in D \,:\, |f(z)| = M \,\}$$

על סמך התכונה שהוכחנו E קבוצה פתוחה ולא ריקה. גם הקבוצה $D - E$ פתוחה, כי אם $z_1 \in D - E$, כלומר $|f(z_1)| < M$, אז מהרציפות של f נובע שקיימת סביבה של z_1 שכל הנקודות בה מקיימות $|f(z)| < M$. מאחר והתחום D קשיר ו־ $E \neq \emptyset$, $D - E = \emptyset$. כלומר $E = D$. ∎

משפט 5.31: (עקרון המקסימום) תהי $f(z)$ פונקציה אנליטית בתחום חסום D, ורציפה בקבוצה הסגורה $\overline{D}$. אזי המודול $|f(z)|$ מקבל את המקסימום המוחלט שלו בשפת D.

הוכחה: מאחר ו־D תחום חסום, אז הסגור שלו $\overline{D}$ הוא קבוצה קומפקטית (קבוצה סגורה וחסומה). על פי הנתון, $|f(z)|$ רציפה על $\overline{D}$, ולכן על פי משפט ווייארשטראס (ראה משפט 3.14 בעמוד 109), היא מקבלת מינימום ומקסימום מוחלטים ב־$\overline{D}$.

[6] ראה למשל את הקישור הבא: If integral is zero and function is continuous and non negative then $f \equiv 0$

תיתכנה שתי אפשרויות: א. הפונקציה $|f(z)|$ קבועה, ואז המינימום והמקסימום המוחלטים מתקבלים על כל $\overline{D}$, כולל השפה. ב. הפונקציה $|f(z)|$ אינה קבועה, ולכן על פי המשפט הקודם אינה יכולה לקבל את המקסימום המוחלט שלה בתוך D, ולכן בהכרח הוא מתקבל על שפת D. ∎

מסקנה 5.32: (עקרון המינימום) תהי $f(z)$ פונקציה אנליטית בתחום חסום D, רציפה בקבוצה הסגורה $\overline{D}$, ואינה מתאפסת ב־$\overline{D}$. אזי המודול $|f(z)|$ מקבל את המינימום המוחלט שלו בשפת D.

הוכחה: נגדיר את הפונקציה $g(z)=1/f(z)$. אזי g מקיימת את תנאי עקרון המקסימום ולכן מקבלת את המקסימום המוחלט שלה בשפת D. כלומר קיימת נקודה $z_0\in\partial D$ כך שלכל $z\in D$, $|g(z)|\le|g(z_0)|$. לכן לכל $z\in D$, $|f(z)|\ge|f(z_0)|$, וקיבלנו כי המינימום המוחלט מתקבל על שפת D. ∎

דוגמה 8: תהי $f(z)$ פונקציה לא קבועה ואנליטית בעיגול $|z-1|\le 2$ (כולל השפה). נניח ש־$|f(z)|=3$ על שפת העיגול הנ"ל, הוכח של־f יש שורש אחד לפחות בתוך העיגול.

פתרון: נניח בשלילה $f(z)\neq 0$ לכל z בעיגול. נגדיר $g(z)=\frac{1}{f(z)}$. אזי $|g(z)|=\frac{1}{3}$ על שפת העיגול. על פי עקרון המקסימום $|g(z)|\le\frac{1}{3}$ עבור כל נקודה בעיגול $|z-1|\le 2$. לכן $|f(z)|\ge 3$ על כל העיגול. קיבלנו $|f(z)|=3$ על כל העיגול, ולכן על פי טענה 4.7, $f(z)$ קבועה על העיגול, בסתירה לנתון.

דוגמה 9: מצא את המקסימום המוחלט של $f(z)=\sin z$ במלבן $[0,\pi]\times[0,1]$

פתרון: על פי עקרון המקסימום, המקסימום המוחלט של $|\sin z|$ צריך להתקבל על שפת המלבן. קל לבדוק כי

$$|\sin z|=\sqrt{\sin^2 x+\sinh^2 y}\quad(z=x+iy)$$

הפונקציה $\sin^2 x$ מקבלת ערך מקסימלי 1 בנקודה $x=\frac{\pi}{2}$, והפונקציה $\sinh^2 y$ היא פונקציה מונוטונית עולה, ולכן מגיעה למקסימום בנקודה $y=1$. ולכן המקסימום המוחלט של $\sin z$ חייב להתקבל בנקודה $(x,y)=(\frac{\pi}{2},1)$. המקסימום המוחלט של $|\sin z|$ במלבן הוא לכן $\sqrt{1+(e-e^{-1})/2}$.

מסקנה נוספת שניתן להסיק מעקרון המקסימום היא אי אפשרות של מקסימום מקומי עבור פונקציה אנליטית. נקודת מקסימום מקומי z_0 מוגדרת כנקודה שבה המודול $|f(z)|$ מקבל ערך מקסימלי בסביבה $\mathbb{D}(z_0,\varepsilon)$. מצב כזה אינו אפשרי על פי עקרון המודול המקסימום, כי אז הפונקציה תהיה קבועה בסביבה $\mathbb{D}(z_0,\varepsilon)$.

- מינימום מקומי השווה 0 הוא אפשרי. למשל $f(z)=z^2(5-z)$ מקבלת מינימום מקומי בנקודה $z=0$. אך לא ייתכן מינימום מקומי שהוא חיובי ממש.

5.7 נספח: כלל לייבניץ עבור אינטגרל של פונקציה מרוכבת

- כלל לייבניץ עבור פונקציות מרוכבת אינו כלול בתוכנית הקורס, ובדרך כלל אינו נכלל בספרי לימוד על פונקציות מרוכבות, אך הוא שימושי מאוד עבור הוכחת כמה משפטים בנושא (אשר בלעדיו הוכחתם מסובכת מאוד). אנו כוללים את הנספח הזה בחוברת עבור תלמידים בעלי מוטיבציה להבין יותר לעומק את חומר הלימוד, אך כל מה שדרוש לנו עבור הקורס הוא הבנת המשפט עצמו והיכולת להשתמש בו במקומות בהם הוא נדרש.
- כזכור מקורסי חדו"א או אינפי 2, הכלל של לייבניץ מאפשר לנו להחליף את סדר הגזירה והאינטגרציה בהקשרים שונים, ובכך לפשט תהליכי חישוב שעשויים להיות מורכבים מאוד בדרכים אחרות. לדוגמא, כלל לייבניץ מפשט באופן משמעותי את הוכחת נוסחת הנגזרת של קושי.
- הוכחת הכלל מצריכה שימוש יותר מתקדם בכלים של אנליזה ולכן אינה כלולה לרוב בקורסי מבוא. נשתדל למרות זאת להסביר אותה עבור התלמידים המתעניינים. אנו מתבססים על ההוכחה שניתנה בקישור הבא (בשינויים קלים של סימונים):

Rigorous Proof of Leibniz's Rule for Complex Function

משפט 5.33: (כלל לייבניץ עבור אינטגרל של פונקציה מרוכבת)

תהי $g(t,z)$ פונקציה מרוכבת בשני משתנים $g:[a,b]\times D\to\mathbb{C}$ כאשר

א. $[a,b]$ הוא קטע ממשי סגור, D קבוצה פתוחה במישור המרוכב $\mathbb{C}$.

ב. g רציפה בקבוצה $[a,b]\times D$

ג. לכל t בקטע $[a,b]$, $g(t,z)$ אנליטית ב־D

ד. הנגזרת החלקית $\frac{\partial g}{\partial z}$ רציפה בקבוצה $[a,b]\times D$

אזי הפונקציה

$$f(z)=\int_a^b g(t,z)dt \tag{5.23}$$

אנליטית מעל D ובנוסף מתקיים

$$f'(z)=\frac{d}{dz}\int_a^b g(t,z)dt=\int_a^b \frac{\partial g}{\partial z}(t,z)dt \tag{5.24}$$

הוכחה: נקפיא נקודה $z_0 \in D$. עלינו להוכיח כי

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = \int_a^b \frac{\partial g}{\partial z}(t,z)dt$$

מהנתון קיים $r>0$ כך שהפונקציה $\frac{\partial g}{\partial z}(t,z)$ רציפה בדיסק הסגור $\overline{\mathbb{D}}(z_0,r)$ ולכן גם $\frac{\partial g}{\partial z}(t,z)$ רציפה במידה שווה בקבוצה $S=[a,b]\times\overline{\mathbb{D}}(z_0,r)$ (מכפלה של שתי קבוצות סגורות וחסומות).

יהי h מספר מרוכב המקיים $0<|h|<r$. אזי

$$g(t,z_0+h)-g(t,z_0) = \int_{z_0}^{z_0+h} g_z(t,z)\,dz = h\int_0^1 g_z(t,z_0+sh)\,ds$$

האינטגרל האמצעי מציין אינטגרל קווי לאורך המסלול המחבר בין הנקודה z_0 לנקודה z_0+h. נגדיר את הפונקציה

$$\begin{aligned}\rho(t,h) &= \frac{g(t,z_0+h)-g(t,z_0)}{h} - g_z(t,z_0) \\ &= \int_0^1 \big[g_z(t,z_0+sh)-g_z(t,z_0)\big]\,ds\end{aligned} \tag{5.25}$$

את השורה השניה ניתן לאמת בקלות על ידי נוסחת ניוטון-לייבניץ (או גזירת אגף ימין לפי s בהערה למטה)[7]. מהרציפות במידה שווה של g_z על S נובע שעבור כל $\varepsilon>0$, קיים $\delta>0$ כך ש־

$$0<|h|<\delta \implies |\rho(t,h)|<\varepsilon$$

כלומר משפחת הפונקציות $\{\rho(t,h)\}_{0<|h|<r}$ (במשתנה t) מתכנסת במידה שווה לפונקציית האפס בקטע הסגור $[a,b]$

$$\lim_{h\to 0}\rho(t,h)=0$$

על פי הגדרת f והגדרת ρ בשויונים (5.23), (5.25), נקבל

$$\begin{aligned}\int_a^b \rho(t,h)\,dt &= \int_a^b \frac{g(t,z_0+h)-g(t,z_0)}{h}\,dt - \int_a^b g_z(t,z_0)\,dt \\ &= \frac{\int_a^b g(t,z_0+h)\,dt - \int_a^b g(t,z_0)\,dt}{h} - \int_a^b g_z(t,z_0) \\ &= \frac{f(t,z_0+h)-f(t,z_0)}{h} - \int_a^b g_z(t,z_0)\end{aligned}$$

[7] על פי ניוטון-לייבניץ, $\int\big[g_z(t,z_0+sh)-g_z(t,z_0)\big]ds = \frac{1}{h}g(t,sh)-sg(t,z_0)$ ולאחר הצבת הערכים $s=0$, $s=1$ נקבל את התוצאה.

לכן

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(t,z_0+h)-f(t,z_0)}{h}-\int_a^b g_z(t,z_0)=f'(z_0)-\int_a^b g_z(t,z_0)=\lim_{h\to 0}\int_a^b \rho(t,h)\,dt=0$$

וקיבלנו את טענת המשפט. ∎

נוכל לרשום את כלל לייבניץ גם בצורה

$$\frac{d}{dz}\int_a^b g(t,z)dt=\int_a^b \frac{\partial g}{\partial z}(t,z)dt \tag{5.26}$$

עכשיו נוכל לקבל את כלל לייבניץ עבור אינטגרל לאורך מסלול סופי שהזדקקנו לו בהוכחת נוסחת הנגזרת של קושי. התנאי של סופיות המסלול הוא חיוני בכדי לקבל קבוצה סגורה וחסומה.

משפט 5.34: (כלל לייבניץ עבור אינטגרל של פונקציה מרוכבת לאורך מסלול סופי)
תהי $g(w,z)$ פונקציה מרוכבת בשני משתנים, רציפה, ובעלת נגזרת חלקית $\frac{\partial g}{\partial z}$ רציפה מעל קבוצה $\sigma\times D$, כאשר σ הוא מסלול סופי וחלק למקוטעין בתוך $\mathbb{C}$, ו־D קבוצה פתוחה ב־$\mathbb{C}$. אזי

$$\frac{d}{dz}\int_\sigma g(w,z)dw=\int_\sigma \frac{\partial g}{\partial z}(w,z)dw$$

הוכחה: תהי

$$\begin{cases}\sigma(t)=(x(t),\ y(t))\\ a\le t\le b\end{cases}$$

פרמטריזציה נתונה של σ. נגדיר את הפונקציה

$$\begin{cases}G(t,z)=g(\sigma(t),\ z)\cdot\sigma'(t)\\ t\in[a,b],\quad z\in D\end{cases}$$

קל לבדוק ש־G מקיימת את כל תנאי המשפט הקודם מעל $[a,b]\times D$. לכן נוכל להפעיל על G את כלל לייבניץ מנוסחה (5.26)

$$\frac{d}{dz}\int_a^b G(t,z)dt=\int_a^b \frac{\partial G}{\partial z}(t,z)dt$$

על פי הגדרת G נקבל

$$\frac{d}{dz}\int_a^b g(\boldsymbol{\sigma}(t),\ z)\cdot\boldsymbol{\sigma}'(t)dt=\int_a^b \frac{\partial g}{\partial z}(\boldsymbol{\sigma}(t),\ z)\cdot\boldsymbol{\sigma}'(t)dt$$

ומההגדרה של אינטגרל לאורך מסלול נקבל

$$\frac{d}{dz}\int_{\boldsymbol{\sigma}} g(w,\ z)\,dw=\int_{\boldsymbol{\sigma}} \frac{\partial g}{\partial z}(w,\ z)\,dw$$

■

הערה: אם $\boldsymbol{\sigma}$ מסלול חלק למקוטעין, אז ניתן לפרק אותו לסכום של מספר סופי של מסלולים חלקים ולהפעיל את המשפט על כל אחת מהן.

תרגילים לפרק 5



1. חשב את ערך האינטגרל $\int_{\boldsymbol{\sigma}} e^{iz}dz$ על המסלול $\boldsymbol{\sigma}(t)=i+e^{it}$, $-\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}$.

תשובה: $i(1-e^{-2})$



2. חשב את ערך האינטגרל $\int_{\boldsymbol{\sigma}}\frac{3z^2-2iz+1}{z-1}dz$ כאשר $\boldsymbol{\sigma}(t)=2\sin t+i\sin 2t$, $0\le t\le 2\pi$.

3. חשב את האינטגרל הקווי $\int_{\boldsymbol{\sigma}}\frac{dz}{z^{1/2}}$ כאשר $\boldsymbol{\sigma}$ הוא אחד מארבעת המסלולים הבאים:

א. חצי מעגל היחידה העליון נגד כיוון השעון. כאשר $z^{1/2}$ הוא הענף בו $1^{1/2}=1$.

ב. חצי מעגל היחידה התחתון נגד כיוון השעון. כאשר $z^{1/2}$ הוא הענף בו $1^{1/2}=-1$.

ג. מעגל היחידה המלא $|z|=1$ בכיוון השעון. כאשר $z^{1/2}$ הוא הענף בו $1^{1/2}=1$.

ד. מעגל היחידה המלא $|z|=1$ נגד כיוון השעון. כאשר $z^{1/2}$ הוא הענף בו $(-1)^{1/2}=i$.

הדרכה: הכוונה כמובן לענפים אנליטיים של $z^{1/2}$. ישנם רק שני ענפים כאלה.

התשובות הסופיות הן: **א.** $2(i-1)$ **ב.** $2(i+1)$ **ג.** 4 **ד.** -4



4. הוכח: **א.** $\left|\oint_{|z|=1}\frac{dz}{5z^2+3}\right|\le\pi$ **ב.** $\left|\oint_{|z|=1}\frac{2z+1}{z^2+5}dz\right|\le\frac{3\pi}{2}$

5. תהי $f(z)$ פונקציה לא קבועה ואנליטית בעיגול $|z-1|\le 2$ (כולל השפה). נניח ש־$|f(z)|=3$ על שפת העיגול הנ"ל, הוכח של־f יש שורש אחד לפחות בתוך העיגול.

הדרכה: הנח בשלילה שלא קיים שורש וקבל סתירה לעקרון המקסימום עבור $1/f(z)$.



6. תהי $f(z)$ פונקציה אנליטית בדיסק $|z|<R$, כאשר R ממשי חיובי. נגדיר פונקציה ממשית $g:[0,R]\to\mathbb{R}$ על ידי

$$g(r)=\sup_{|z|=r}|f(z)|$$

הוכח כי g פונקציה מונוטונית עולה.

הדרכה: עקרון המקסימום

7. הוכח כי $\oint_{\sigma} ze^{z^2}dz = 0$ לכל מסלול סגור.

8. חשב את $\int_{\sigma} \frac{dz}{z^2+z}$ ואת $\int_{\sigma} \sin^2(z)\,dz$ כאשר σ הוא הקטע $[4, 4i]$.

9. חשב את האינטגרלים הבאים

א. $\oint_{|z+1|=2} \frac{z^2}{4-z^2}dz$ **ב.** $\oint_{|z|=1} \frac{\sin z}{z}dz$ **ג.** $\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z(z-3)}dz$ **ד.** $\oint_{|z|=4} \frac{e^z}{z(z-3)}dz$

ה. $\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z^n}dz$ **ו.** $\oint_{|z|=2} \frac{z^n}{z-1}dz$ **ז.** $\oint_{|z-1-i|=5/4} \frac{\mathrm{Log}(z)}{(z-1)^2}dz$ **ח.** $\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2(z^2-4)}$

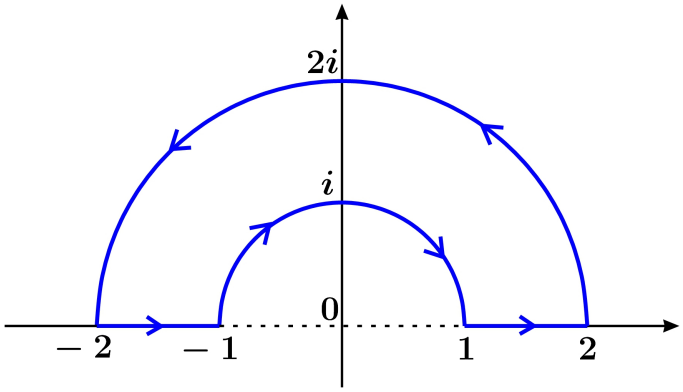
הערה: כל המסלולים בכיוון חיובי כמובן. בסעיף ה', n מספר שלם. בסעיף ו', $n \geq 0$ מספר טבעי.

10. חשב את האינטגרל $\oint_{\sigma} |z|\,dz$ לאורך המלבן $\sigma = [-1, 1, 1+i, -1+i, -1]$.

תשובה: $1 - \sqrt{2} - \ln(\sqrt{2}+1)$

11. חשב את האינטגרל $\oint_{\sigma} \frac{dz}{z}$ לאורך הריבוע $\sigma = [-1-i, 1-i, 1+i, -1+i, -1-i]$.

12. חשב את האינטגרל $\oint_{\sigma} z/\overline{z}\,dz$ כאשר σ הוא המסלול המתואר בשרטוט 5.27.



איור 5.27: המסלול σ עבור תרגיל 12

13. חשב את האינטגרל $\oint_{|z|=1} \frac{z+\overline{z}}{(z-z_0)^2}dz$ עבור כל נקודה $|z_0| \neq 1$.

הדרכה: יש כאן "מלכודת" קטנה: המונה אינו אנליטי! אך למרות זאת השבר יוצא אנליטי (מעל מסלול האינטגרציה): אם נכפיל מונה ומכנה ב־ z, נקבל מונה ומכנה אנליטיים. יש לשים לב לכך ש־ $|z|^2 = 1$ על מסלול האינטגרציה ... יש לבדוק שלושה מקרים: z_0 בפנים, בחוץ, או על המסלול.

תשובה: $2\pi i$, $2\pi i$, $\frac{2\pi i}{z_0^2}$

14. הוכח שלכל מספר טבעי $m \geq 1$: $\oint_{|z|=1} \left(z + \frac{1}{z}\right)^{2m+1} dz = 2\pi i \binom{2m+1}{m}$.

הדרכה: על פי בינום ניוטון:

$$\left(z+\frac{1}{z}\right)^{2m+1}=\frac{(z^2+1)^{2m+1}}{z^{2m+1}}=\frac{\sum_{k=0}^{2m+1}\binom{2m+1}{k}z^{2k}}{z^{2m+1}}=\sum_{k=0}^{2m+1}\binom{2m+1}{k}z^{2k-2m-1}$$

האינטגרל של כל החזקות z^n שבהן $n\neq -1$ מתאפסים כי יש להן פונקציה קדומה (ראה מסקנה 5.6).

15. חשב את האינטגרל $\oint_{|z|=2} z^n(1-z)^m\,dz$ עבור כל שני מספרים שלמים m, n.

16. הוכח: אם $f(z)$ פונקציה שלמה ומקיימת $|f(z)|\leq\sqrt{|z|}$ לכל $z\in\mathbb{C}$, אז בהכרח $f(z)$ מתאפסת זהותית על כל המישור המרוכב.

הדרכה: על ידי שימוש בנוסחת הנגזרת של קושי, הראה שכל מקדמי הטור מקלורן של f מתאפסים.

17. מצא את המקסימום המוחלט של כל אחת מהפונקציות הבאות מעל עיגול היחידה $|z|\leq 1$.

א. $f(z)=\dfrac{2z+1}{2z-1}$ **ב.** e^{z^3} **ג.** z^2+iz-1 **ד.** $\dfrac{z^3}{z-5}$

תשובה: **א.** 3, **ב.** e

18. יהיו $z_1,z_2,\ldots,z_n$, n נקודות שונות על מעגל היחידה $|z|=1$. הוכח כי קיימת נקודה z על מעגל היחידה כך ש־

$$(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n)=1$$

הדרכה: תהי $f(z)=(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n)$, הוכח כי $|f(0)|=1$, והפעל את עקרון המקסימום על עיגול היחידה $|z|\leq 1$.

19. הפונקציה $f(z)=\frac{1}{z}$ אנליטית בטבעת $1<|z|<2$. הוכח כי אין לה פונקציה פרימיטיבית (אנטינגזרת) בתחום זה.

הדרכה: הנח בשלילה שיש לה פונקציה פרימיטיבית $F(z)$ וקבל כי $F(z)$ נבדלת מ־$\arg(z)$ בקבוע.

20. הוכח כי הפונקציה $f(z)=i\cdot\frac{1-z}{1+z}$ מעתיקה את עיגול היחידה $\mathbb{D}(0,1)$ לחצי המישור המרוכב העליון $U=\{\,z\in\mathbb{C}:\ \operatorname{Im}(z)>0\,\}$ באופן חד-חד-ערכי ועל.

הדרכה:

א. באמצעות אלגברה פשוטה הראה כי f חד-חד-ערכית.

ב. באמצעות אלגברה פשוטה הראה כי שפת עיגול היחידה $|z|=1$ עוברת לשפת U, $\partial U=\mathbb{R}$. קח $z=a+bi$, $a^2+b^2=1$, והראה כי $f(z)=\frac{-b}{a+1}\in\mathbb{R}$.

ג. הראה כי $f(0)=i$

ד. הפעל את עקרון המקסימום בכדי להסיק ש־$\mathbb{D}(0,1)$ עובר ל־U.

21. הוכח: אם $f(z)$ פונקציה שלמה המקיימת $|f(z)|\geq M>0$ לכל $z\in\mathbb{C}$, אז היא בהכרח פונקציה קבועה.

22. הוכח שלכל פולינום לא קבוע $P(z)$ קיימת נקודה z כך ש־$P(z)$ הוא מספר ממשי.

23. הוכח: אם $P(z)$ פולינום לא קבוע אז $P(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$.

24. הוכח: תהי $f(z)$ פונקציה שלמה. אם $|f(z)|$ חסומה על חצי המישור הימני $\mathrm{Re}(z) \geq 0$, ואם הנגזרת $|f'(z)|$ חסומה על חצי המישור השמאלי $\mathrm{Re}(z) \leq 0$, אז f פונקציה קבועה.

25. בנה דוגמא לפונקציה אנליטית בעיגול היחידה שמקבלת בו בדיוק שלוש נקודות מינימום מקומי.

26. הוכח: אם $f(z)$ פונקציה שלמה המקיימת $|\mathrm{Re}(f(z))| \leq M$ לכל $z \in \mathbb{C}$, אז f פונקציה קבועה.

רמז: התבונן בפונקציה $e^{f(z)}$.

27. תהי $f(z)$ פונקציה אנליטית בתחום D. נתון כי לפונקציה $\mathrm{Re}(f(z))$ יש נקודת מקסימום מקומי בנקודה פנימית של D. הוכח כי f קבועה על D.

28. על ידי שימוש במשפט מוררה וכלל לייבניץ, הוכח כי הפונקציה $f(z) = \int_0^1 \frac{\sin zt}{t} dt$ היא פונקציה שלמה.

29. תהי $f : \mathbb{D}(0,1) \to \mathbb{D}(0,1)$ פונקציה אנליטית מדיסק היחידה הפתוח אל עצמו. הוכח כי לכל $|z| < 1$, $|f'(z)| \leq \frac{1}{1-|z|}$.

הדרכה: קח מעגל קטן סביב z, הפעל את נוסחת הנגזרת של קושי ונפח את המעגל עד שישיק להיקף של $\mathbb{D}(0,1)$.

30. הוכח: אם $f(z)$ אנליטית בעיגול היחידה הסגור $|z| \leq 1$ ומקבלת ערכים ממשיים על מעגל היחידה $|z| = 1$, אז f קבועה.

הדרכה: נגדיר $g(z) = f(z)$ עבור $|z| \leq 1$, ו־$g(z) = \overline{f(1/z)}$ עבור $|z| > 1$. הוכח כי g שלמה והפעל את משפט ליוביל.

31. הוכח: אם $f(z)$ אנליטית בתחום D הכולל בתוכו את עיגול היחידה הסגור $|z| \leq 1$, ומקיימת $|f(z)| = 1$ על מעגל היחידה $|z| = 1$, אז f היא פונקציה קבועה.

הדרכה: נסה רעיון דומה לזה של תרגיל 30.

32. נתון כי $g(z) = \frac{1}{zf(z) - \sin z}$ היא פונקציה שלמה שמעתיקה את $\mathbb{C}$ למישור המחורר $|z| > 2$. מצא מהי הפונקציה $f(z)$?

33. קבוצה $S \subseteq \mathbb{C}$ נקראת **קמורה** אם לכל $z_1, z_2 \in S$, הקטע $[z_1, z_2]$ כלול ב־S. תהי $f(z)$ פונקציה אנליטית מעל קבוצה פתוחה וקמורה S. נתון כי $\mathrm{Re}(f'(z)) > 0$ לכל $z \in S$. הוכח כי f חד-חד-ערכית מעל S.

הדרכה: עבוד עם כתיב קרטזי $f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$. קח שתי נקודות $z_1\neq z_2$ ב־S, ורשום את האינטגרל הקווי $\int_{z_1}^{z_2} f'(z)dz$ לאורך פרמטריזציה פשוטה של הקטע $[z_1,z_2]$.

34. הוכח שלא קיימת פונקציה שלמה המקיימת $|f(z)|\geq|z|$ לכל $z\in\mathbb{C}$.

35. תהי $f(z)$ פונקציה רציפה בעיגול היחידה $|z|<1$, ואנליטית בכל נקודה שבה $\mathrm{Im}(z)\neq 0$. הוכח כי למעשה f אנליטית על כל עיגול היחידה.

הדרכה: העזר במשפט מוררה. יספיק להשתמש במסלולים משולשים.

36. על סמך התובנה של תרגיל 35 הוכח את הטענה הכללית הבאה: אם $f(z)$ רציפה בתחום D, ואנליטית בקבוצה $D-L$, כאשר L הוא קו ישר, אז f אנליטית בכל התחום D.

הדרכה: העזר במשפט מוררה. יספיק להשתמש במסלולים משולשים.

37. תהי $f(z)$ פונקציה שלמה שאינה מתאפסת בשום נקודה. תהי

$$U=\{z\in\mathbb{C}:\ |f(z)|<1\}$$

הוכח: U היא קבוצה פתוחה, וכל מרכיבי הקשירות שלה אינם חסומים.

הדרכה: הראה שכל מרכיב קשירות הוא קבוצה פתוחה. הנח בשלילה שהוא חסום וקבל סתירה על ידי שימוש בעקרון המקסימום.

38. הוכח את **הלמה של שוורץ**: אם $f:\mathbb{D}(0,1)\to\mathbb{D}(0,1)$ פונקציה אנליטית מעיגול היחידה לעצמו המקיימת $f(0)=0$. אזי

א. $|f(z)|\leq|z|$ לכל z בעיגול היחידה

ב. $|f'(0)|\leq 1$

ג. אם קיימת נקודה $z_0\neq 0$ כך ש־$|f(z_0)|=|z_0|$ אז קיים $c\in\mathbb{C}$ כך ש־$f(z)=cz$ לכל z בעיגול היחידה.

הדרכה: נסה להפעיל את עקרון המקסימום על $g(z)=f(z)/z$, $g(0)=f'(0)$ על כל העיגולים $\mathbb{D}(0,r)$.

39. אם $f:\mathbb{D}(0,1)\to\mathbb{D}(0,1)$ פונקציה אנליטית מעיגול היחידה על עצמו (אוטומורפיזם). אזי f חייבת להיות העתקת מביוס מהצורה

$$f(z)=e^{i\theta}\frac{a-z}{1-\overline{a}z}$$

כאשר θ זווית קבועה ו־$a=f^{-1}(0)$.

הדרכה: קודם הוכח כי $g(z)=\frac{a-z}{1-\overline{a}z}$ היא אוטומורפיזם מעיגול היחידה לעצמו שמקיים את תנאי הלמה של שוורץ (תרגיל 38). אחר כך הוכח כי $f\circ g^{-1}$ מקיימת גם את תנאי סעיף ב' בלמה של שוורץ.

40. אם $f:\mathbb{D}(0,1)\to\mathbb{D}(0,1)$ פונקציה אנליטית מעיגול היחידה לעצמו אשר יש לה שתי נקודות שבת שונות, אזי f היא פונקציית הזהות.

הדרכה: כזכור, נקודת שבת z של פונקציה f היא נקודה בה $f(z)=z$. יהיו z_1, z_2, שתי נקודות השבת של f. התבונן בהעתקה $g(z)=\frac{z_1-z}{1-\overline{z_1}z}$. וודא כי $g(0)=z_1$, $g(z_2)=z_3$, $g(z_3)=z_2$, ובדוק את ההעתקה $h=g\circ f\circ g$. וודא כי $h(z)=z$, z_3, הן נקודות שבת של h. על פי הלמה של שוורץ (תרגיל 38) h היא סיבוב בעל נקודת שבת אחת בלבד, ולכן h היא פונקציית הזהות.

41. כל אוטומורפיזם $f:H\to H$, כאשר H הוא חצי המישור העליון $\mathrm{Im}(z)>0$, חייב להיות העתקת מביוס.

הדרכה: קח העתקת מביוס φ שמעתיקה את H ל־$\mathbb{D}(0,1)$, והפעל את תרגיל 39 על $\varphi\circ f\circ\varphi^{-1}$.

42. תהי $f(z)$ פונקציה אנליטית מעל חצי המישור הימני $\mathrm{Re}(z)>0$ לתוך עיגול היחידה $|z|<1$. נתון כי $f(1)=0$. מהו הערך הכי גדול שיתכן עבור $|f(2)|$?

הדרכה: בנה העתקת מביוס T מעיגול היחידה $|z|<1$ לחצי המישור הימני $\mathrm{Re}(z)>0$, כך ש־$T(0)=1$. הראה כי ההרכבה $f\circ T$ מקיימת את תנאי הלמה של שוורץ (ראה תרגיל 38), ולכן $|f(2)|=\left|f(T(T^{-1}(2))\right|$ יהיה לכל היותר $\left|T^{-1}(2)\right|=1/3$.

43. תהי $f(z)$ פונקציה אנליטית בתחום D הכולל בתוכו את העיגול הסגור $\overline{\mathbb{D}}(0,r)$, $r>0$. יהיו z_1, z_2, שתי נקודות שונות בעיגול $\mathbb{D}(0,r)$.

א. בטא את האינטגרל $\oint_{|z|=r}\frac{f(z)dz}{(z-z_1)(z-z_2)}$ על ידי שני האינטגרלים $\oint_{|z|=r}\frac{f(z)dz}{(z-z_1)}$, $\oint_{|z|=r}\frac{f(z)dz}{(z-z_2)}$.

ב. מהסעיף הקודם מצא הוכחה נוספת למשפט ליוביל.

44. הוכח: אם f פונקציה שלמה המקבלת ערכים בחצי המישור העליון $\mathrm{Im}(z)>0$ בלבד, אז f פונקציה קבועה.

הדרכה: בדוגמא 14 של פרק 4 ראינו שהעתקת מביוס $T(z)=\frac{z-i}{z+i}$ מעתיקה את חצי המישור העליון $\mathrm{Im}(z)>0$ לעיגול היחידה $|z|<1$. לכן $T\circ f$ פונקציה שלמה שתמונתה כלולה בעיגול היחידה $|z|<1$. מה ליוביל היה חושב על זה?

45. תהי $f(z)$ פונקציה אנליטית בקבוצה S, ותהי $w\in\mathbb{C}$. **קבוצת המקורות של w תחת f** מוגדרת להיות קבוצת כל הנקודות $z\in S$ כך ש־$f(z)=w$. הוכח: אם f אינה קבועה, ו־S קבוצה קומפקטית, אז קבוצת המקורות היא סופית.

46. תהי $f(z)$ פונקציה אנליטית מעל תחום D הכולל בתוכו את עיגול היחידה הסגור $|z|\le 1$. נתון כי $|f(z)|=1$ עבור כל נקודה $|z|=1$. הוכח כי גם התמונה $f(D)$ כוללת בתוכה את עיגול היחידה הסגור.

הדרכה: הוכח כי למשוואה $f(z)=w_0$ יש שורש עבור כל $w_0\in\overline{\mathbb{D}}(0,1)$. יש להשתמש בעקרון המקסימום.

47. הוכח: אם $u(x,y)$ פונקציה ממשית הרמונית מעל תחום פשוט-קשר D אז u גזירה

אינסוף פעמים בשני המשתנים מעל D.

הדרכה: ראה הגדרה 4.3 של פונקציה הרמונית בעמוד 139. העזר במסקנה 4.14, ובמשפט 5.23. שים לב לכך שהגדרת ההרמוניות דורשת נגזרת שניה רציפה בלבד! לכן זוהי דוגמא נדירה למצב שבו קיום שתי נגזרות מבטיח את קיומם של כל אינסוף הנגזרות האחרות!

48. תהי $u(x,y)$ פונקציה הרמונית על כל המישור הממשי $\mathbb{R}^2$. הוכח: אם $u(x,y)$ חסומה על $\mathbb{R}^2$ אז u קבועה.

49. תהי $u(x,y)$ פונקציה הרמונית על כל המישור הממשי $\mathbb{R}^2$. הוכח: אם $u(x,y)$ אינה קבועה, אז קיימת נקודה אחת לפחות שבה היא מתאפסת.

הדרכה: נניח שלא. מהרציפות של u נובע ש־u חיובית בכל נקודה או שלילית בכל נקודה. נניח למשל ש־u חיובית. תהי $v(x,y)$ ההרמונית הצמודה של u, כך ש־$f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$ היא פונקציה שלמה (ראה מסקנה 4.14 ומשפט 5.23). בדוק כי הפונקציה השלמה $g(z)=e^{-f(z)}$ חסומה. ליוביל ...

50. הוכח שאם $f(z)$ פונקציה שלמה לא-קבועה אז $f(\mathbb{C})$ היא קבוצה צפופה ב־$\mathbb{C}$.

הדרכה: תזכורת: קבוצה A **צפופה** בקבוצה B אם כל נקודה $z\in B$ היא גבול של סדרת נקודות $z_n\in A$. רעיון: אם לא, אז קיימת נקודה z_0, וקיים $r>0$, כך ש־$\mathbb{D}(z_0,r)\cap f(\mathbb{C})=\emptyset$. העזר במשפט ליוביל.
למעשה, על פי משפט פיקארד שאינו כלול בחוברת (כרגע), הקבוצה $f(\mathbb{C})$ זהה ל־$\mathbb{C}$ למעט אולי נקודה בודדת, אך אין ביכולתנו להוכיח תוצאה כזו באמצעות הכלים העומדים לרשותנו עד כה.

51. פונקציה $f(z)$ נקראת **דו-מחזורית** אם קיימים $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$, שונים מאפס כך שהמנה α/β אינה ממשית, ולכל $z\in\mathbb{C}$

$$f(z+\alpha)=f(z+\beta)=f(z)$$

הוכח כי כל פונקציה שלמה דו-מחזורית היא קבועה.

52. **הוכחת משפט קושי-גורסה על בסיס משפט גרין:** חזור על משפט גרין שלמדת בקורס חדו"א 2 (או אינפי 2) והסבר כיצד ניתן להוכיח באמצעותו את משפט קושי-גורסה. ההבדל העיקרי הוא שבנוסף לאנליטיות של $f(z)$, יש להניח כי $f'(z)$ רציפה בפנים ועל המסלול.

הדרכה: נזכיר את משפט גרין: יהי D תחום חסום, ויהיו $u(x,y)$, $v(x,y)$, פונקציות גזירות ברציפות בתחום המכיל את $D+\partial D$. אזי

$$\oint_{\partial D} u(x,y)dx+v(x,y)dy=\iint_D (v_x-u_y)\,dx\,dy$$

תהי $\sigma(t)=x(t)+iy(t)$ פרמטריזציה של ∂D. אם נשתמש בצורה הקרטזית של פונקציה מרוכבת $f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$ אז נגלה שהאגף השמאלי של נוסחת גרין הוא למעשה האינטגרל של $f(z)$ לאורך מסלול σ

$$\begin{aligned}\oint_\sigma f(z)\,dz &= \oint_\sigma [u(x,y)+iv(x,y)](dx+idy)=\oint_\sigma (u\,dx-v\,dy)+i\oint_\sigma (v\,dx+u\,dy)\\ &= \iint_D (-v_x-u_y)\,dx\,dy+i\iint_D (u_x-v_y)\,dx\,dy=0\end{aligned}$$

שני האינטגרלים הכפולים מתאפסים בגלל משוואות קושי-רימן. נשאיר לתלמיד להשלים את הפרטים.

53. **נוסחת האינטגרל של פואסון (Poisson):** תהי $f(z)$ פונקציה אנליטית בעיגול $|z|\le R$.

הוכח כי לכל $0 < r < R$, ולכל θ,

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2rR\cos(\theta - t)} \cdot f(Re^{it})dt$$

הדרכה: יש להעזר בנוסחת האינטגרל של קושי. נסמן $z_0 = re^{i\theta}$. אז $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=R} \frac{f(z)}{z-z_0}dz$. הנקודה $R^2/\overline{z}_0$ נמצאת מחוץ לעיגול $|z| \le R$, ולכן $\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=R} \frac{f(z)}{z-R^2/\overline{z}_0}\,dz = 0$. חבר את שתי המשוואות והמשך מכאן.

54. יהי $P(z)$ פולינום ממעלה $n > 1$. כזכור, לכל $w \in \mathbb{C}$, הביטוי $P^{-1}(w)$ מציין את קבוצת המקורות של w, והביטוי $|P^{-1}(w)|$ מציין את מספר האיברים בקבוצה $P^{-1}(w)$. תהי

$$S = \left\{ w \in \mathbb{C} : \ |P^{-1}(w)| = n \right\}$$

הוכח כי S היא קבוצה פתוחה.

55. יהיו $P(z)$, $Q(z)$, שני פולינומים לא קבועים בעלי אותה מעלה, המקיימים $|P(z)| = |Q(z)|$ על מעגל היחידה $|z| = 1$. נתון כי כל השורשים של P, Q, נמצאים בתוך עיגול היחידה $|z| < 1$. הוכח שקיים קבוע מרוכב $c \in \mathbb{C}$ כך ש־$Q(z) = cP(z)$ לכל $z \in \mathbb{C}$.

הדרכה: חקור את הפונקציות $f(z) = \frac{P(1/z)}{Q(1/z)}$, $g(z) = \frac{Q(1/z)}{P(1/z)}$. וודא כי $z = 0$ היא נקודה סינגולרית סליקה של f, g, וקיימים הגבולות $\lim_{z\to\infty} \frac{P(z)}{Q(z)}$, $\lim_{z\to\infty} \frac{Q(z)}{P(z)}$. הראה כי f, g, אנליטיות בעיגול $|z| < 1 + \varepsilon$, עבור $\varepsilon > 0$. עשה שימוש בעקרון המקסימום על העיגול $|z| \le 1$.

56. שרטט סקיצה של העקום המישורי W המתוארת על ידי

$$W = \left\{ (x, x\sin\tfrac{1}{x}) : \ 0 < x < 1 \right\} \cup \{0\} \times [-1, 0] \cup [0, 1] \times \{-1\} \cup \{1\} \times [-1, \sin(1)]$$

א. תן תאור פרמטרי $\sigma(t) = x(t) + y(t)$, $\sigma : [a, b] \to \mathbb{C}$, עבור העקום W. מומלץ לפרק אותו לארבעה חלקים המתאימים להגדרה שלו, ואז לשרשר.

ב. האם העקום W חסום? סגור? פשוט? חלק למקוטעין?

ג. נסה לחשב את האורך של העקום W. יספיק גם לקבל הערכה של האורך. נסה לפחות לענות על השאלה: האם אורכו סופי?

ד. האם העקום W תואם את הגדרה 4.7 של מסלול חלק למקוטעין? האם הגדרת המסלול החלק למקוטעין מחייבת כי אורכו הוא בהכרח סופי? עבור על המשפטים הנוגעים למסלול חלק למקוטעין ובדוק אם לא הנחנו במובלע כי אורכו של מסלול חלק למקוטעין הוא תמיד סופי?

הדרכה: מדובר בוריאנט נוסף של "מעגל" ורשה (Warsaw Circle), שפגשנו כבר בתרגיל 33 של פרק 2. מומלץ לעיין בתרגיל הזה לפני שמנסים את התרגיל הנוכחי. ההבדל היחיד הוא שבמקום הביטוי $\sin\frac{1}{x}$ בחלק הראשון, מופיע הביטוי $x\sin\frac{1}{x}$ שגורם לעקום להיות רציף בנקודה $x = 0$. ניתן לצפות בשרטוט של העקום על ידי לחיצה על הקישור הזה. דיון נוסף בנושא בקישורים הבאים: math.stackexchange.1, math.stackexchange.2.

57. יהיו $f(z)$, $g(z)$, שתי פונקציות שלמות המקיימות $f(g(x))=x$ לכל x ממשי. הוכח כי שתי הפונקציות הן חד-חד-ערכיות ועל, ושהן הופכיות אחת לשנייה.

58. בעייה קשה. לבעלי מוטיבציה גבוהה בלבד: תהי $f(z)$ פונקציה רציפה על כל המישור המרוכב. נתון כי

$$\oint_{|z-z_0|=r} f(z)\,dz = 0$$

עבור כל $z_0\in\mathbb{C}$, ועבור כל $r>0$. הוכח כי f היא פונקציה שלמה.

הערה: זוהי גירסה יותר מעודנת של משפט מוררה. בניסוח הזה, האינטגרל של f על כל מעגל מתאפס. מהנחה זו בלבד יש להוכיח ש־f אנליטית. בכדי להקל קצת: אפשר להניח שלרכיבים של $f=u+iv$ יש נגזרות חלקיות רציפות, ולהשתמש בגירסה מתאימה של משפט גרין. אתגר לא פשוט בכלל, ולכן מיועד רק למורעלים שבינינו.

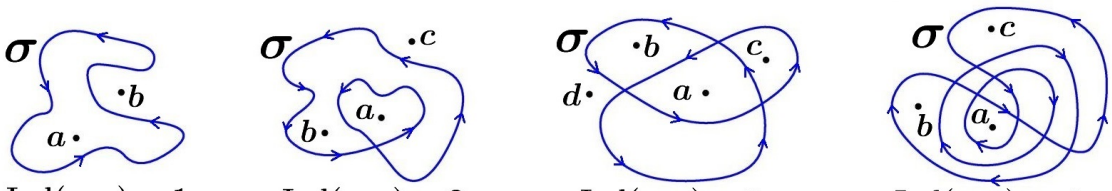
59. יהי $\sigma:[a,b]\to\mathbb{C}$ מסלול סגור וחלק למקוטעין, ותהי z_0 נקודה שאינה שייכת למסלול. הוכח שקיים מספר שלם $k\in\mathbb{Z}$, כך ש־

$$\oint_{\sigma}\frac{dz}{z-z_0}=2k\pi i \tag{5.27}$$

המספר k נקרא **האינדקס של הנקודה z_0 ביחס למסלול σ**, ומסומן על ידי $\mathrm{Ind}(z_0,\sigma)$.

הדרכה: בספרים אחרים, המספר k נקרא גם **מספר הליפוף (winding number) של המסלול σ ביחס לנקודה z_0**, מאחר והוא מייצג את מספר הסיבובים שהמסלול σ מבצע סביב הנקודה z_0. מדובר כמובן במסלול סגור כללי שאינו בהכרח מסלול ז'ורדן (כלומר עשוי לחתוך את עצמו בנקודות ביניים ולבצע מספר סיבובים סביב z_0).
הגדר את הפונקציה $h(t)=\int_a^t \frac{\sigma'(s)ds}{\sigma(s)-z_0}$. הראה כי $h(a)=0$, הגדר את הפונקציה $h(b)=\oint_\sigma \frac{dz}{z-z_0}$. הסק $g(t)=[\sigma(t)-z_0]\cdot e^{-h(t)}$. הוכח כי $g'(t)=0$ לכל t בקטע (a,b), ולכן g קבועה בקטע $[a,b]$. לכן $g(a)=g(b)$. מכך כי $e^{-h(b)}=1=e^{2k\pi i}$.

60. (המשך לתרגיל 59) השלם את השוויונים החסרים בשרטוט 5.28.



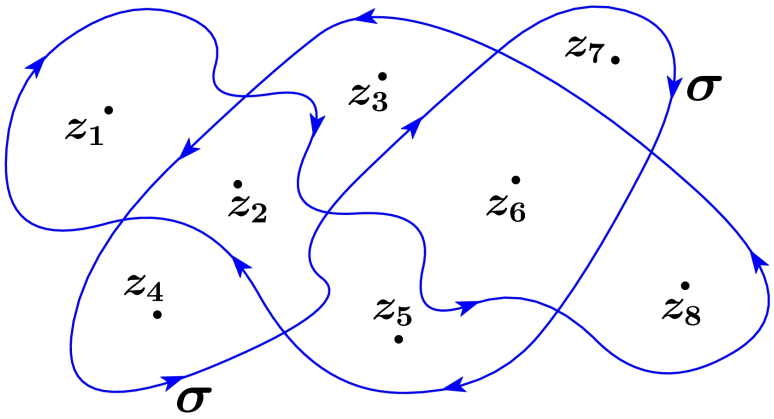
[תרגיל]

איור 5.28: שרטוט נלווה לתרגיל 60: דוגמאות שונות לאינדקס של נקודה ביחס למסלול

61. (המשך לתרגיל 59) על סמך התבוננות בשרטוט 5.29 חשב את האינדקס

$$\mathrm{Ind}(z_k,\sigma)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\sigma}\frac{dz}{z-z_k} \tag{5.28}$$

של כל אחת מהנקודות $z_1, z_2, \ldots, z_8$ ביחס למסלול הסגור σ.



איור 5.29: שרטוט עבור תרגיל 61

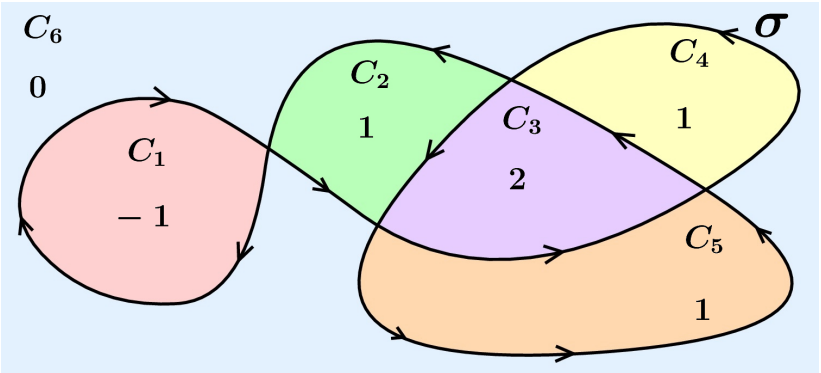


62. יהי σ מסלול סגור וחלק למקוטעין, ותהי $\mathbb{C}-\sigma$ הקבוצה המשלימה של σ (כל הנקודות שאינן על המסלול). ראה שרטוט 5.30. הוכח כי פונקציית האינדקס $f(z)=\mathrm{Ind}(z,\sigma)$ קבועה על כל אחד ואחד ממרכיבי הקשירות של $\mathbb{C}-\sigma$. במילים אחרות, לכל שתי נקודות השייכות לאותו מרכיב קשירות יש אותו אינדקס ביחס למסלול σ. בנוסף לכך, הוכח כי כל מרכיבי הקשירות חסומים, מלבד מרכיב קשירות אחד שאינו חסום והאינדקס של כל נקודותיו הוא אפס (בשרטוט 5.30, כל מרכיבי הקשירות חסומים, מלבד C_6 שצבוע תכלת בהיר).

הדרכה: מאחר והאינדקס הוא תמיד מספר שלם, יספיק להוכיח כי f היא פונקציה רציפה (ולכן לא תוכל לקבל שני ערכים שונים באותו מרכיב קשירות. ראה תרגיל 44 בסוף פרק 3). התבונן בביטוי

$$f(z_1)-f(z_2)=\frac{1}{2\pi i}\oint_\sigma\frac{dz}{z-z_1}-\frac{1}{2\pi i}\oint_\sigma\frac{dz}{z-z_2}=\frac{z_1-z_2}{2\pi i}\oint_\sigma\frac{dz}{(z-z_1)(z-z_2)}$$

הוכח כי הוא חסום על ידי $|z_1-z_2|\frac{M\cdot\ell(\sigma)}{2\pi}$, כאשר M הוא המקסימום של $\frac{1}{|z-z_1||z-z_2|}$ מעל המסלול σ. מצד שני $f(z)=\mathrm{Ind}(z,\sigma)$ שואפת לאפס כאשר z שואף לאינסוף, ולכן בהכרח מתאפסת על המרכיב הלא-חסום (כי חייבת לקבל ערך שלם, ולכן ערך זה חייב להיות אפס).



איור 5.30: שרטוט עבור תרגיל 62: מרכיבי קשירות של $\mathbb{C}-\sigma$

63. יהי σ מסלול סגור וחלק למקוטעין. **הפנים** של σ מוגדר כאוסף כל הנקודות $z\in\mathbb{C}-\sigma$ אשר עבורן $\mathrm{Ind}(z,\sigma)\neq 0$. **החוץ** של σ מוגדר להיות אוסף כל הנקודות $z\in\mathbb{C}-\sigma$

אשר עבורן $\mathrm{Ind}(z,\sigma)=0$. מצא מהו הפנים של המסלול σ שבשרטוט 5.30? בנה דוגמא למסלול σ אשר יש לו מרכיב קשירות חסום השייך לחוץ שלו.

רמז: עבור החלק השני של השאלה, התבונן בשרטוט 5.12.

קישור לפתרונות

פרק 6

טורים

בפרק הנוכחי של הקורס נכליל מושגים וטענות אודות סדרות וטורים מהאנליזה הממשית לאנליזה המרוכבת. בחלק גדול מהמקרים ההגדרות והטענות אודות סדרות וטורים ממשיים עוברות למספרים מרוכבים באופן אוטומטי, ולכן לא נטרח לספק להן הוכחות או הסברים מפורטים.

לפני שממשיכים הלאה, מומלץ לחזור על נושא הסדרות והטורים ממשיים מחוברת ההרצאות של חדו"א 2 (נספחים א-ג בסוף החוברת). לחץ על הקישור הבא להורדת החוברת.

חוברת הרצאות חדו"א 2

נושא הטורים מתחלק לארבעה תתי-נושאים

א. טורים מספריים

ב. סדרות של פונקציות

ג. טורי פונקציות

ד. טורי חזקות (טיילור/מקלורן)

6.1 טורי מספרים

זהו כמובן נושא רחב ועמוס פרטים אשר לא נוכל לכסות במסגרת הקורס הנוכחי. אנו מניחים שהתלמיד פגש את רוב המושגים והמשפטים בקורסים קודמים, ולכן נסתפק בסקירה חלקית ומהירה שלהם (ללא הוכחות).

תהי $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה נתונה של מספרים מרוכבים. מטרתנו להגדיר את הסכום הכולל של איברי הסדרה והתנאים הדרושים לקיומו. את הסכום האינסופי של הסדרה או **הטור**

האינסופי נסמן על ידי

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + z_3 + \cdots + z_n + \cdots \tag{6.1}$$

בכדי לתת משמעות לסכום אינסופי של מספרים נגדיר קודם כל את **סדרת הסכומים החלקיים של הטור**:

$$\begin{aligned} S_1 &= z_1 \\ S_2 &= z_1 + z_2 \\ S_3 &= z_1 + z_2 + z_3 \\ &\vdots \qquad\quad \vdots \\ S_n &= z_1 + z_2 + z_3 + \cdots + z_n \\ &\vdots \qquad\quad \vdots \end{aligned} \tag{6.2}$$

הגדרה 6.1: יהי $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ טור נתון. נאמר שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ **מתכנס** אם סדרת הסכומים החלקיים $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת לגבול **סופי** S:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

נאמר שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ **מתכנס לסכום** S ונרשום

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S$$

אם לא קיים הגבול S אז נאמר כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ **אינו מתכנס**, או בקצרה: **מתבדר**.

טענה 6.1: טור מרוכב $\sum_{n=1}^{\infty} x_n + iy_n$ מתכנס אם ורק אם הטורים הממשיים $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ שניהם מתכנסים.

הוכחה: נשתמש בהגדרת סכום הטור כגבול של סכומים חלקיים. תהי $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת הסכומים החלקיים של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$. כלומר: $A_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$. ותהי $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת הסכומים החלקיים של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$. על פי טענה 2.16 שהוכחנו בסעיף על סדרות (עמוד 73), הסדרה $\{A_n + iB_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת אם ורק אם שתי הסדרות $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$, מתכנסות. ומכאן ההמשך ברור. ∎

הוכחת שני המשפטים הבאים זהה לגמרי להוכחה שלהם במקרה הממשי.

משפט 6.2: אם c מספר מרוכב קבוע שונה מאפס, אזי הטורים $\sum_{k=1}^{\infty} z_n$ ו־ $\sum_{k=1}^{\infty} cz_n$ מתכנסים או מתבדרים ביחד. במקרה של התכנסות מתקיים השוויון

$$\sum_{k=1}^{\infty} cz_n = c\sum_{k=1}^{\infty} z_n$$

משפט 6.3: אם הטורים $\sum_{k=1}^{\infty} z_n$ ו־ $\sum_{k=1}^{\infty} w_n$ מתכנסים אזי הטורים $\sum_{k=1}^{\infty} z_n \pm w_n$ מתכנסים ובנוסף מתקיים השוויון

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_n \pm w_n = \sum_{k=1}^{\infty} z_n \pm \sum_{k=1}^{\infty} w_n$$

מבחן התבדרות יסודי

משפט 6.4: אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ מתכנס אזי $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$.

הוכחה: תהי $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת הסכומים החלקיים של הטור. מהתכנסות הטור נובע כי קיים הגבול $\lim_{n\to\infty} S_n = S$. מהגדרת S_n ברור כי

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

ולכן

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$$

■

מסקנה 6.5: (מבחן התבדרות יסודי) אם הגבול $\lim_{n\to\infty} z_n$ אינו קיים או קיים אך שונה מאפס, אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ מתבדר.

הקריטריון של קושי להתכנסות טור של מספרים מרוכבים

בהקשרים שונים מקובל לחלק טור אינסופי $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ לשלושה חלקים

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k = \underbrace{\sum_{k=1}^{m} z_k}_{\text{ראש הטור}} + \underbrace{\sum_{k=m+1}^{n} z_k}_{\text{אמצע הטור}} + \underbrace{\sum_{k=n+1}^{\infty} z_k}_{\text{זנב הטור}}$$

כמובן שהשמות תלויים בבחירה מתאימה של אינדקסים m ו־n. נוכל לאפיין את ההתכנסות של הטור בכל אחת משלושת הדרכים השקולות הבאות

א. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ מתכנס אם ורק אם סדרת הראשים $S_m = \sum_{k=1}^{m} z_k$ מתכנסת. שם אחר לסדרת הראשים היא **סדרת הסכומים החלקיים** $\{S_m\}_{m=1}^{\infty}$.

ב. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ מתכנס אם ורק אם סדרת הזנבות $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} z_k$ שואפת לאפס. המספר r_n נקרא גם **שארית הטור** (שארית הטור מתחילה באיבר z_{n+1}).

ג. **הקריטריון של קושי** טוען שטור מתכנס אם ורק אם האמצע שלו $\sum_{k=m+1}^{n} z_k$ שואף לאפס כאשר m שואף לאינסוף. הניסוח הלוגי של טענה זו מופיע במשפט הבא.



משפט 6.6: (מבחן ההתכנסות של קושי)

הטור $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ מתכנס, אם ורק אם $\lim_{n,p\to\infty} \sum_{k=n+1}^{n+p} z_k = 0$.

כלומר: הטור מתכנס אם ורק אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים N כך שלכל $n > N$, ולכל p,

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} z_k\right| = |z_{n+1} + z_{n+2} + \cdots + z_{n+p}| < \varepsilon \tag{6.3}$$

התכנסות בהחלט והתכנסות בתנאי

הגדרה 6.2: נאמר שהטור $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ **מתכנס בהחלט** אם טור הערכים המוחלטים של איבריו $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ מתכנס.

הגדרה 6.3: נאמר שטור $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ **מתכנס בתנאי** אם הוא מתכנס, אך טור הערכים המוחלטים $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ מתבדר.

דוגמה 1: הדוגמא הקנונית של טור מתכנס בתנאי היא **הטור של לייבניץ** המוגדר על ידי

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \cdots$$

טור הערכים המוחלטים שלו הוא **הטור ההרמוני** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ שהוא טור מתבדר.

משפט 6.7: אם טור מתכנס בהחלט אז הוא מתכנס.

הוכחה: על פי מבחן ההתכנסות של קושי מתקיים:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall n > N,\ \forall p \in \mathbb{N}:$$

$$|z_{n+1}| + |z_{n+2}| + \cdots + |z_{n+p}| < \varepsilon$$

היות ועל פי אי-שוויון המשולש

$$|z_{n+1}+z_{n+2}+\cdots+z_{n+p}| \le |z_{n+1}|+|z_{n+2}|+\cdots+|z_{n+p}| < \varepsilon$$

נקבל כי

$$|z_{n+1}+z_{n+2}+\cdots+z_{n+p}| < \varepsilon$$

לכן

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} z_k\right| < \varepsilon$$

לכן על פי מבחן ההתכנסות של קושי גם הטור $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ מתכנס. ∎

דוגמה 2: הטור ההנדסי האינסופי: נבדוק את התכנסות הטור ההנדסי $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, עבור קבוע מרוכב z. נתחיל במציאת נוסחה עבור הסכום החלקי

$$\begin{aligned} S_n &= 1+ \quad z+z^2+z^3+\cdots+z^n \\ zS_n &= \qquad z+z^2+z^3+\cdots+z^n+z^{n+1} \end{aligned}$$

נחסיר את שתי המשוואות האחרונות ונקבל

$$S_n - zS_n = S_n(1-z) = 1-z^{n+1}$$

מכאן מתקבלת מייד נוסחת הסכום של טור הנדסי סופי המוכרת לנו מלימודי בית הספר התיכון:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$$

אם $|z|<1$ אז $|z|^n$ שואף לאפס כאשר $n\to\infty$, ולכן

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-z}$$

אם $|z|\ge 1$ אז הגבול $\lim_{n\to\infty}|z|^n$ אינו קיים, או קיים אך שונה מאפס, ולכן על פי מבחן ההתבדרות (אם האיבר הכללי אינו שואף לאפס - הטור מתבדר), הטור ההנדסי מתבדר. קיבלנו אם כן, שהטור ההנדסי מתכנס אם ורק אם $|z|<1$, ובנוסף קיבלנו את נוסחת הסכום. ברור שההתכנסות היא גם בהחלט.

מבחן טורי-p

במקרה של p ממשי מבחן זה קובע שטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ מתכנס אם ורק אם $p>1$.
כאשר $p=x+iy$ הוא מספר מרוכב

$$\left|\frac{1}{n^p}\right|=\left|\frac{1}{n^x\cdot n^{iy}}\right|=\left|\frac{1}{n^x\cdot e^{iy\ln n}}\right|=\frac{1}{n^x}=\frac{1}{n^{\mathrm{Re}(p)}}$$

לכן אנו מקבלים את המשפט הבא.

משפט 6.8: (מבחן התכנסות טורי-p)
הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$, כאשר $p\in\mathbb{C}$, מתכנס בהחלט אם ורק אם $\mathrm{Re}\,(p)>1$.

מבחן ההשוואה (Comparison Test)

מבחן השוואה להתכנסות או התבדרות של טור מתאפיין על ידי השוואת הטור הנבדק עם טור שני שהתכנסותו (או התבדרותו) כבר ידועים לנו.

יהיו $\sum_{n=1}^{\infty}z_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}w_n$ שני טורים מרוכבים נתונים. ההשוואה בין שני טורים יכולה להתבצע על ידי בדיקת תנאים כגון $|z_n|\le|w_n|$, $z_n\sim cw_n$, כלומר קיום גבול רגיל $\lim_{n\to\infty}\frac{z_n}{w_n}$ או גבול עליון $\limsup_{n\to\infty}\frac{z_n}{w_n}$.

משפט 6.9: (מבחן ההשוואה) יהיו $\sum_{n=1}^{\infty}z_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}w_n$ שני טורים מרוכבים נתונים, ויהי r קבוע ממשי חיובי. נניח כי $|z_n|\le r|w_n|$ לכל מספר טבעי, פרט אולי למספר סופי של מקרים. אזי אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}w_n$ מתכנס בהחלט אז גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}z_n$ מתכנס בהחלט.

גירסה יותר כללית של מבחן ההשוואה מובאת במשפט הבא. היא נקראת לפעמים מבחן ההשוואה הגבולי.


(6.4)

משפט 6.10: יהיו $\sum_{n=1}^{\infty}z_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}w_n$ שני טורים מרוכבים נתונים. אם קיים הגבול

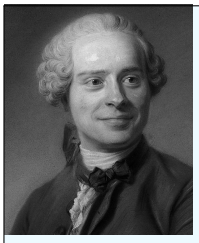
$$\lim_{n\to\infty}\frac{z_n}{w_n}=c$$

א. אם $|c|>0$ אז הטורים $\sum_{n=1}^{\infty}z_n$ ו־ $\sum_{n=1}^{\infty}w_n$ מתכנסים יחדיו או מתבדרים יחדיו.
ב. אם $c=0$ אז אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}w_n$ מתכנס בהחלט אז גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}z_n$ מתכנס בהחלט.
ג. אם $c=\infty$ אז אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}z_n$ מתכנס בהחלט גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}w_n$ מתכנס בהחלט.

מבחן המנה של דאלמבר (Jean Le Rond d'Alembert 1717-1783)

הטור ההנדסי הוא דוגמא יסודית ופשוטה לטור שהתכנסותו או התבדרותו קלה לבדיקה. מבחני ההתכנסות של קושי ודאלמבר משתמשים בטור ההנדסי כבסיס השוואה בכדי לבדוק התכנסות של טורים חדשים.

למען הנוחות, כללנו במשפט הבא את שתי הגירסאות השונות של מבחן המנה (או מבחן דאלמבר כפי שהוא נקרא לפעמים).



משפט 6.11: (מבחן המנה D'alembert) יהי $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ טור מרוכב.

א. אם קיים קבוע ממשי $r < 1$ כך שמאיבר מסוים מתקיים

$$\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| \leq r$$

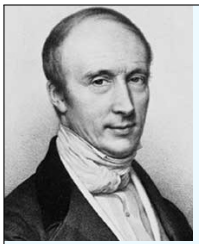
אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ מתכנס בהחלט.

ב. אם קיים הגבול $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = r$ אזי

- אם $r < 1$ אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ מתכנס בהחלט
- אם $r > 1$ אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ מתבדר
- אם $r = 1$ אז לא ניתן לקבוע התכנסות או התבדרות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ על בסיס מבחן זה.

מבחן השורש של קושי (Cauchy)

גם במקרה זה, למען הנוחות, כללנו במשפט הבא את שתי הגירסאות השונות של מבחן השורש של קושי. בגירסה הראשונה מתבצעת השוואה, ובגירסה השניה יש לחשב גבול.



משפט 6.12: (קושי)

יהי $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ טור מרוכב נתון.

א. אם החל ממקום מסוים איברי הטור מקיימים

$$\sqrt[n]{|z_n|} \leq r < 1$$

אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ מתכנס בהחלט.

ב. אם קיים הגבול

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} = r$$

אזי

- אם $r < 1$ אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ מתכנס בהחלט
- אם $r > 1$ אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ מתבדר
- אם $r = 1$ אז לא ניתן לקבוע התכנסות או התבדרות על פי מבחן זה.

ההוכחות של כל מבחני ההתכנסות האחרונים שונים רק במעט מההוכחות שלהם עבור טורים ממשיים. תרגיל מומלץ: עבור שוב על ההוכחות במקרה הממשי ונסה להבין כיצד ניתן להכלילם עבור המקרה המרוכב.

6.2 סדרות של פונקציות

הגדרה 6.4: נאמר שסדרת הפונקציות מרוכבות $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ **מתכנסת נקודתית בקבוצה** S לפונקציה $f(z)$ אם לכל נקודה $z \in S$ מתקיים

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z)$$

הפונקציה $f(z)$ נקראת **הפונקציה הגבולית** של הסדרה.

הגדרה 6.5: נאמר שסדרת הפונקציות מרוכבות $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ **מתכנסת במידה שווה בקבוצה** S לפונקציה $f(z)$ אם לכל $\varepsilon > 0$, קיים N טבעי, כך שלכל $n \geq N$, ולכל $z \in S$, $|f(z) - f_n(z)| < \varepsilon$. הסימון להתכנסות במידה שווה הוא $f_n \rightrightarrows f$.

בשפה לוגית זה נראה כך:

$$f_n \rightrightarrows f \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall n \geq N,\ \forall z \in S\colon |f(z) - f_n(z)| < \varepsilon$$

הביטוי "במידה שווה" מציין כי אותו N מתאים לכל הנקודות $z \in S$, בניגוד למצב בהתכנסות נקודתית.

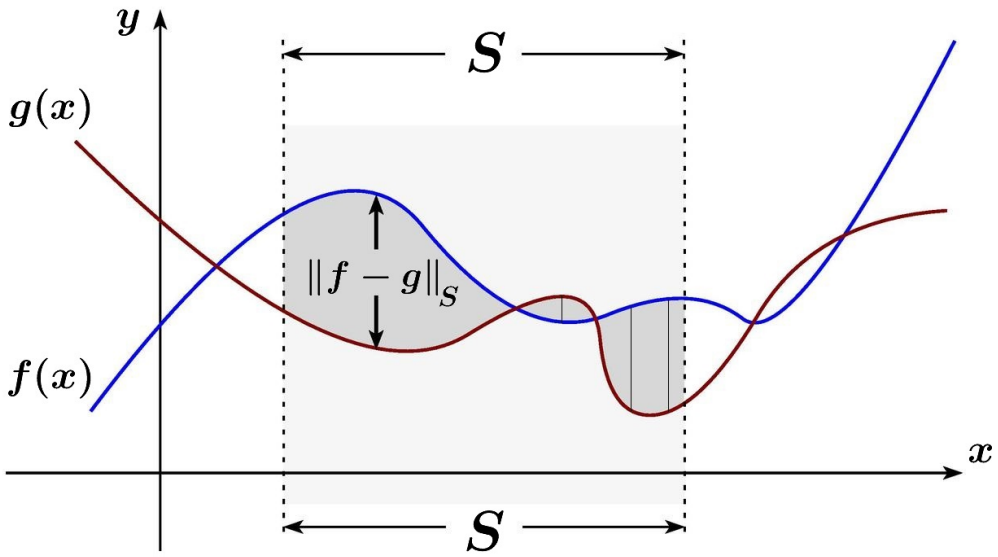
ניסוח יותר חד של ההגדרה השניה של **התכנסות במידה שווה** (Uniform Convergence) של סדרת פונקציות מתבסס על מושג **הנורמה היוניפורמית** (Uniform norm) המוגדר על ידי

$$\|f\|_S = \operatorname*{Sup}_{z\in S} |f(z)|$$

כלומר, הנורמה היוניפורמית של פונקציה $f(z)$ מעל קבוצה S היא החסם העליון (supre-mum) של $|f(z)|$ מעל הקבוצה S.

כאשר מושג זה מופעל על ההפרש של שתי פונקציות $f(z)$, $g(z)$ מעל קבוצה S, אנו מקבלים את מושג **המרחק היוניפורמי** (Uniform distance) בין שתי פונקציות מעל קבוצה S

$$\|f-g\|_S = \operatorname*{Sup}_{z\in S}|f(z)-g(z)|$$



איור 6.1: המרחק היוניפורמי בין הפונקציה $f(x)$ לפונקציה $g(x)$ שווה לערך של $\mathbf{Sup}_{x\in D}|f(x)-g(x)|$

כפי שניתן לראות בתרשים 6.1, המרחק היוניפורמי בין שתי פונקציות מעל תחום D מציין את המרחק המקסימלי בין $f(x)$ ו־$g(x)$ עבור $x\in D$. במקרים בהם המקסימום לא קיים, הרי שמדובר בסופרמום, שלפעמים עשוי להיות גם ∞.

טענה 6.13: (תכונות הנורמה היוניפורמית)

א. $\|f+g\|_D < \|f\|_D + \|g\|_D$

ב. אם $D_1 \subseteq D_2$ אז $\|f\|_{D_1} \le \|f\|_{D_2}$

ג. $\|f\|_{D_1\cup D_2} = \max\{\|f\|_{D_1}, \|f\|_{D_2}\}$

הוכחה:

א. הטענה נובעת בקלות מאי-שוויון המשולש עבור המספרים הממשיים

$$\begin{aligned}\|f+g\|_D &= \sup_{x\in D}|f(x)+g(x)|\\ &\le \sup_{x\in D}|f(x)|+|g(x)|\\ &\le \sup_{x\in D}|f(x)|+\sup_{x\in D}|g(x)|\\ &= \|f\|_D+\|g\|_D\end{aligned}$$

ב. טריביאלי.

ג. תרגיל פשוט. ■

טענה 6.14: סדרת פונקציות $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ **מתכנסת במידה שווה** לפונקציה $f(z)$ בקבוצה S, אם ורק אם

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_S = 0$$

כאמור לעיל, טיפול יסודי בנושא טורי פונקציות מופיע בנספח ב' של חוברת ההרצאות הבאה

חוברת הרצאות חדו"א 2

התכנסות המידה שווה של סדרת פונקציות הוא סוג ההתכנסות חזק יותר מהתכנסות נקודתית מאחר והוא מבטיח לפונקציה הגבולית תהיה קרובה בתכונותיה לפונקציות בסדרה.

אחד המבחנים היסודיים של התכנסות במידה שווה הוא מבחן ההתכנסות של קושי. הוא למעשה משמש בסיס תאורטי גם עבור הוכחת מבחנים מתקדמים יותר.

משפט 6.15: (מבחן קושי להתכנסות סדרת פונקציות)



סדרת פונקציות $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במידה שווה בקבוצה S אם ורק אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים מספר טבעי N כל שלכל $m, n > N$

$$\|f_m - f_n\|_S < \varepsilon$$

הוכחה:

$\Longleftarrow$: תהי $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות שמתכנסת במידה שווה בקבוצה S לפונקציה גבולית $f(x)$. כלומר

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_S = 0$$

יהי $\varepsilon > 0$. קיים טבעי N כך שלכל $n > N$ מתקיים $\|f - f_n\|_S < \frac{\varepsilon}{2}$, ולכן לכל שני טבעיים $m, n > N$

$$\begin{aligned} \|f_m - f_n\|_S &= \|f_m - f + f - f_n\|_S \\ &\le \|f_m - f\|_S + \|f - f_n\|_S \\ &< \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

קיבלנו לכן $\|f_m - f_n\|_S < \varepsilon$.

$\Longrightarrow$: יהי $\varepsilon > 0$ נתון. נניח שקיים N כך שלכל $m, n > N$ מתקיים $\|f_m - f_n\|_S < \varepsilon$.

יהי $x \in S$. אזי לכל $m, n > N$ מתקיים

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

כי

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \|f_m - f_n\|_S < \varepsilon$$

לכן על פי מבחן קושי עבור סדרות של מספרים ממשיים הסדרה $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת לגבול שנקרא לו $f(x)$. יתירה מזאת

$$|f(x) - f_n(x)| = \lim_{m\to\infty} |f_m(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$$

אי-השוויון האחרון נכון לכל $x \in S$, ולכן קיבלנו

$$\|f - f_n\|_S \leq \varepsilon$$

ולכן סדרת הפונקציות f_n מתכנסת במידה שווה לפונקציה f. ∎

בניגוד להתכנסות נקודתית, תחת תנאים מתאימים, התכנסות במידה שווה משמרת תכונות כגון רציפות, אנליטיות, ואינטגרבילית. למשל: אם סדרת פונקציות רציפות $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במידה שווה לפונקציה $f(z)$, אז גם $f(z)$ רציפה.

משפט 6.16: אם סדרת פונקציות רציפות $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במידה שווה לפונקציה $f(z)$ בתחום D, אזי $f(z)$ רציפה בתחום D.

הוכחה: תהי z_0 נקודה כלשהי בתחום D. אזי לכל מספר טבעי n

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z_0)| &= |f(z) - f_n(z) + f_n(z) - f_n(z_0) + f_n(z_0) - f(z_0)| \\ &\leq |f(z) - f_n(z)| + |f_n(z) - f_n(z_0)| + |f_n(z_0) - f(z_0)| \\ &\leq 2\|f - f_n\|_D + |f_n(z) - f_n(z_0)| \end{aligned}$$

יהי $\varepsilon > 0$. על סמך ההתכנסות במידה שווה, קיים n כך ש־

$$\|f - f_n\|_D < \frac{\varepsilon}{3}$$

על סמך הגדרת הרציפות, קיים $\delta > 0$ כך ש־

$$|z - z_0| < \delta \implies |f_n(z) - f_n(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

לכן עבור כל z המקיים $|z-z_0|<\delta$

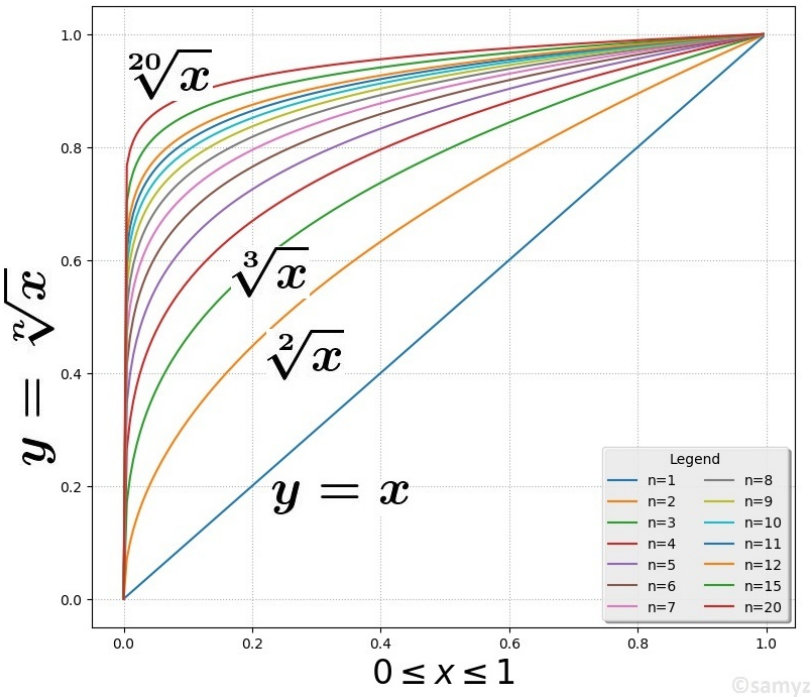
$$|f(z)-f(z_0)| \le 2\,\|f-f_n\|_D + |f_n(z)-f_n(z_0)| < 2\cdot\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$$

על פי הגדרת הרציפות, f רציפה בנקודה z_0. ∎

דוגמה 3: סדרת הפונקציות $f_n(z)=\sqrt[n]{z}$ אינה מתכנסת במידה שווה בעיגול $|z|\le 1$. אם כן, אז גם סדרת הפונקציות הממשיות $f_n(x)=\sqrt[n]{x}$ מעל הקטע הסגור $[0,1]$ היתה מתכנסת במידה שווה. לא קשה לראות כי הפונקציה הגבולית

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0<x\le 1\\ 0, & x=0\end{cases}$$

אינה רציפה בסתירה לחלק 1 של משפט 6.16. ניתן להתרשם משירטוט 6.2 שההתכנסות לפונקציה $f(x)$ היא נקודתית אך לא במידה שווה



איור 6.2: סדרת הפונקציות $f_n(x)=\sqrt[n]{x}$ בקטע $[0,1]$

משפט 6.17: תהי $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות רציפות מתכנסת במידה שווה לפונקציה $f(z)$ בתחום D, ויהי $\sigma:[a,b]\to D$ מסלול חלק למקוטעין בתוך D. אזי

$$\int_{\sigma} f(z)\,dz=\int_{\sigma}\left[\lim_{n\to\infty}\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}\right]dz=\lim_{n\to\infty}\int_{\sigma} f_n(z)\,dz$$

הוכחה: יספיק להוכיח את הגבול הבא

$$\left|\int_{\sigma} f(z)\,dz - \int_{\sigma} f_n(z)\,dz\right| = \left|\int_{\sigma} [f(z) - f_n(z)]\,dz\right| \le \int_{\sigma} |f(z) - f_n(z)|\,dz \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

על פי הגדרת מסלול חלק, הפונקציה $\sigma'(t)$ רציפה בקטע $[a,b]$, ולכן חסומה על ידי ממשי M. מההתכנסות במידה שווה נובע כי $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_{\sigma} = 0$. לכן

$$\begin{aligned}\int_{\sigma} |f(z) - f_n(z)|\,dz &= \int_{\sigma} |f(\sigma(t)) - f_n(\sigma(t))|\,\sigma'(t)\,dt \\ &\le \int_{\sigma} \|f - f_n\|_{\sigma} \cdot |\sigma'(t)|dt \\ &\le M \cdot \ell(\sigma) \cdot \|f - f_n\|_{\sigma} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\end{aligned}$$

קיבלנו

$$\lim_{n\to\infty} \left|\int_{\sigma} f(z)\,dz - \int_{\sigma} f_n(z)\,dz\right| = 0$$

ולכן $\lim_{n\to\infty} \int_{\sigma} f_n(z)\,dz = \int_{\sigma} f(z)\,dz$. ∎

משפט 6.18: תהי $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות אנליטיות מעל תחום D, המתכנסת במידה שווה לפונקציה $f(z)$. אזי גם הפונקציה $f(z)$ אנליטית מעל התחום D.

הוכחה: הרציפות של f מובטחת לנו ממשפט 6.16 (זה התנאי הראשון לשימוש במשפט מוררה). בשלב השני נוכיח כי $\oint_{\sigma} f(z)\,dz = 0$ עבור כל מסלול ז'ורדן חלק למקוטעין σ בתחום D. לכן ממשפט מוררה יינבע כי f אנליטית בתחום D. התכנסות במידה שווה מעל המסלול σ גוררת כי

$$\|f - f_n\|_{\sigma} = \operatorname*{Sup}_{t\in[a,b]} |f(\sigma(t) - f_n(\sigma(t))| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

הפונקציה הרציפה למקוטעין $\sigma'(t)$ חסומה בקטע הסגור $[a,b]$, ולכן על פי משפט ווייארשטראס חסומה בו. יהי $M = \operatorname{Max}_{a\le t\le b} |\sigma'(t)|$. לכן

$$\begin{aligned}\left|\oint_{\sigma} f(z)\,dz - \oint_{\sigma} f_n(z)\,dz\right| &\le \oint_{\sigma} |f(z) - f_n(z)|\,dz \\ &\le \int_{\sigma} \|f - f_n\|_{\sigma} \cdot |\sigma'(t)|dt \\ &\le M \cdot \ell(\sigma) \cdot \|f - f_n\|_{\sigma} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\end{aligned}$$

קיבלנו לכן

$$\oint_{\sigma} f(z)\,dz = \lim_{n\to\infty}\oint_{\sigma} f_n(z)\,dz = 0$$

לכן על פי משפט מוררה (משפט 5.29) f אנליטית מעל D. ∎

6.3 טורי פונקציות

הגדרה 6.6: תהי $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות המוגדרות בקבוצה S. הביטוי

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + f_3(z) + \cdots + f_n(z) + \cdots \tag{6.5}$$

נקרא **טור פונקציות**.

נרצה להגדיר מהו **סכום של טור פונקציות**. לשם כך נציין כי אם נציב נקודה ספציפית z_0 בביטוי (6.5) נקבל **טור מספרים רגיל** שאודותיו יש לנו כבר מספר רב של מבחני התכנסות.

הגדרה 6.7: נאמר שטור הפונקציות $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ **מתכנס נקודתית** לסכום $f(z)$ בקבוצה S, אם לכל $z_0 \in S$, הטור המספרי $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z_0)$ מתכנס לסכום $f(z_0)$. הפונקציה $f(z)$ נקראת גם **פונקציית הסכום** של הטור.

העובדה הבסיסית שלכל נקודה z בתחום ההתכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ הוא למעשה טור מספרים מאפשרת לנו להשתמש בכל מבחני ההתכנסות הידועים על טור מספרי רגיל.

דוגמה 4: מצא את תחום ההתכנסות של כל אחד מהטורים הבאים

א. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n+1}$ **ב.** $\sum_{n=1}^{\infty} z^n \sin\frac{z}{n+1}$

ג. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{z}{1+2z}\right)^n$ **ד.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

פתרון:

א. נבדוק התכנסות בהחלט על פי מבחן המנה (משפט 6.11)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{z^{n+1}}{n+2}\right| : \left|\frac{z^n}{n+1}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}|z| = |z|$$

על פי מבחן המנה, הטור מתכנס עבור $|z|<1$, ומתבדר עבור $|z|>1$. מבחן המנה לא נותן תשובה עבור $|z|=1$ (מעגל היחידה). הצבת $z=1$ נותנת טור הרמוני מתבדר, והצבת $z=-1$ נותנת טור לייבניץ מתכנס. כרגע לא ברור מה קורה עם נקודות אחרות

שנמצאות על מעגל היחידה.

ב. נבדוק התכנסות בהחלט על פי מבחן ההשוואה הגבולי (משפט 6.10). נבצע השוואה מול הטור הקודם

$$z_n = z^n \sin\tfrac{z}{n+1}$$

$$w_n = \tfrac{z^n}{n+1}$$

ולכן

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|z_n|}{|w_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|z^n\sin\frac{z}{n+1}\right|}{\left|\frac{z^n}{n+1}\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\sin\frac{z}{n+1}\right|}{\frac{1}{n+1}}=|z|$$

השוויון האחרון נובע מכלל לופיטל על ידי הצבת $t=\frac{1}{n+1}$, וחישוב $\lim_{t\to 0^+}\frac{\sin zt}{t}$.
לכן על פי מבחן ההשוואה הגבולי, הטור $\sum_{n=1}^{\infty} z^n\sin\frac{z}{n+1}$ מתכנס בעיגול היחידה הפתוח $|z|<1$. הטור יתבדר עבור $|z|>1$. לגבי מעגל היחידה $|z|=1$ המצב לא ברור.

ג. נשתמש במבחן השורש (משפט 6.12). הערך המוחלט של האיבר הכללי הוא

$$|z_n|=\left|\frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{z}{1+2z}\right)^n\right|=\frac{1}{n}\left|\frac{z}{1+2z}\right|^n$$

ולכן

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|z_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\left|\frac{z}{1+2z}\right|=\left|\frac{z}{1+2z}\right|$$

על פי מבחן השורש הטור מתכנס כאשר $\left|\frac{z}{1+2z}\right|<1$. יש למצוא התמונה ההפוכה של עיגול היחידה תחת העתקת מביוס $T(z)=\frac{z}{1+2z}$. לא קשה למצוא באמצעות השיטות שלמדנו בפרק 3 כי התמונה ההפוכה היא העיגול $|z-\frac{2}{3}|<\frac{1}{3}$. מבחן השורש לא נותן תשובה לגבי נקודות הנמצאות על המעגל $|z-\frac{2}{3}|=\frac{1}{3}$. אבל לגבי נקודות שמחוץ למעגל, מבחן השורש קובע שהטור מתבדר.

ד. קל לבדוק שעל פי מבחן המנה הטור מתכנס עבור כל z מרוכב

סדרת הסכומים החלקיים $\{S_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ של טור פונקציות $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ מוגדרת על ידי

$$S_n(z)=\sum_{k=1}^{n} f_k(z)$$

הגדרה 6.8: נאמר שטור פונקציות $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ **מתכנס במידה שווה** בקבוצה S, אם סדרת הסכומים החלקיים שלו $\{S_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במידה שווה בקבוצה S.

משפט 6.19: (מבחן קושי להתכנסות טור פונקציות)
הטור $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ מתכנס במידה שווה בקבוצה S אם ורק אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים מספר טבעי N (התלוי ב־ε בלבד) כך שלכל $m, n > N$ מתקיים

$$\|S_m - S_n\|_S < \varepsilon$$

הוכחה: נובעת מייד ממבחן קושי עבור סדרת פונקציות (משפט 6.15). ∎

מבחן-M של וויארשטראס (Weierstrass M-Test)

מבחן התכנסות בסיסי אך מאוד שימושי לבדיקת התכנסות במידה שווה של טור פונקציות הוא מבחן-M של וויארשטראס. למרות שמבחן זה אינו הכי כללי, הוא יספיק לנו בכדי לבסס את רוב התוצאות החשובות של הפרק.

משפט 6.20: (מבחן M של וויארשטראס, Weierstrass M-Test)
יהי $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ טור פונקציות נתון בקבוצה S. אם קיים טור מספרים חיובי מתכנס $\sum_{n=1}^{\infty} r_n$, וקיים מספר טבעי N, כך שלכל $n > N$



$$\|f_n\|_S \le r_n$$

אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ מתכנס במידה שווה ובהחלט בקבוצה S.

הוכחה: יהי $\varepsilon > 0$. אזי על פי מבחן קושי להתכנסות הטור החיובי $\sum_{n=1}^{\infty} r_n$, קיים N כך שלכל $n > m > N$, מתקיים $\sum_{k=m+1}^{n} r_k < \varepsilon$. לכן

$$\begin{aligned} \|S_n - S_m\|_S &= \|f_{m+1} + f_{m+2} + \cdots f_n\|_S \\ &\le \|f_{m+1}\|_S + \|f_{m+2}\|_S + \cdots + \|f_n\|_S \\ &\le r_{m+1} + r_{m+2} + \cdots + r_n < \varepsilon \end{aligned}$$

במעבר מהשורה הראשונה לשניה הסתמכנו על טענה 6.13. ∎

דוגמה 5: טור הפונקציות $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ מתכנס במידה שווה מעל עיגול היחידה הסגור $|z| \le 1$. זוהי תוצאה מיידית ממבחן-M של וויארשטראס. הטור חסום על ידי טור המספרים $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, הידוע לנו כמתכנס על פי מבחן-p (משפט 6.8). נציין כי מבחן-M של וויארשטראס רק בודק אם הטור מתכנס במידה שווה או לא, אך לא מספק נוסחה לסכום הטור. בשלב הנוכחי לא ידועה לנו פונקציית הסכום של הטור.

תרגיל 6.1: בדוק התכנסות במידה שווה של הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{9^n}\cos(nz)$ על כל המישור המרוכב $\mathbb{C}$.

תרגיל 6.2: הוכח שאם $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(z)$ ו־ $\sum_{n=1}^{\infty}g_n(z)$ שני טורים מתכנסים במידה שווה בקבוצה S, אז גם הטורים $\sum_{n=1}^{\infty}cf_n(z)$, $\sum_{n=1}^{\infty}[f_n(z)\pm g_n(z)]$ מתכנסים במידה שווה בקבוצה S.

משפט 6.21: יהי $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(z)$ טור פונקציות רציפות בתחום D המתכנס במידה שווה לפונקציה $f(z)$ בתחום D. אזי

א. פונקציית הסכום $f(z)$ רציפה בתחום D.

ב. אם בנוסף הפונקציות $f_n(z)$ אנליטיות בתחום D, אז גם פונקציית הסכום $f(z)$ אנליטית בתחום D.

ג. לכל מסלול חלק למקוטעין $\sigma:[a,b]\to D$ בתחום D מתקיים

$$\int_{\sigma}f(z)\,dz=\int_{\sigma}\sum_{n=1}^{\infty}f_n(z)\,dz=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\sigma}f_n(z)\,dz$$

הוכחה: נעבור לסדרת הסכומים החלקיים

$$S_n(z)=\sum_{k=0}^{n}f_k(z)$$

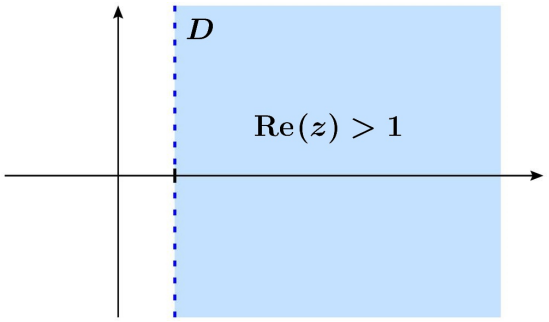
המשפט נובע בקלות מהמשפטים המקבילים עבור סדרת פונקציות 6.16, 6.17, 6.18. לשם דוגמא נוכיח את חלק ג': על פי הנתון, הסכומים החלקיים $\{S_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ הן פונקציות רציפות בתחום D, ולכן על פי משפט 6.17

$$\begin{aligned}\int_{\sigma}f(z)\,dz &= \int_{\sigma}\left[\lim_{n\to\infty}\{S_n(z)\}_{n=1}^{\infty}\right]dz=\lim_{n\to\infty}\int_{\sigma}S_n(z)\,dz\\ &= \lim_{n\to\infty}\int_{\sigma}\left[\sum_{k=0}^{n}f_k(z)\right]dz=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\int_{\sigma}f_k(z)\,dz=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{\sigma}f_n(z)\,dz\end{aligned}$$

והמסקנה היא פשוט תירגום משפת סדרות לשפת טורים. ∎

דוגמה 6: נחזור לטורי-p שפגשנו קודם. אם z משתנה מרוכב חופשי, אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z}$ הוא טור פונקציות $f_n(z)=\frac{1}{n^z}$, המוגדרות על כל $\mathbb{C}$. נוכיח כי טור זה מתכנס בהחלט ובמידה שווה מעל כל תת-קבוצה סגורה וחסומה של התחום

$$D=\{\,z\in\mathbb{C}:\ \operatorname{Re}(z)>1\,\}$$



איור 6.3: תחום ההתכנסות בהחלט של הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z}$

תהי K תת-קבוצה סגורה וחסומה של D. על פי וויארשטראס ניתן להוכיח שקיים מספר ממשי $a>1$ כך שלכל $z\in K$, $z\geq a$.[1] בדוגמא הקודמת ראינו כי

$$\left|\frac{1}{n^z}\right|=\frac{1}{n^{\mathrm{Re}(z)}}\leq\frac{1}{n^a}$$

נסמן $M_n=\frac{1}{n^a}$. אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty}M_n$ מקיים את תנאי מבחן-M של וויארשטראס ביחס לטור הפונקציות $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z}$, ולכן הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z}$ מתכנס במידה שווה מעל הקבוצה K. הפונקציה $f_n(z)=\frac{1}{n^z}$ היא פונקציה אנליטית בתחום D, ולכן על פי משפט 6.21, הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z}$ מתכנס לפונקציה אנליטית (בכל D). פונקציית הסכום ידועה בשם **פונקציית זטא של רימן**

$$\zeta(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z}$$

מההשערה המפורסמת של רימן:

The Rieman Hypothesis

אשר עדיין מחכה לפתרונה (משנת 1859). רימן גילה המשכה אנליטית של הפונקציה $\zeta(z)$ לכל המישור המרוכב, וההשערה שלו מתייחסת לפונקציה המורחבת.

תרגיל 6.3: הוכח כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}$ מתכנס לפונקציה אנליטית בעיגול היחידה הפתוח $\mathbb{D}(0,1)$.

[1] הפונקציה $g:K\to\mathbb{R}$, $g(z)=\mathrm{Re}(z)$ היא פונקציה רציפה ולכן מקבלת מינימום a בנקודה $z\in K$. a חייב לקיים $a>1$, אחרת $\mathrm{Re}(z)=1$ בסתירה לנתון

6.4 טורי חזקות

טורי חזקות הן סוג מסוים של טורי פונקציות אשר בהן האיבר הכללי הוא מהצורה

$$f_n(z) = a_n(z - z_0)^n$$

הגדרה 6.9: טור פונקציות מהצורה

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = a_0 + a_1(z - z_0)^1 + a_2(z - z_0)^2 + \cdots + a_n(z - z_0)^n + \cdots \tag{6.6}$$

נקרא **טור חזקות**. הנקודה z_0 נקראת **מרכז הטור**, והקבועים a_n נקראים **מקדמי הטור**.

בחלק גדול מהדוגמאות והמקרים מרכז הטור הוא בדרך כלל $z_0 = 0$. במקרה זה, יש לטור החזקות צורה יותר פשוטה

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots + a_n z^n + \cdots \tag{6.7}$$

טור כזה נקרא **טור מקלורן** על שמו של המתמטיקאי הסקוטי קולין מקלורן שחקר אותו. למעשה ניתן להמיר כל טור חזקות מהצורה הכללית (6.6) לטור חזקות פשוט מהצורה (6.7) על ידי ההצבה $t = z - z_0$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

לכן היה מספיק לחקור טורי חזקות מהצורה (6.7) בלבד.

דוגמה 7: כל פולינום הוא למעשה טור חזקות אשר כל מקדמיו מלבד מספר סופי מתאפס

$$-7z^2 + 14iz - (3 + 5i) = -(3 + 5i) + 14iz - 7z^2 + 0z^3 + 0z^4 + 0z^5 + \cdots$$

לכן טור חזקות הוא הכללה של מושג הפולינום למימד אינסופי, ואכן בהקשרים מסוימים, טור חזקות נקרא לפעמים "פולינום אינסופי".

דוגמה 8: טור החזקות הכי מוכר וידוע הוא הטור הגאומטרי

$$\frac{1}{1 - z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots$$

מרכז הטור הוא $z_0 = 0$, ולכל מקדמיו שווים 1 (כלומר, לכל n, $a_n = 1$). כזכור תחום

ההתכנסות שלו הוא עיגול היחידה הפתוח $|z|<1$.

המתימטיקאי הסקוטי קולין מקלורן (Colin Maclaurin 1698-1746) השתמש במונח זה בחיפושיו אחרי שיטות חישוב פרקטיות של פונקציות טרנסצנדנטיות ממשיות כמו $\sin x$, $\cos x$, $\log x$, a^x. הרעיון הבסיסי שלו היה למצוא דרך כלשהי בכדי "להמיר" את הפונקציות האלה לפולינומים, ועל ידי כך לאפשר את החישוב שלהם ביתר קלות (פולינום דורש רק פעולות כפל וחיבור שכל ילד מכיר היטב מהשנים הראשונות של בית הספר היסודי). אבל כמובן הוא הבין היטב שלא קיים שום פולינום ממעלה סופית $P(x)$ המקיים $\sin x = P(x)$ לכל x ממשי. הסיבה לכך פשוטה מאוד: לכל פולינום ממעלה n יש לכל היותר n שורשים בעוד שלפונקציה $\sin x$ למשל יש אינסוף שורשים.

תרגיל 6.4: הוכח כי לא קיים שום פולינום $P(z)$ ממעלה סופית שזהה לפונקציה $\sin z$ בתחום $D \subseteq \mathbb{C}$ כלשהו (לא ריק).

הדרכה: הנח ש־ $\sin z = P(z)$ עבור כל z בתחום D, גזור את שני אגפי השוויון $n+1$ פעמים (כאשר n היא מעלת הפולינום) וקבל סתירה.

מאמצי המחקר של קולין מקלורן (וברוק טיילור) הובילו בסופו של דבר לגילוי טורי חזקות, שבמובן מסוים הם פולינומים ממעלה אינסופית. קולין מקלורן הצליח בסופו של דבר להוכיח שכל הפונקציות הטרנסצנדנטיות שהיו ידועות בזמנו ניתן לבטא באמצעות טורי חזקות. באיור 6.4 מוצגים טורי מקלורן הידועים עבור פונקציות יסודיות ממשיות שמוכרות לנו מקורסי חדו"א 1.

$$
\begin{array}{rcll}
e^x & = & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} & = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \\
\sin x & = & \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} & = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \\
\cos x & = & \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} & = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \\
\arctan x & = & \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} & = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \\
\ln(1+x) & = & \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} & = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \\
(1+x)^\alpha & = & \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n & = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots, (\alpha \in \mathbb{R}) \\
\frac{1}{1-x} & = & \sum_{n=0}^{\infty} x^n & = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \\
\frac{1}{1+x} & = & \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n & = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots
\end{array}
$$

איור 6.4: טבלת טורי מקלורן של פונקציות יסודיות (ממשיות)

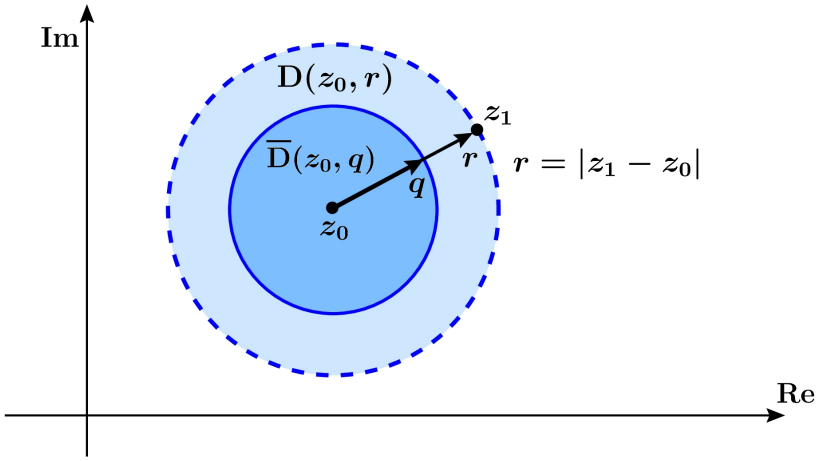
בהמשך הפרק נוכיח שהנוסחאות בטבלה 6.4 ממשיכות להיות נכונות גם עבור הגירסאות

המרוכבות של הפונקציות שבעמודה השמאלית של הטבלה.

תחום התכנסות של טור חזקות

- ברור כי כל טור חזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ מתכנס בנקודה $z=0$.
- ככל שקצב הגידול של סדרת המקדמים a_n יותר מהיר כך מצטמצם תחום ההתכנסות של הטור.
- למשל טור החזקות $\sum_{n=0}^{\infty} n^n z^n$ מתכנס בנקודה $z=0$ בלבד! (כי $n^n z^n = (nz)^n$ מתבדר אם $z \neq 0$).
- לעומת זאת, הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ מתכנס עבור כל z מרוכב.

משפט 6.22: (משפט עזר יסודי)
אם טור חזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ מתכנס בנקודה $z_1 \neq z_0$, אזי הוא מתכנס בהחלט בעיגול הפתוח $\mathbb{D}(z_0, r)$, כאשר $r = |z_1 - z_0|$, והוא מתכנס במידה שווה ובהחלט בכל עיגול סגור $\overline{\mathbb{D}}(z_0, q)$, עבור $q < r$.



איור 6.5: אם טור חזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ מתכנס בנקודה z, אז הוא מתכנס בהחלט בעיגול הפתוח $\mathbb{D}(z_0, r)$, $r = |z - z_0|$, ומתכנס בהחלט ובמידה שווה בכל עיגול סגור $\overline{\mathbb{D}}(z_0, q)$, $q < r$

הערות:

1. יש לשים לב לכך שהטענה אינה מחייבת שהטור יתכנס עבור נקודות נוספות על המעגל $|z - z_0| = r$ (מלבד הנקודה z_1 אשר על פי הנתון הטור מתכנס עבורה).
2. הטענה מחייבת התכנסות בהחלט עבור כל הנקודות z שמרחקן ממרכז הטור z_0 קטן מ־r, והתכנסות במידה שווה מעל כל תת-עיגול סגור $\overline{\mathbb{D}}(z_0, q)$, כל $q < r$.
3. שימוש בטענה זו יעשה בכמה מקומות חשובים.

הוכחה: תהי z נקודה פנימית של העיגול הפתוח $\mathbb{D}(z_0, r)$ ונסמן $q = |z - z_0|$. על פי הנתון הטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z_1 - z_0)^n$ מתכנס. לכן הסדרה $|a_n (z_1 - z_0)^n| = |a_n| r^n$ שואפת לאפס,

ולכן הסדרה $\{|a_n|r^n\}_{n=1}^{\infty}$ חסומה על ידי מספר ממשי K. עכשיו

$$|a_n(z-z_0)^n| = |a_n q^n| = \left|a_n r^n \cdot \frac{q^n}{r^n}\right| = |a_n r^n| \cdot \left(\frac{q}{r}\right)^n \leq K \cdot \left(\frac{q}{r}\right)^n$$

הטור $\sum_{n=0}^{\infty} K\left(\frac{q}{r}\right)^n$ הוא טור הנדסי מתכנס ($\frac{q}{r} < 1$) שחוסם את הטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$. נציב $M_n = K \cdot (\frac{q}{r})^n$ במבחן-M של ויארשטראס ונקבל כי הטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ מתכנס בהחלט ובמידה שווה על העיגול הסגור $\overline{\mathbb{D}}(z_0, r)$. ∎

מסקנה 6.23: אם הטור חזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ מתבדר בנקודה z_1, אז הוא מתבדר עבור כל נקודה שמחוץ לעיגול $\mathbb{D}(z_0, r)$, כאשר $r = |z_1 - z_0|$.

משפט 6.22 והמסקנה האחרונה הן הבסיס להגדרת מושג **רדיוס ההתכנסות** של טור חזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$

$$R = \text{Sup}\left\{|z-z_0| \ : \ \text{מתכנס} \ \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n\right\}$$

המספר R קיים כי הטור מתכנס עבור $z = z_0$, ועשוי גם להיות ∞ (אם הטור מתכנס על כל המישור המרוכב). המשפט הבא מסכם את המצב עד עכשיו.

משפט 6.24: יהי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ טור חזקות נתון, ויהי R רדיוס ההתכנסות שלו. להלן כל האפשרויות שייתכנו

א. $R = 0$:

הטור מתכנס בנקודה z_0 בלבד.

ב. $0 < R < \infty$:

- הטור מתכנס בהחלט בעיגול הפתוח $\mathbb{D}(z_0, R)$.
- הטור מתכנס בהחלט ובמידה שווה בכל עיגול סגור $\overline{\mathbb{D}}(z_0, r)$, $r < R$.
- הטור מתבדר במישור המחורר $\mathbb{C} - \overline{\mathbb{D}}(z_0, R)$.
- לגבי נקודות על המעגל $|z-z_0| = R$ תיתכן התכנסות בנקודות מסוימות והתבדרות באחרות. לא ניתן לקבוע מראש דבר, זה תלוי בטור הספציפי.

ג. $R = \infty$:

הטור מתכנס בהחלט על כל המישור המרוכב $\mathbb{C}$, ומתכנס במידה שווה על כל קבוצה חסומה.

לאור המשפט האחרון, יש חשיבות גדולה לשיטות חישוב של רדיוס ההתכנסות של טור נתון. נציג שתי שיטות כאלה שיספיקו לרוב הצרכים שלנו בקורס.

משפט 6.25: (נוסחת קושי-האדאמר Cauchy-Hadamard)
יהי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ טור חזקות נתון אשר לסדרת המקדמים שלו $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ קיים הגבול (במובן הרחב)

$$Q = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$



א. אם $Q=0$ אזי רדיוס ההתכנסות של הטור הוא $R=\infty$.

ב. אם $Q=\infty$ אזי רדיוס ההתכנסות של הטור הוא $R=0$.

ג. אם $0<Q<\infty$ אזי רדיוס ההתכנסות הוא $R=\frac{1}{Q}$.

הוכחה: הוכחה מפורטת ניתן למצוא בקישור הבא (נספח ג' בסוף החוברת)

חוברת הרצאות חדו"א 2

ניתן לסכם את המשפט בקצרה על ידי הנוסחה הבאה (**נוסחת קושי-האדאמר**)

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \tag{6.8}$$

ברוב המקרים שנתקל בהם, קיים הגבול $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, ולכן אין צורך בחישוב גבול עליון.

משפט 6.26: (נוסחת המנה לחישוב רדיוס התכנסות)
יהי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ טור חזקות נתון אשר לסדרת המקדמים שלו $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ קיים הגבול (במובן הרחב)

$$Q = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

א. אם $Q=0$ אזי רדיוס ההתכנסות של הטור הוא $R=\infty$.

ב. אם $Q=\infty$ אזי רדיוס ההתכנסות של הטור הוא $R=0$.

ג. אם $0<Q<\infty$ אזי רדיוס ההתכנסות הוא $R=\frac{1}{Q}$.

ניתן לסכם את המשפט בקצרה על ידי הנוסחה הבאה (נוסחת המנה לחישוב רדיוס

התכנסות)

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \tag{6.9}$$

נציין כי לנוסחת האדאמר יש יתרון על פני נוסחת המנה בכך שהיא אמורה לתת את רדיוס ההתכנסות המדויק עבור כל טור אפשרי, בעוד שנוסחת המנה תלויה בקיום הגבול. הבעייה היחידה עם נוסחת האדאמר היא שלא תמיד קל לחשב את הגבול הדרוש עבורה.

דוגמה 9: רדיוס ההתכנסות של הטור ההנדסי המתחלף

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$$

הוא $R = 1$. נוסחת פונקציית הסכום מתקבלת בקלות על ידי הצבת $-z$ בטור ההנדסי הרגיל (ראה דוגמא 8). רדיוס ההתכנסות מתקבל מיידית מנוסחת האדאמר (6.8) וגם על ידי שימוש בנוסחת המנה (6.9). על פי משפט 6.24 הטור מתכנס בהחלט בעיגול הפתוח $\overline{\mathbb{D}}(0,1)$, ומתכנס בהחלט ובמידה שווה בכל עיגול סגור $\overline{\mathbb{D}}(0,r)$, $r<1$. נוכיח כי הטור אינו מתכנס במידה שווה בעיגול הפתוח $\overline{\mathbb{D}}(0,1)$. בדומה לדוגמא 8, קל להגיע לנוסחת הסכום החלקי

$$S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k z^k = \frac{1-(-1)^n z^n}{1+z}$$

ולכן

$$\left| \frac{1}{1+z} - \frac{1-(-1)^n z^n}{1+z} \right| = \left| \frac{(-1)^n z^n}{1+z} \right| = \left| \frac{z^n}{1+z} \right|$$

קל לבדוק כי

$$\operatorname*{Sup}_{|z|<1} \left| \frac{z^n}{1+z} \right| = \operatorname*{Sup}_{|z|<1} \frac{|z|^n}{|1+z|} = \infty$$

למשל, כאשר z מתקרב לנקודה -1 מצד ימין, הביטוי במכנה $|1+z|$ מתקרב לאפס, בעוד שהמונה $|z|^n$ מתקרב ל־1. לכן השבר שבאגף ימין שואף לצורה $\frac{1}{0} = \infty$. לכן הטור אינו מתכנס במידה שווה בעיגול הפתוח $\mathbb{D}(0,1)$.

אם נסמן $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n z^n$, אז נוכל לרשום $f(z) = \frac{1}{1+z}$ עבור כל $|z|<1$. הטור מתבדר עבור $|z| \geq 1$, ולכן תחום ההגדרה של $f(z)$ הוא $|z|<1$ בלבד. תחום ההגדרה של הפונקציה $\frac{1}{1+z}$, לעומת זאת, הוא הרבה יותר גדול $\mathbb{C}-\{-1\}$: כל המישור המרוכב פרט לנקודה $z=-1$.

הפער שבין תחום ההתכנסות של הטור לבין תחום ההגדרה של פונקציית היעד שהוא אמור לחשב $\frac{1}{1+z}$ יוצר תחושת החמצה שלכאורה הטור אינו ממלא את היעוד שלו הוא נועד: טור

החזקות של $\frac{1}{1+z}$ עושה את עבודתו רק עבור ערכים $|z|<1$, שמהווים חלק קטן מאוד מתחום ההגדרה של $\frac{1}{1+z}$. כפי שנלמד בהמשך, מדובר בדפוס קבוע: כל נקודה סינגולרית (במקרה שלנו $z=-1$) של פונקציית היעד מהווה מחסום לרדיוס ההתכנסות של הטור.

בגלל הנקודה הסינגולרית $z=-1$ לא נוכל לפתח טור חזקות עבור $\frac{1}{1+z}$ שמתכנס על כל תחום ההגדרה של הפונקציה, אך ניתן לפתח טורי חזקות בעלי רדיוס התכנסות יותר גדול, אם בוחרים במרכז רחוק מהנקודה הסינגולרית $z=-1$. הנה שיטה לבניית טור חזקות עבור הפונקציה $\frac{1}{1+z}$ שמרכזו בנקודה $z_0=5$ ורדיוס ההתכנסות שלו הוא $R=6$

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+z} &= \frac{1}{6+(z-5)} = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{6}(z-5)} \\ &= \frac{1}{6}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{6^n}(z-5)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{6^{n+1}}(z-5)^n\end{aligned}$$

קל לבדוק על פי נוסחת האדאמר כי רדיוס ההתכנסות של טור זה הוא $R=6$.

הפונקציה $\frac{1}{1+z}$ נקראת **המשכה אנליטית** של הפונקציה $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n z^n$ או של הפונקציה $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{6^{n+1}}(z-5)^n$, מאחר והיא זהה לשתיהן בתחום ההתכנסות שלהם, אך מוגדרת על תחום הרבה יותר גדול.

תרגיל 6.5: מצא את רדיוס ההתכנסות ותחום ההתכנסות של הטורים הבאים

א. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ **ב.** $\sum_{n=0}^{\infty}(3^n-2^n)z^n$ **ג.** $\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n\frac{(z-5)^n}{n^4}$

הדרכה: **א.** ישירות ע"י מבחן המנה מקבלים $R=\infty$ **ב.** רמז: $3^n-2^n=2^n\left[\left(\frac{3}{2}\right)^n-1\right]$

תרגיל 6.6: מצא דוגמא לטור חזקות $\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ אשר עבורו קיים הגבול

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

אך לא קיים הגבול

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

הדרכה: נסה לשלב בין 2^n ובין 3^n.

תרגיל 6.7: אם רדיוס ההתכנסות של טור החזקות $\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ הוא R, מה תוכל לומר על רדיוס ההתכנסות של הטור $\sum_{n=0}^{\infty}na_n z^n$?

הדרכה: בדוק על ידי נוסחת האדאמר שרדיוס ההתכנסות יוצא זהה.

גזירה ואינטגרציה של טור חזקות

בהינתן טור חזקות $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ המתכנס לפונקציה $f(z)$ נרצה לדעת באילו תנאים הפונקציה $f(z)$ גזירה? והאם ניתן לגזור את שני האגפים ועדיין לקבל שוויון בין $f'(z)$ וסכום הנגזרות של איברי הטור? שאלות דומות עולות בהקשר לאינטגרל. בכדי לענות של שאלות אלה נזדקק לטענת העזר הטופולוגית הבאה.

טענה 6.27: תהי z_0 נקודה נתונה במישור המרוכב, ויהי $R>0$ ממשי חיובי. אם S תת־קבוצה סגורה של העיגול הפתוח $\mathbb{D}(z_0,R)$, אזי קיים ממשי חיובי $r<R$ כך ש־$S\subseteq\mathbb{D}(z_0,r)$.

הוכחה: נניח בשלילה שלא קיים r כזה. אזי עבור כל מספר טבעי n, קיים $z_n\in S$ המקיים $R-\frac{1}{n}\leq|z_n-z_0|<R$. הסדרה $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא קבוצה סגורה וחסומה, ולכן על פי משפט בולצאנו-ווייארשטראס 2.18, יש לה תת־סדרה מתכנסת $\{z_{n_k}\}_{n=1}^{\infty}$ אשר הגבול שלה $w=\lim_{k\to\infty}z_{n_k}$ מקיים $|w-z_0|\geq R-\frac{1}{n_k}$ לכל k טבעי. זה כמובן אפשרי רק אם $|w-z_0|\geq R$. מאחר ו־S היא קבוצה סגורה, $w\in S\subseteq\mathbb{D}(z_0,R)$, ולכן $|w-z_0|<R$. קיבלנו סתירה לוגית, ולכן טענת המשפט חייבת להיות נכונה. ∎

מסקנה 6.28: יהי $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ טור חזקות בעל רדיוס התכנסות $R>0$. אזי הטור מתכנס בהחלט ובמידה שווה על כל תת-קבוצה סגורה $S\subseteq\mathbb{D}(z_0,R)$.

הוכחה: על פי הטענה הקודמת קיים $r<R$ כך ש־$S\subseteq\mathbb{D}(z_0,r)$. על פי משפט 6.24 הטור מתכנס בהחלט ובמידה שווה על $\overline{\mathbb{D}}(z_0,r)$, ולכן מתכנס בהחלט ובמידה שווה גם על S. ∎

משפט 6.29: (אינטגרציה של טור חזקות)
יהי $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ טור חזקות בעל רדיוס התכנסות R, ויהי $\sigma:[a,b]\to\mathbb{C}$ מסלול חלק למקוטעין בתוך העיגול $\mathbb{D}(z_0,R)$. אזי

$$\int_{\sigma}f(z)\,dz=\int_{\sigma}\left[\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n\right]dz=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{\sigma}a_n(z-z_0)^n dz$$

הוכחה: ללא הגבלת הכלליות נוכל להניח כי σ מסלול חלק. מאחר ו־σ הוא פונקציה רציפה בין הקטע הממשי $[a,b]$ ל־$\mathbb{D}(z_0,R)$, יוצא שהתמונה $\sigma([a,b])$ היא תת-קבוצה סגורה של $\mathbb{D}(z_0,R)$ (ראה משפט 3.13 בעמוד 109). על פי טענה 6.27 קיים $r<R$ כך ש־$\sigma([a,b])\subseteq\mathbb{D}(z_0,r)$. על פי משפט 6.24 הטור מתכנס בהחלט ובמידה שווה על $\overline{\mathbb{D}}(z_0,r)$,

ולכן על פי משפט 6.29 ניתן להחליף בין פעולות האינטגרציה והסכימה. ∎

משפט 6.30: יהי $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ טור חזקות בעל רדיוס התכנסות R, המתכנס לפונקציית הסכום $f(z)$. אזי f היא פונקציה אנליטית בעיגול הפתוח $\mathbb{D}(z_0,R)$.

הוכחה: על פי משפט 6.24 הטור מתכנס בהחלט ובמידה שווה בכל עיגול $\mathbb{D}(z_0,r)$, $r<R$. לכן ממשפט 6.21 נובע ש־$f(z)$ אנליטית בכל עיגול $\mathbb{D}(z_0,r)$, $r<R$. לכן $f(z)$ אנליטית בעיגול הפתוח $\mathbb{D}(z_0,R)$. ∎

משפט 6.31: (גזירה של טור חזקות)

יהי $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ טור חזקות בעל רדיוס התכנסות R. אזי לכל נקודה $|z|<R$

$$f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty}na_n(z-z_0)^{n-1}$$

ובנוסף: לשני הטורים $\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$, $\sum_{n=0}^{\infty}na_nz^{n-1}$, אותו רדיוס התכנסות R.

הוכחה: קל לבדוק באמצעות נוסחת האדאמר (6.8) שרדיוס ההתכנסות של טור הנגזרת גם הוא R

$$\frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|na_n|}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\cdot\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}=\frac{1}{1\cdot\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}=R$$

לכן הטור $\sum_{n=1}^{\infty}na_n(z-z_0)^{n-1}$ מתכנס בהחלט עבור $|z-z_0|<R$ נסמן

$$g(w)=\sum_{n=1}^{\infty}na_n(w-z_0)^{n-1}$$

ונוכיח כי $f'(z)=g(z)$.

תהי z נקודה נתונה בתוך תחום ההתכנסות $|z-z_0|<R$. נשתמש במסלול

$$\sigma(t)=z_0+t(z-z_0),\quad 0\le t\le 1$$

(שהוא הקטע הישר שמחבר את z_0 עם z). ברור כי $\sigma'(t) = z - z_0$. על פי משפט 6.29

$$\begin{aligned}\int_{z_0}^{z} g(w)\,dw &= \int_{z_0}^{z}\left[\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (w-z_0)^{n-1}\right] dw = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{z_0}^{z} n(w-z_0)^{n-1} dw \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^1 n(t(z-z_0))^{n-1}\cdot(z-z_0)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \int_0^1 n t^{n-1} dt \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-z_0)^{n-1}\cdot t^n\Big|_0^1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-z_0)^{n-1} = f(z) - a_0\end{aligned}$$

על פי מסקנה 5.13 (עמוד 197) הפונקציה $\int_{z_0}^{z} g(w)$ היא פונקציה קדומה של $g(z)$. לכן הטור $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}$ הוא פונקציה קדומה של הטור $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$. ∎

דוגמה 10: חשב את סכום הטורים $\sum_{n=0}^{\infty} nz^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 z^n$

פתרון: נשתמש בנוסחת הסכום של הטור ההנדסי

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

נגזור את שני האגפים ונקבל

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} \tag{6.10}$$

נכפול את שני האגפים ב־z ונקבל

$$\sum_{n=0}^{\infty} nz^n = \frac{z}{(1-z)^2}$$

אם נגזור את (6.10) פעם נוספת נקבל

$$\frac{2}{(1-z)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) z^{n-2}$$

לכן

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} n^2 z^n &= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)z^n + \sum_{n=0}^{\infty} nz^n \\ &= z^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) z^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} nz^n \\ &= z^2 \cdot \tfrac{2}{(1-z)^3} + \tfrac{z}{(1-z)^2} = \tfrac{2z^2}{(1-z)^3} + \tfrac{z}{(1-z)^2} \\ &= \tfrac{z^2+z}{(1-z)^3}\end{aligned}$$

המשפט האחרון מאפשר לנו לגזור טור חזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ כמה פעמים שנרצה

$$\begin{aligned}
f(z) &= a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + a_3(z-z_0)^3 + a_4(z-z_0)^4 + \cdots \\
f'(z) &= a_1 + 2a_2(z-z_0) + 3a_3(z-z_0)^2 + 4a_4(z-z0)^3 + \cdots + na_n(z-z_0)^{n-1} + \cdots \\
f''(z) &= 2a_2 + 3\cdot 2a_3(z-z_0) + 4\cdot 3a_4(z-z0)^2 + \cdots + n(n-1)a_n(z-z_0)^{n-2} + \cdots \\
f'''(z) &= 3\cdot 2a_3 + 4\cdot 3\cdot 2a_4(z-z0) + \cdots + n(n-1)(n-2)a_n(z-z_0)^{n-3} + \cdots
\end{aligned}$$

כאשר בכל הטורים האלה, רדיוס ההתכנסות נשאר זהה לטור המקורי.

בנקודה z_0 (מרכז הטור) מתקבלים השוויונים הבאים:

$$\begin{aligned}
f(z_0) &= a_0 \\
f'(z_0) &= a_1 \\
f''(z_0) &= 2a_2 \\
f'''(z_0) &= 3\cdot 2a_3 \\
\vdots &= \quad \vdots \\
f^{(k)}(z_0) &= k!a_k
\end{aligned}$$

המסקנה מהחישוב האחרון היא שניתן לבטא את מקדמי הטור באמצעות הנגזרות של $f^{(k)}(z)$ בנקודה z_0.

$$a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$$

משפט 6.32: (נגזרות גבוהות של טור חזקות)

יהי $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ טור חזקות בעל רדיוס התכנסות R, $R > 0$. אזי לסכום $f(z)$ יש נגזרת מכל סדר בתחום $|z| < R$. את הנגזרת מסדר k של $f(z)$ ניתן לקבל על ידי גזירת הטור איבר איבר k פעמים. בנוסף לכך, קיים הקשר הבא בין הנגזרת מסדר k והמקדם a_k של הטור

$$a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$$

6.5 פיתוח פונקציה לטור חזקות (Taylor)

משפט 6.33: (יחידות טור חזקות)

אם שני טורי חזקות

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n$$

מקיימים $f(z)=g(z)$ עבור כל z בעיגול פתוח $|z_0 - r| < r$, עבור $r > 0$, אזי לכל n טבעי, $a_n = b_n$.

הוכחה: על פי הנתון $r > 0$ אנו מסיקים כי רדיוס ההתכנסות של שני הטורים חיובי, ולכן על פי המשפט הקודם לכל k טבעי

$$a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$$

$$b_k = \frac{g^{(k)}(z_0)}{k!}$$

אבל לכל k, $f^{(k)}(z_0) = g^{(k)}(z_0)$ וסיימנו. ∎

המשמעות של המשפט הקודם היא שאם ניתן בכלל להציג פונקציה $f(z)$ באמצעות טור חזקות סביב נקודה z_0, אז ניתן לעשות זאת בדרך אחת בלבד!

השאלה שעניינה מתימטיקאים כמו טיילור ומקלורן היתה שבהינתן פונקציה, מהם התנאים שתחתיהם קיים טור חזקות עבור הפונקציה, ומה תחום ההתכנסות שלו. טיילור ומקלורן עסקו בפונקציות ממשיות, אך עבודתם חלה ברובה גם על פונקציות מרוכבות.

הגדרה 6.10: תהי $f(z)$ פונקציה מוגדרת סביב נקודה z_0. כלומר קיים $r > 0$ (כולל האפשרות ש־$r = \infty$), כך שהפונקציה $f(z)$ מוגדרת בסביבה $\mathbb{D}(z_0, r)$. נאמר כי $f(z)$ ניתנת לפיתוח לטור חזקות בעיגול $\mathbb{D}(z_0, r)$, אם קיים טור חזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ כך ש־

$$\forall z \in \mathbb{D}(z_0, r): \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

בניגוד למקרה הממשי שבו ייתכן שפונקציה תהיה גזירה אינסוף פעמים בתחום פתוח אך אין לה טור טיילור, במקרה המרוכב לכל פונקציה אנליטית יש טור טיילור בתוך עיגול פתוח סביב כל נקודה שבה היא אנליטית.

משפט 6.34: (נוסחת טיילור) תהי $f(z)$ פונקציה אנליטית בעיגול הפתוח $\mathbb{D}(z_0,r)$ סביב הנקודה z_0. אזי לכל z בעיגול



$$f(z)=f(z_0)+\frac{f'(z_0)}{1!}(z-z_0)+\frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n+\cdots$$

כלומר ניתן לפתח את $f(z)$ לטור חזקות שמרכזו z_0 ומקדמיו הם $a_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$

$$\boxed{f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n} \tag{6.11}$$

הטור (6.11) נקרא **הטור טיילור של f סביב הנקודה z_0**! בחלק גדול של הבעיות, בחירת הנקודה הנכונה לפיתוח הטור היא המפתח לפתרון הבעייה.

כלומר, לאותה פונקציה יש טורי טיילור שונים בהתאם לנקודה z_0 שבה בוחרים לפתח את הטור.

הוכחה: הוכחת משפט טיילור מתבססת על נוסחת האינטגרל של קושי. נבחר נקודה $z_1\in\mathbb{D}(z_0,r)$, ויהי $r_1=|z_1-z_0|$. בכדי להפעיל את נוסחת קושי על הנקודה z_1, נבחר רדיוס ביניים $r_1<r_2<r$, תהי $\sigma(t)=z_0+r_2e^{it}$, $0\le t\le 2\pi$, פרמטריזציה של המעגל $|z-z_0|=r_2$. על סמך נוסחת האינטגרל של קושי (משפט 5.19 בעמוד 204)

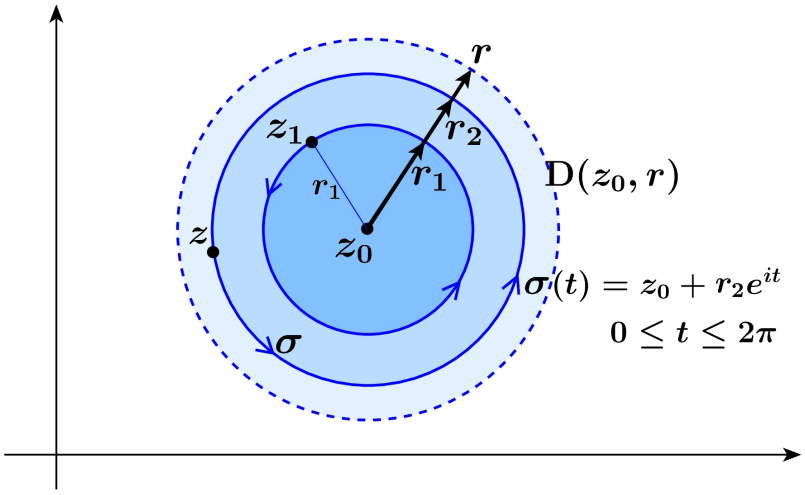
$$f(z_1)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\sigma}\frac{f(z)}{z-z_1}\,dz \tag{6.12}$$

ראה שרטוט 6.6. נשתמש בטכניקה שפגשנו בדוגמא 9 בכדי לבטא את השבר $\frac{1}{z-z_1}$ כסכום של טור הנדסי

$$\frac{1}{z-z_1}=\frac{1}{(z-z_0)-(z_1-z_0)}=\frac{1}{z-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{z_1-z_0}{z-z_0}}=\frac{1}{z-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z_1-z_0}{z-z_0}\right)^n$$

בשלב האחרון השתמשנו בנוסחת הטור ההנדסי $\frac{1}{1-q}=\sum_{n=0}^{\infty}q^n$, כאשר

$$q=\frac{z_1-z_0}{z-z_0}$$



איור 6.6: שימוש בנוסחת האינטגרל של קושי להוכחת הנוסחה של טיילור סביב הנקודה z_0

יש לשים לב לכך ש־

$$|q| = \left|\frac{z_1 - z_0}{z - z_0}\right| = \frac{|z_1 - z_0|}{|z - z_0|} = \frac{r_1}{r_2} < 1$$

ולכן הטור ההנדסי $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z_1-z_0}{z-z_0}\right)^n$ מתכנס בהחלט ובמידה שווה על המעגל $|z - z_0| = r_2$. עכשיו נבטא את האינטגרנד שבאגף ימין של (6.12) כטור

$$\frac{f(z)}{z - z_1} = \frac{f(z)}{z - z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z_1 - z_0}{z - z_0}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}(z_1 - z_0)^n$$

הפונקציה $|f(z)|$ רציפה מעל המסלול הסגור σ, ולכן יש לה מקסימום M. נבדוק התכנסות של הטור הנ"ל

$$\left|\frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}(z_1 - z_0)^n\right| = \left|\frac{f(z)}{z - z_0}\right| \cdot \left|\frac{(z - z_0)^n}{(z_1 - z_0)^n}\right| \le \frac{M}{r_2} \cdot |q|^n$$

הטור ההנדסי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{M}{r_2} \cdot |q|^n$ מתכנס כי $|q| < 1$, ולכן על פי מבחן-M של ווייארשטראס (משפט 6.20), גם הטור שלנו מתכנס. על פי משפט 6.21 נוכל לבצע אינטגרציה איבר איבר מעל המסלול σ

$$\begin{aligned} f(z_1) &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{\sigma}\frac{f(z)}{z - z_1}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\sigma}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}(z_1 - z_0)^n\,dz \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_{\sigma}\frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\,dz\right](z_1 - z_0)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z_1 - z_0)^n \end{aligned}$$

בשלב האחרון השתמשנו בנוסחת הנגזרת של קושי (ראה נוסחה (5.21) בעמוד (5.21)). אם

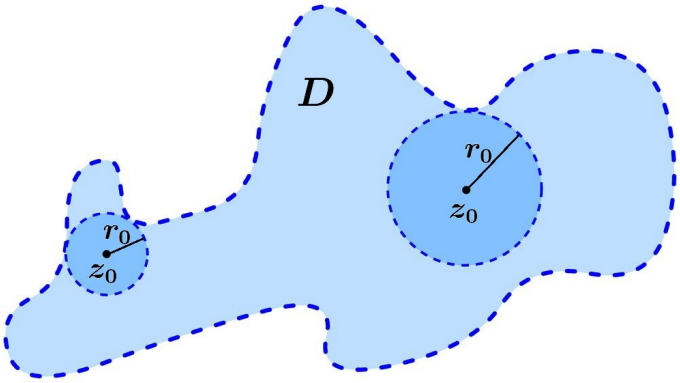
נחליף את המשתנה z_1 במשתנה z נקבל את נוסחת טיילור בצורתה התקנית. ■

אחת המסקנות שנוכל להסיק מהוכחת משפט טיילור היא שיטת חישוב של רדיוס ההתכנסות של טור טיילור.

מסקנה 6.35: (רדיוס התכנסות של טור טיילור) תהי $f(z)$ פונקציה אנליטית בתחום D, אז עבור כל נקודה $z_0 \in D$, רדיוס ההתכנסות של הטור טיילור של $f(z)$ סביב z_0 הוא הערך הכי גדול של r אשר עבורו $\mathbb{D}(z_0, r) \subseteq D$.

[1] זה ברור, כי העיגול הזה ממלא אחר כל התנאים של משפט טיילור.

[2] אם ניתן להרחיב את הפונקציה $f(z)$ לתחום גדול יותר שבו היא אנליטית, אז הרדיוס יגדל בהתאם.



איור 6.7: בהוכחת משפט טיילור, נוכל לבחור את r_0 להיות הרדיוס הכי גדול שעבורו העיגול $\mathbb{D}(z_0, r_0)$ כלול בתחום D

דוגמה 11: **טור מקלורן** הוא טור טיילור שמרכזו הוא $z_0 = 0$.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n \tag{6.13}$$

הנוסחה כמובן תקפה לפונקציות אנליטיות בסביבת $z_0 = 0$. בטבלה 6.8 מוצגים טורי מקלורן של כמה מהפונקציות היסודיות. הפיתוח שלהם זהה לגמרי למקרה הממשי ומומלץ לנסות כמה מהם לריענון הזיכרון. תרגיל: מה הוא תחום ההתכנסות של הטורים?

דוגמה 12: השימוש בנוסחה (6.13) לחישוב טור מקלורן אינו תמיד הדרך הקצרה לעשות זאת. במקרים רבים ניתן למצוא טור מקלורן אחד על ידי גזירה או אינטגרציה של טור מקלורן אחר. נחשב למשל את הטור מקלורן של הענף הראשי של פונקציית הלוגריתם $f(z) = \mathrm{Log}(1+z)$ על ידי אינטגרציה של הטור ההנדסי המתחלף

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$$

$$
\begin{array}{rcll}
e^z & = & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} & = 1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots \\
\sin z & = & \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} & = z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\cdots \\
\cos z & = & \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} & = 1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\cdots \\
\arctan z & = & \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1} & = z-\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}-\frac{z^7}{7}+\cdots \\
\operatorname{Log}(1+z) & = & \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n} & = z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}+\cdots \\
(1+z)^{\alpha} & = & \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n & = 1+\alpha z+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}z^2+\cdots, (\alpha \in \mathbb{C}) \\
\frac{1}{1-z} & = & \sum_{n=0}^{\infty} z^n & = 1+z+z^2+z^3+\cdots \\
\frac{1}{1+z} & = & \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n & = 1-z+z^2-z^3+\cdots
\end{array}
$$

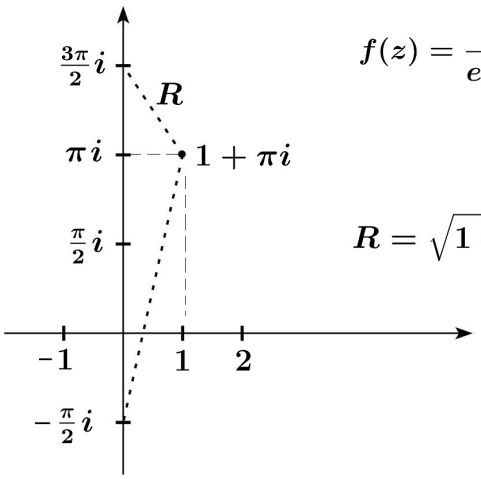
איור 6.8: טבלת טורי מקלורן של פונקציות יסודיות (מרוכבות)

על סמך משפט 6.29 ניתן לבצע אינטגרציה $\int_0^z$ איבר איבר

$$\operatorname{Log}(1+z)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{n+1}}{n+1}$$

רדיוס ההתכנסות של הטור הוא $R=1$ כי פונקציית הלוגריתם אינה קיימת על הציר הממשי השלילי ולכן העיגול הכי גדול סביב $z=0$ שכלול בתחום האנליטיות של $\operatorname{Log}(1+z)$ הוא עיגול היחידה.

דוגמה 13: מבלי לחשב את הטור טיילור של הפונקציה $f(z)=\frac{1}{e^z+i}$ ניתן לקבוע מהו רדיוס ההתכנסות שלו סביב הנקודה $z_0=1+\pi i$. תחום ההגדרה של f הוא כל המישור המרוכב פרט לשתי הנקודות שמאפסות את המכנה $e^z+i=0$. על ידי הצבת $z=x+iy$ בשוויון האחרון נקבל $e^xe^{yi}=-1$, ומכאן נקבל $x=0$, $y_1=-\frac{\pi i}{2}$, $y_2=\frac{3\pi i}{2}$. כפי שניתן לראות בשרטוט משמאל, רדיוס העיגול הכי גדול סביב $z_0=1+\pi i$ שאינו מכיל את אחת מהנקודות האלה הוא $R=\sqrt{1+\frac{\pi^2}{4}}$.



איור 6.9: רדיוס ההתכנסות של טור טיילור סביב הנקודה $z_0=1+\pi i$ נקבע על פי המרחק הקצר ביותר בין z_0 לנקודות בהן f אינה אנליטית

תרגיל 6.8: תהי $f(z)$ פונקציה אנליטית בתחום D הכולל בתוכו את עיגול היחידה הפתוח $|z|<1$. נתון כי לכל נקודה $|z|<1$, מתקיים $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}$. הוכח כי לפחות אחת מהנקודות

על המעגל $|z|=1$ אינה שייכת לתחום D.

הדרכה: אם $D \supseteq \overline{\mathbb{D}}(0,1)$ אז קיים $r>1$ כך ש־$D \supseteq \mathbb{D}(0,r)$. על סמך משפט יחידות הטור 6.33, ומשפט טיילור 6.34, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ חייב להיות הטור טיילור של f גם בעיגול $\mathbb{D}(0,r)$, אבל זה לא ייתכן כי רדיוס ההתכנסות של הטור הוא 1! פרטים נוספים על דוגמא זו ניתן למצוא בקישור הבא (כולל הוכחת קיום של המשכה אנליטית של הטור על המישור המחורץ $\mathbb{C}-[1,\infty)$).

singularity of analytic continuation of $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}$

- במידה ו־f שלמה (אנליטית על כל המישור המרוכב $D=\mathbb{C}$) אז $r=\infty$. כלומר טור טיילור סביב כל נקודה z_0 יתכנס על כל המישור המרוכב.
- יש לסייג ולציין שבמקרה והנקודה הסינגולרית היא סליקה אז היא אינה מהווה מחסום לרדיוס ההתכנסות של הטור טיילור.

תרגיל 6.9: הוכח: אם $f(z)$ פונקציה שלמה, ואם $|f(z)| \le K|z|^n$ עבור K ממשי ו־n טבעי, אז $f(z)$ חייבת להיות פולינום.

פתרון: לכל $r>0$ ממשי נגדיר

$$M(r)=\mathrm{Sup}\{|f(z)| \ : \ |z|=r\}$$

נשתמש באי-השוויון

$$|f^{(n+k)}(0)| \le \frac{M(r)\cdot(n+k)!}{r^{n+k}}$$

על פי הנתון $M(r) \le r^n$, ולכן

$$|f^{(n+k)}(0)| \le \frac{r^n\cdot(n+k)!}{r^{n+k}} = \frac{(n+k)!}{r^k} \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$$

יוצא שכל הנגזרות מסדר $n+1$ ומעלה של f בנקודה $z=0$ מתאפסות ולכן הטור טיילור של f יוצא פולינום ממעלה n לכל היותר.

תרגיל 6.10: הוכחה חלופית למשפט ליוביל: על סמך התרגיל הקודם הראה שאם $f(z)$ פונקציה שלמה וחסומה $|f(z)| \le M$ אז f קבועה.

הדרכה: שים לב שבפתרון התרגיל הקודם, מקדמי הטור טיילור שמתאפסים הם a_m, $m>n$, כאשר n היא מעלת הפולינום!

6.6 טורי לורן (Pierre Alphonse Laurent 1813-1854)



איור 6.12: Pierre Alphonse Laurent 1813-1854



איור 6.11: Brook Taylor 1685-1731



איור 6.10: Colin Maclaurin 1698-1746

טורי לורן קרויים על שמו של המתמטיקאי הצרפתי Pierre Alphonse Laurent, שחי בין השנים 1813-1854, אשר חקר אותם, והוכיח את המשפטים העיקריים לגביהם.

טורי לורן הם הכללה של טורי טיילור עבור פונקציות בעלות נקודות סינגולריות או "חור" בתחום ההגדרה. מדובר בטור חזקות דו-כיווני מהצורה $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, כאשר n עשוי להיות גם מספר שלילי (אבל שלם). נתחיל עם דוגמא פשוטה.

דוגמה 14: נתבונן בטור ההנדסי $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$, אשר תחום התכנסותו הוא העיגול $|z|<1$. אם נחליף את המשתנה z בביטוי $\frac{1}{z}$ נקבל טור בעל חזקות שליליות $\sum_{n=-\infty}^{0} z^n$, שמתכנס במישור המחורר $|z|>1$ לפונקציית הסכום $\frac{z}{z-1}$.
<u>הסבר:</u> אם $|z|>1$ נקודה במישור המחורר, אז $\left|\frac{1}{z}\right|<1$ היא נקודה בעיגול היחידה הפתוח, ולכן הטור ההנדסי $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n$ מתכנס לסכום

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{z}{z-1}$$

קיבלנו אם כן את הטור לורן של הפונקציה $f(z)=\frac{z}{z-1}$ שמתכנס מעל המישור המחורר $|z|>1$

$$\frac{z}{z-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}$$

במקרה זהו טור עם חזקות שליליות בלבד, אבל הוא המפתח להבנת מהו טור לורן, ולכן נתחיל בהגדרה פורמלית שלו.

הגדרה 6.11:

א. טור חזקות שליליות הוא טור מהצורה $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-z_0)^{-n}$ אשר ניתן לרשום גם בצורה

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}$. הנקודה z_0 נקראת **מרכז הטור**.

ב. טור חזקות רגיל $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ ייקרא גם **טור חזקות חיוביות**.

ג. טור לורן הוא צירוף של טור חזקות שליליות $\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ וטור חזקות חיוביות $\sum_{n=-\infty}^{-1}a_n(z-z_0)^n$. נאמר כי טור לורן **מתכנס** אם ורק אם שני הטורים מתכנסים.

טענה 6.36: תחום ההתכנסות של טור חזקות שליליות $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(z-z_0)^{-n}$ הוא **מישור מחורר** $|z-z_0|>\frac{1}{R}$ כאשר R הוא רדיוס התכנסות של טור חזקות חיוביות $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ עם אותם מקדמים.

* יש כמובן אפשרות התכנסות על חלק מהנקודות של המעגל $|z-z_0|=\frac{1}{R}$ שלא מוזכר בטענה.

הוכחה: נתחיל עם טור החזקות הרגיל $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$. נניח כי רדיוס ההתכנסות שלו הוא R. נציב במשתנה z את הביטוי $z_0+\frac{1}{z-z_0}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\left(\left(z_0+\frac{1}{z-z_0}\right)-z_0\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{(z-z_0)^n}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(z-z_0)^{-n}$$

קיבלנו טור חזקות שליליות אשר תחום ההתכנסות שלו

$$\left|\left(z_0+\frac{1}{z-z_0}\right)-z_0\right|<R\iff\left|\frac{1}{z-z_0}\right|<R\iff\boxed{|z-z_0|>\frac{1}{R}}$$

מישור מחורר (הקבוצה המשלימה של עיגול) שמרכזו בנקודה z_0, ורדיוס החור $\frac{1}{R}$. ∎

נבהיר כי אם $R=0$ אז טור החזקות השליליות מתבדר עבור כל $z\in\mathbb{C}$, ואם $R=\infty$ אז הוא מתכנס בתחום $|z-z_0|>0$ (מישור מנוקב).

הגדרה: טור חזקות שליליות הוא טור מהצורה $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(z-z_0)^{-n}$ אשר ניתן לרשום גם בצורה $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}$, או בצורה $\sum_{n=-1}^{-\infty}a_n(z-z_0)^n$. על פי הסעיף הקודם, תחום ההתכנסות של טור כזה הוא **מישור מחורר** $|z-z_0|>R$ (עם אפשרות התכנסות על חלק מהנקודות של המעגל $|z-z_0|=R$).

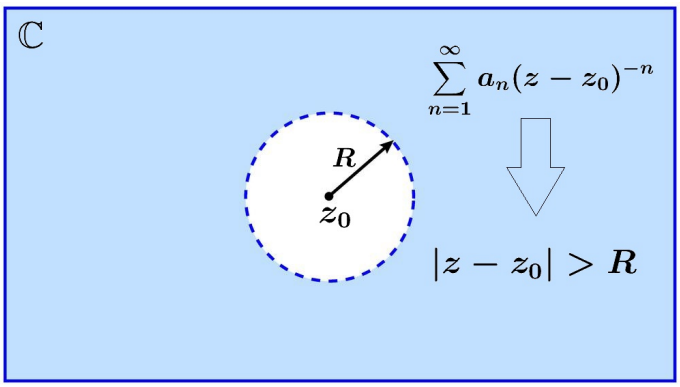
מסקנה 6.37: (רדיוס התכנסות של טור חזקות שליליות)
רדיוס ההתכנסות של טור החזקות השליליות $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(z-z_0)^{-n}$ נתון על ידי נוסחת האדאמר

$$R=\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$$

או נוסחת המנה (אם הגבול קיים)

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

כמובן מדובר במישור מחורר: $|z - z_0| > R$!



איור 6.13: תחום התכנסות של טור חזקות שליליות $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-z_0)^{-n}$

- טור לורן (Laurent) הוא שילוב של טור חזקות שליליות עם טור טיילור רגיל. ניתן להציג טור לורן במספר דרכים שונות. קל לבדוק שכל הצורות הבאות שקולות

(1) $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

(2) $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-z_0)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$$

(3) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(z-z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$$

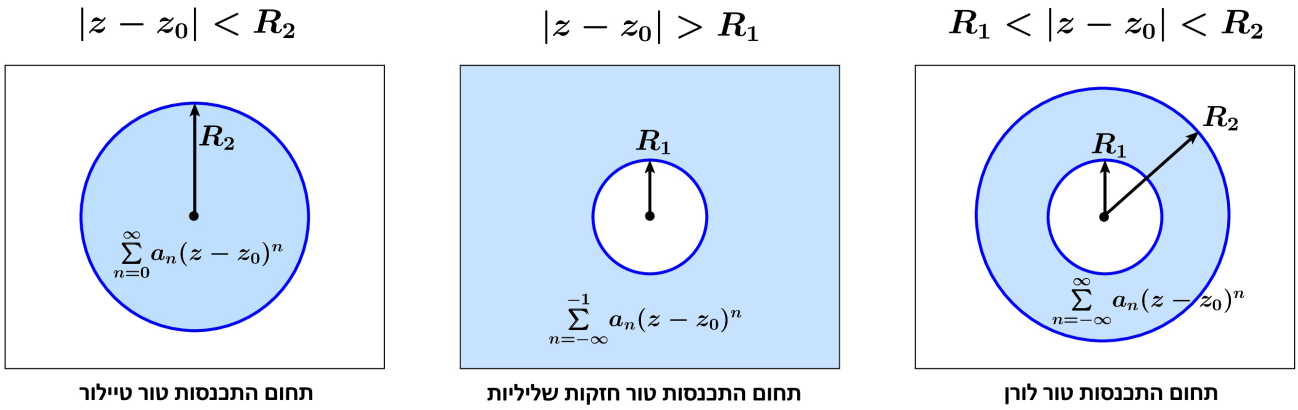
(4) $$\sum_{n=-1}^{-\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

בהצגה (4) המקדמים של החזקות השליליות הם a_{-1}, a_{-2}, וכן הלאה

- נאמר כי הטור לורן מתכנס בהחלט (או במידה שווה) בקבוצה S אם ורק אם שני הטורים מתכנסים בהחלט (או במידה שווה) בקבוצה S.
- בדומה לטור טיילור שסביבת התכנסות הטיפוסית שלו היא עיגול סביב נקודה z_0, סביבת ההתכנסות הטיפוסית של טור לורן היא טבעת

$$R_1 < |z - z_0| < R_2$$

שמתקבלת מחיתוך העיגול $|z-z_0|<R_2$ (תחום ההתכנסות של הטור טיילור) והמישור המחורר $|z-z_0|>R_1$ (תחום ההתכנסות של טור החזקות השליליות). ראה שרטוט 6.14 להמחשה ויזואלית.



איור 6.14: תחום התכנסות של טור חזקות חיוביות, טור חזקות שליליות, וטור לורן

זוג הרדיוסים R_1, R_2, מקיימים את האילוץ הבא

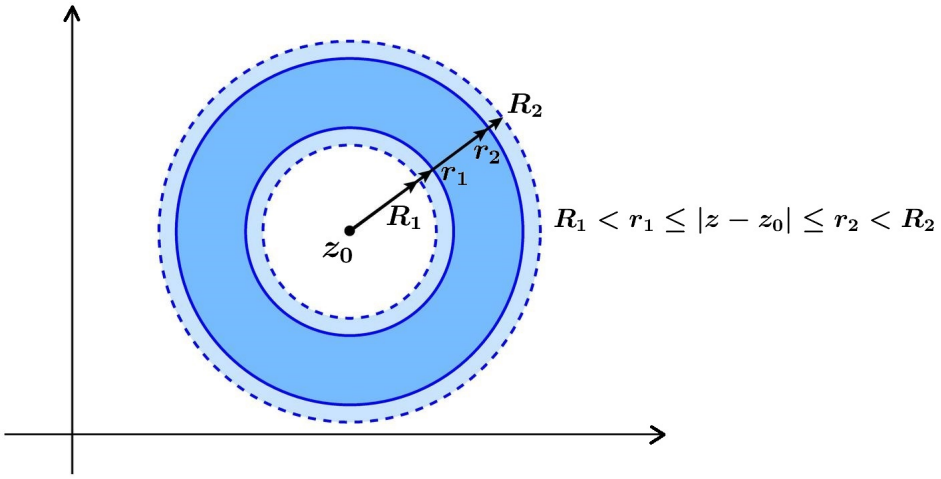
$$0 \le R_1 \le R_2 \le \infty$$

- לכל טור לורן $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ קיימים R_1, R_2 אשר עבורם הטור מתכנס בהחלט בטבעת $R_1<|z-z_0|<R_2$, ומתבדר עבור כל z המקיים $|z-z_0|<R_1$ או $|z-z_0|>R_2$.
- כאשר $R_2=\infty$ תחום ההתכנסות הוא מישור מחורר, וכאשר $R_1=0$ נקבל מישור או סביבה מעגלית נקובה (הנקודה $z=z_0$ תכלל בתחום רק כאשר כל המקדמים השליליים מתאפסים).
- הטור עשוי להתכנס גם על חלק מהנקודות שעל שפת הטבעת $|z-z_0|=R_1$ או $|z-z_0|=R_2$.
- **התכנסות במידה שווה:** בנוסף לכך (נראה בהמשך), לכל $R_1<r_1\le r_2<R_2$, הטור מתכנס במידה שווה בטבעת $r_1\le|z-z_0|\le r_2$ (ראה שרטוט 6.15).
- **דוגמה 15:** הפיתוח של $e^{1/z}$ לטור לורן מתקבל בקלות מטור טיילור של e^z. כזכור, הטור טיילור של e^z הוא

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n$$

ורדיוס ההתכנסות שלו הוא $R=\infty$. לכן

$$e^{\frac{1}{z}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\left(\frac{1}{z}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^{-n}$$



איור 6.15: טור לורן מתכנס במידה שווה על כל תת-טבעת סגורה $R_1 < r_1 \leq |z - z_0| \leq r_2 < R_2$

ועל פי טענה 6.36, תחום ההתכנסות של הטור לורן הוא $|z| > \frac{1}{R} = \frac{1}{\infty} = 0$. כלומר הטור לורן מתכנס במישור המנוקב $\mathbb{C} - \{0\}$.

דוגמה 16: יהי $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$. בתחום $|z| < |a|$

$$\frac{1}{z-a} = -\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{z}{a}\right)} = -\frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{a}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{1}{a^{n+1}} z^n$$

בתחום $|z| > |a|$

$$\frac{1}{z-a} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{a}{z}\right)} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} a^{n-1} z^{-n}$$

דוגמה 17: את הפונקציה $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ ניתן לפתח לטור לורן/טיילור סביב $z_0 = 0$ בכל אחד מהתחומים הבאים

(1)	$\|z\| < 1$	(Taylor)
(2)	$1 < \|z\| < 2$	(Laurent)
(3)	$2 < \|z\|$	(negative powers series)

ראשית נרשום את $f(z)$ כסכום של פונקציות פשוטות

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = -\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2}$$

על פי התוצאה הקודמת, נקבל טור טיילור עבור $f(z)$ בעיגול $|z| < 1$

$$f(z) = -\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{1}{2^{n+1}} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n$$

עבור הטבעת $1<|z|<2$ יש לחשב טור חזקות שליליות של $-\frac{1}{z-1}$ בתחום $|z|>1$, וטור טיילור של $\frac{1}{z-2}$ בעיגול $|z|<2$. שוב, על פי התוצאה הקודמת

$$-\frac{1}{z-1} = -\sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} \qquad (1<|z|)$$

$$\frac{1}{z-2} = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{1}{2^{n+1}}z^n \qquad (|z|<2)$$

לכן הטור לורן של $f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ בטבעת $1<|z|<2$ הוא

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)} = -\sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}}z^n$$

נשאיר לתלמיד את המשימה של חישוב טור חזקות שליליות בתחום $|z|>2$.

משפט 6.38: (לורן) תהי $f(z)$ פונקציה אנליטית בתוך טבעת $R_1<|z-z_0|<R_2$, כאשר $0\le R_1<R_2\le\infty$. אזי ניתן לפתח את f לטור לורן אחד ויחיד בטבעת הזו

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \tag{6.14}$$

כאשר את מקדמי הטור a_n ניתן לחשב על ידי

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_r}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz \tag{6.15}$$

כאשר $R_1<r<R_2$ ו־σ_r היא פרמטריזציה בכיוון חיובי של המעגל $|z-z_0|=r$.
הטור (6.14) מתכנס בהחלט ובמידה שווה בכל תת-טבעת

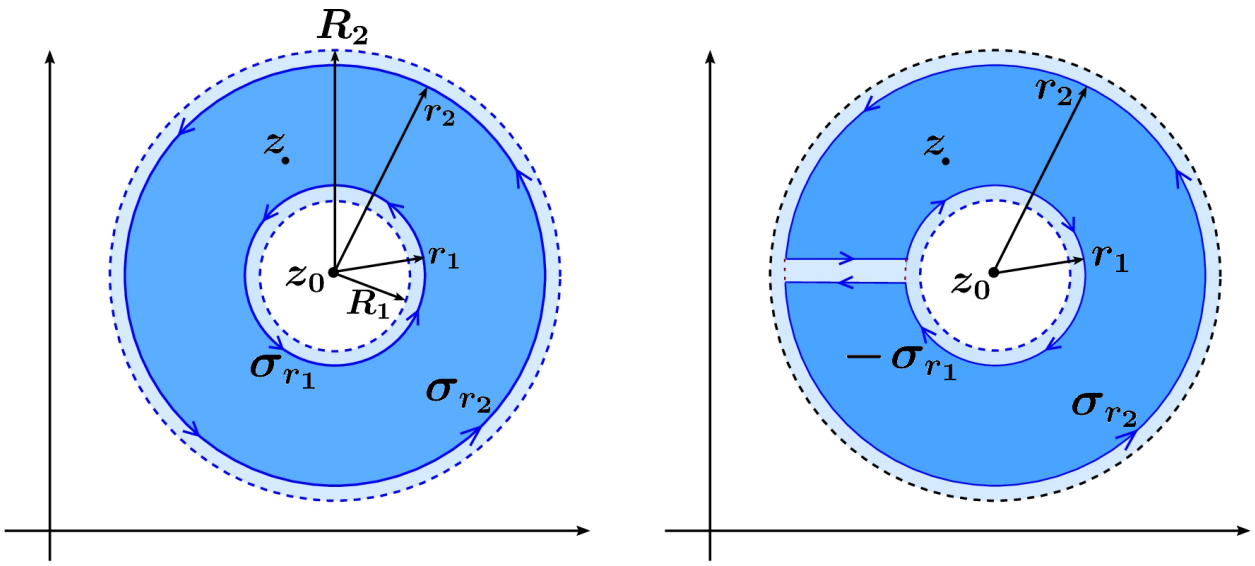
$$R_1<r_1\le|z-z_0|\le r_2<R_2$$

הוכחה: תהי z נקודה נתונה בתוך הטבעת $R_1<|z-z_0|<R_2$. לאורך כל ההוכחה נתייחס אל z כאל קבוע. נבחר רדיוסים r_1, r_2, r כך ש־

$$R_1<r_1<|z-z_0|<r_2<R_2$$

נסמן על ידי σ_{r_1}, σ_{r_2}, σ_r את המסלולים המעגליים המתאימות לרדיוסים אלה סביב הנקודה z_0.
על פי נוסחת האינטגרל של קושי (משפט 5.19)

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_{r_2}}\frac{f(w)}{w-z}dw-\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_{r_1}}\frac{f(w)}{w-z}dw \tag{6.16}$$



איור 6.16: תחום התכנסות מוחלט של טור לורן בתוך טבעת

מדובר כמובן בנוסחת אינטגרל כללית יותר עבור תחום עם חור, אשר קל להוכיח כתרגיל באמצעות שיטת הגשר (ראה את הוכחת מהמסקנות שבאות לאחר משפט קושי-גורסה 5.8).

נסמן

$$f_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_{r_1}}\frac{f(w)}{w-z}dw \quad ; \quad f_2(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_{r_2}}\frac{f(w)}{w-z}dw$$

נתחיל בייצוג הפונקציה f_2 כטור טיילור (במשתנה w)

$$\begin{aligned}\frac{1}{w-z} &= \frac{1}{w-z_0-(z-z_0)}=\frac{1}{w-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{w-z_0}}\\ &= \frac{1}{w-z_0}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n\end{aligned}$$

התוצאה נובעת מכך ש־ $w\in\sigma_{r_2}$, ולכן $|w-z_0|=r_2$, ומכך ש־ $|z-z_0|<r_2$. לכן קיבלנו טור הנדסי מתכנס כי המנה שלו $q=\left|\frac{z-z_0}{w-z_0}\right|<1$. לכן עבור כל $w\in\sigma_{r_2}$

$$\frac{f(w)}{w-z}=\frac{f(w)}{w-z_0}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n$$

הפונקציה $f(w)$ רציפה על הקבוצה הקומפקטית σ_{r_2} ולכן חסומה. לכן טור הפונקציות $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(w)}{w-z_0}\cdot\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n$ מתכנס במידה שווה על המעגל σ_{r_2}. לכן (על פי משפט 6.21) נוכל לבצע אינטגרציה איבר איבר בחישוב הבא

$$\begin{aligned}f_2(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_{r_2}}\frac{f(w)}{w-z}dw\\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_{r_2}}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(w)}{w-z_0}\cdot\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n\right]dw\end{aligned}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_{r_2}} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw \right] \cdot (z-z_0)^n$$

על פי מסקנה 5.23 (המסקנה לנוסחת הנגזרת של קושי)

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_{r_2}} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

וקיבלנו טור טיילור עבור $f_2(z)$

$$\begin{aligned} f_2(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \\ a_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_{r_2}} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw \end{aligned}$$

נעבור עכשיו לפונקציה $f_1(z)$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{w-z} &= \frac{1}{z-w} = \frac{1}{z-z_0-(w-z_0)} \\ &= \frac{1}{z-z_0} \cdot \frac{1}{1-\frac{w-z_0}{z-z_0}} \\ &= \frac{1}{z-z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{w-z_0}{z-z_0} \right)^n \end{aligned}$$

התוצאה נובעת מכך ש־ $w \in \sigma_{r_1}$, ולכן $|w-z_0| = r_1$, ומכך ש־ $|z-z_0| > r_1$. לכן קיבלנו טור הנדסי מתכנס כי המנה שלו $q = \left|\frac{w-z_0}{z-z_0}\right| < 1$. לכן עבור כל $w \in \sigma_{r_1}$

$$\frac{f(w)}{w-z} = \frac{f(w)}{z-z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{w-z_0}{z-z_0} \right)^n$$

הפונקציה $f(w)$ רציפה על הקבוצה הקומפקטית σ_{r_1} ולכן חסומה שם. לכן טור הפונקציות $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(w)}{z-z_0} \cdot \left(\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)^n$ מתכנס במידה שווה על המעגל σ_{r_1}. לכן (על פי משפט 6.21) נוכל לבצע אינטגרציה איבר איבר בחישוב הבא

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_{r_1}} \frac{f(w)}{w-z} dw \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_{r_1}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)}{z-z_0} \cdot \left(\frac{w-z_0}{z-z_0} \right)^n \right] dw \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_{r_1}} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{-n}} dw \right] \cdot (z-z_0)^{-(n+1)} \end{aligned}$$

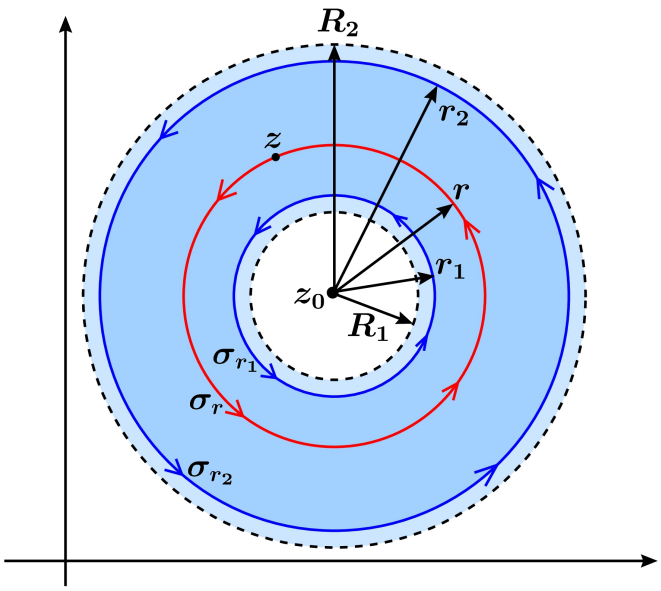
קיבלנו את המקדמים של טור לורן (Laurent) של הפונקציה $f_1(z)$

$$a_{-(n+1)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_{r_1}} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{-n}}dw$$

על סמך משוואה (6.16)

$$\begin{aligned} f(z) &= f_2(z) - f_1(z) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_{r_2}} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw\right]\cdot(z-z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_{r_1}} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{-n}}dw\right]\cdot(z-z_0)^{-(n+1)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_{r_2}} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw\right]\cdot(z-z_0)^n + \sum_{n=-1}^{-\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_{r_1}} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw\right]\cdot(z-z_0)^n \end{aligned}$$

יהי r רדיוס כלשהו בין r_1 ו־r_2: $r_1 < r < r_2$.



איור 6.17: מסלול ביניים σ_r בין σ_{r_1} ו־ σ_{r_2}

הפונקציה $\frac{f(w)}{(w-z_0)^n}$ היא פונקציה אנליטית בטבעת $R_1 < |z-z_0| < R_2$, ולכן על פי טענה 5.15

$$\begin{aligned} \int_{\sigma_{r_2}} \frac{f(w)}{(w-z_0)^n}dw &= \int_{\sigma_r} \frac{f(w)}{(w-z_0)^n}dw \\ \int_{\sigma_{r_2}} \frac{f(w)}{(w-z_0)^n}dw &= \int_{\sigma_r} \frac{f(w)}{(w-z_0)^n}dw \end{aligned}$$

לכן נוכל לרשום את הפיתוח של טור לורן של $f(z)$ בצורה הבאה

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_r} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw\right]\cdot(z-z_0)^n$$

אם נסמן

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_r}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw$$

נקבל את מסקנת המשפט. ∎

היחידות של הטור לורן נובעת מהעובדה שאם ל־ $f(z)$ שני טורי לורן

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n=\sum_{n=-\infty}^{\infty}b_n(z-z_0)^n$$

על אותה טבעת, אז המקדמים של שני הטורים חייבים לקיים גם את הנוסחה (6.15)

$$a_n=b_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_r}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz$$

לכן קיים פיתוח יחיד של $f(z)$ לטור לורן בטבעת נתונה.

דוגמה 18: פתח את הטור לורן של $f(z)=\frac{1}{(z-1)^2}$ סביב הנקודה $z_0=0$ בתחום $|z|>1$.

פתרון: ניתן לעשות זאת בשיטה אלגברית פשוטה על ידי שימוש בנוסחת הסכום של טור הנדסי

$$\begin{aligned}\frac{1}{(z-1)^2} &= \frac{d}{dz}\left[\frac{-1}{z-1}\right]=-\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}\right]\\ &= -\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{z}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}z^{-n}\right]=-\frac{d}{dz}\sum_{n=0}^{\infty}z^{-(n+1)}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^{-(n+2)}=\sum_{n=-2}^{-\infty}-(n+1)z^n\end{aligned}$$

ננסה לאמת את התוצאה הזו באמצעות הנוסחה (6.15) של משפט לורן 6.38

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)^2}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_nz^n$$

כאשר

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\sigma_r}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\sigma_r}\frac{1}{(w-1)^2\cdot w^{n+1}}dw$$

כאשר σ_r מעגל בעל רדיוס r (כלשהו) סביב הנקודה $z_0=0$. בהנחה שהרדיוס r שואף לאינסוף, ולכל מספר שלם $n\geq -1$

$$|a_n|\leq\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{(r-1)^2\cdot r^{n+1}}\right)\cdot 2\pi r=\frac{r}{(r-1)^2\cdot r^{n+1}}\xrightarrow[r\to\infty]{}0$$

לכן בהכרח $a_n = 0$ לכל $n \geq -1$ [2]

עבור $n < -1$, נסמן $m = -n - 1$. אזי $m \geq 1$ ונקבל

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\sigma_r} \frac{dw}{w^{n+1} \cdot (w-1)^2} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\sigma_r} \frac{w^m \, dw}{(w-1)^2} \\ &= \frac{d}{dz} [z^m] \Big|_{z=1} = mz^{m-1} \Big|_{z=1} = m \\ &= -n - 1 \end{aligned}$$

בשלב האחרון השתמשנו בנוסחת הנגזרת של קושי עבור הפונקציה z^m. לכן אנו מקבלים שוב כי

$$\frac{1}{(z-1)^2} = \sum_{n=-2}^{-\infty} (n+1) z^n$$

טענה 6.39: (גזירה איבר-איבר של טור לורן) יהי $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ טור לורן המתכנס בטבעת $R_1 < |z - z_0| < R_2$. אזי הנגזרת של $f(z)$ מתקבלת על ידי גזירת הטור איבר-איבר

$$f'(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$$

הוכחה: ראה תרגיל 27 בסוף הפרק.

תרגילים לפרק 6

הערה: רוב התרגילים מתמקדים בנושאי טורי חזקות (טורי טיילור וטורי מקלורן), מאחר והחוברת מכוונת למטרת נושאי התמרות אינטגרליות ועיבוד אותות בהנדסת חשמל (בספר ההמשך), ולכן לא מצאנו לנחוץ להוסיף עומס נוסף הסוטה ממטרה זו. במידה ויהיה לכך ביקוש, נוסיף בהמשך תרגילים נוספים בנושאי סדרות כלליות וטורים כלליים של פונקציות.

1. יהי $a > 0$ מספר ממשי. הוכח כי הטור $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-an^2 z}$ מתכנס לפונקציה אנליטית על חצי המישור העליון $\mathrm{Re}(z) > 0$.

2. מהו התחום המקסימלי שבו הטור $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 + n^2}$ מתכנס לפונקציה אנליטית?

3. מהו התחום המקסימלי שבו הטור $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nz}{n^2}$ מתכנס במידה שווה לפונקציה אנליטית?

[2] השתמשנו באי־השוויון $|w - 1| \geq |w| - 1 = r - 1$ הכלול באי־שוויון המשולש במשפט 1.3

4. יהי $a>0$ מספר ממשי. הוכח כי הטור $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-anz}}{(a+n)^2}$ מתכנס לפונקציה אנליטית על חצי המישור העליון $\mathrm{Re}\,(z)>0$.

5. הוכח כי הטור $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{z^{2+n}}{n^2}$ מתכנס במידה שווה לפונקציה אנליטית בכל עיגול $|z|\le r$, אך אינו מתכנס במידה שווה מעל $\mathbb{C}$.

6. יהי $a>0$ מספר ממשי. הוכח כי הטור $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(a+n)^z}$ מתכנס לפונקציה אנליטית בתחום $\mathrm{Re}\,(z)>1$.

7. מצא את הטור מקלורן של הפונקציות הבאות וקבע את תחום ההתכנסות שלו

א. $\frac{z+1}{z-1}$ **ב.** $\frac{1}{1+z^2}$ **ג.** $\frac{z^7}{8+z^3}$ **ד.** $\cos^2 z$

8. מצא את הטור טיילור של $f(z)=\sin z$ סביב הנקודה $z_0=\pi$ וחשב את רדיוס ההתכנסות שלו.

9. מצא את הטור טיילור של $f(z)=\frac{1}{z}$ סביב הנקודה $z_0=1+i$ וחשב את רדיוס ההתכנסות שלו.

10. חשב את הסכום של הטורים $\sum_{n=0}^{\infty}r^n\sin(n\theta)$, $\sum_{n=0}^{\infty}r^n\cos(n\theta)$, כאשר r מספר ממשי בקטע $(-1,1)$, θ זווית כלשהי.

הדרכה: העזר בנוסחת סכום טור הנדסי. תשובה סופית: $\frac{1-r\cos\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}$, $\frac{r\sin\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}$

11. תהי $f(z)$ פונקציה שלמה המקיימת $|f'(z)|\le|z|$ עבור כל $z\in\mathbb{C}$. הוכח כי

$$f(z)=a+bz^2,\quad |b|\le\frac{1}{2}$$

12. הוכח: אם פונקציה שלמה $f(z)$ מקיימת $|f(z)|\le M$ על המעגל $|z|=R$, אז כל מקדמי הטור טיילור שלה סביב $z=0$ מקיימים $|a_n|\le\frac{M}{R^n}$.

הדרכה: $a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=R}\frac{f(z)dz}{z^{n+1}}$.

13. על ידי שימוש בתוצאת תרגיל 12 הוכח כי אם הפולינום $P(z)$ מקיים $|P(z)|\le 1$ מעל מעגל היחידה אז כל המקדמים שלו חסומים על ידי 1 בערך מוחלט.

רמז: פולינום הוא טור טיילור בעל מספר סופי של מקדמים שונים מאפס ...

14. הוכח כי טור החזקות $\sum_{n=0}^{\infty}nz^n$ מתכנס בתוך עיגול היחידה $|z|<1$, אך מתבדר על כל נקודה על מעגל היחידה $|z|=1$.

15. הוכח כי טור החזקות $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}z^n$ מתכנס בכל נקודה $|z|\le 1$, פרט לנקודה $z=1$.

16. הוכח שעבור כל z בעיגול $|z-2|<2$:
$$\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)\left(\frac{z-2}{2}\right)^n=\frac{1}{z^2}$$

17. הוכח כי טור החזקות הבא

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}z^{2^k}=z+z^2+z^4+z^8+z^{16}+\cdots$$

מתכנס בעיגול היחידה $|z|<1$, אך מתבדר על כל נקודה $|z|=1$.

הדרכה: שים לב כי אם $r\to 1^-$ ממשי, אז $f(r)\to\infty$. בנוסף $f(z)=z+f(z^2)$. בדוק מה קורה בסביבת נקודות מהצורה $z=e^{2k\pi i/2^n}$, $k=1,2,\ldots,2^{n-1}$: מה קורה ל־$f(z)$ כאשר היא גולשת על הרדיוס המתאים לנקודה כזו לכיוונה?

18. הוכח כי אם פונקציה שלמה $f(z)$ מקיימת $|f(z)|\le|z|^2$ עבור כל $z\in\mathbb{C}$, אז $f(z)=cz$ עבור קבוע מרוכב c, ובנוסף $|c|\le 1$.

הדרכה: לכל $z_0\in\mathbb{C}$, ולכל $R>0$, $f'''(z_0)=\frac{3!}{2\pi i}\oint_{|z-z_0|=R}\frac{f(z)}{(z-z_0)^4}dz$

19. מצא את רדיוס ההתכנסות של טור החזקות $\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$, כאשר $a_n=\sin n$.

הדרכה: $|a_n|=|\sin(n)|\le 1$ ולכן על פי מבחן ההשוואה מול טור גאומטרי $R\ge 1$. הראה כי סדרת המספרים $\sin(n)$ צפופה בקטע $[0,1]$. לאחר נקודת השבירה אפשר להציץ בקישור הזה.

20. מצא פונקציה רציונלית אשר הטור טיילור שלה בעיגול היחידה הוא $\sum_{n=0}^{\infty}n^2z^n$.

הדרכה: התחל עם הטור ההנדסי $\sum_{n=0}^{\infty}z^n=\frac{1}{1-z}$, ושחק עם צירופים ליניאריים של הנגזרות שלו (ראשונה ושנייה).

21. תהי $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ פונקציה אנליטית בעיגול היחידה $|z|<1$. נתון כי $a_1\neq 0$, ו־$\sum_{n=2}^{\infty}n|a_n|<|a_1|$. הוכח כי f חד-חד-ערכית.

הצעה: נסה להעזר ברעיון דומה לזה שבתרגיל 33, פרק 5.

22. מצא את הטור מקלורן של הפונקציה

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\frac{cz}{n}$$

כאשר c קבוע נתון. בנוסף, מצא מהו רדיוס ההתכנסות של הטור מקלורן.

הדרכה: שים לב כי f מוגדרת כסכום של טור טריגונומטרי! זה לא טור חזקות! יש לוודא על ידי משפטים מתאימים שניתן לגזור אותו איבר איבר ולחשב את ערכי $f^{(n)}(0)$. יש להיעזר בזוגיות ואי-זוגיות של $\sin$, $\cos$.

23. מצא את הטור לורן סביב $z=-1$ של הפונקציה $f(z)=\frac{e^z}{(z+1)^5}$ בדרך הקצרה ככל האפשר.

רמז: $e^{z}=e^{-1}\cdot e^{z+1}$. תשובה סופית: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-1}}{n!}(z+1)^n$.

24. עשה שימוש בטור לורן בכדי לחשב את האינטגרל $\oint_{|z|=1} z^5 e^{\frac{2}{z}}$.

רמז: $e^{\frac{2}{z}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}z^{-n}$. תשובה סופית: $\frac{8\pi i}{45}$.

25. הוכח: לכל פולינום $P(z)$, הפונקציה $f(z)=P(z)e^{\frac{1}{z}}$ לא ניתנת להרחבה לפונקציה שלמה.

26. תהי $f(z)$ פונקציה אנליטית בטבעת $R_1<|z|<R_2$. הוכח כי קיימת פונקציה אנליטית $f_2(z)$ בעיגול $|z|<R_2$, ופונקציה אנליטית $f_1(z)$ במישור המחורר $|z|>R_1$, כך ש־$f(z)=f_1(z)+f_2(z)$ על הטבעת.

27. על סמך תרגיל 26, הוכח את טענה 6.39 אודות גזירה איבר-איבר של טור לורן.

28. מצא את המקדם של $(z+i)^{-3}$ בפיתוח לטור לורן של $f(z)=\frac{1}{z^2-1}$ סביב הנקודה $z_0=-i$ בתחום $|z+i|>\sqrt{2}$.

הדרכה: $\frac{1}{z^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z+1}\right)$. תשובה: $a_{-3}=0$.

29. חשב את האיבר השלישי ($n=-3$) בטור החזקות השליליות של $f(z)=(z-3)\sin\frac{1}{z+2}$ סביב הנקודה $z=-2$.

הדרכה: הצבה $w=z+2$ או $w=\frac{1}{z+2}$. תשובה: $\frac{5}{6}$.

30. מצא את המקדם של האיבר $(z-1)^{-2}$ בטור לורן של הפונקציה $f(z)=\frac{z^2-2z+3}{z-2}$ בתחום $|z-1|>1$.

הדרכה: $\frac{z^2-2z+3}{z-2}=z+\frac{3}{z-2}=z+\frac{3}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z}}$. תשובה: $a_{-2}=6$.

31. פתח את הפונקציה $f(z)=\frac{1}{(z+1)(z^2+1)}$ לטור לורן בכל אחד מהתחומים הבאים

א. $1<|z|<\sqrt{2}$ **ב.** $|z|>\sqrt{2}$ **ג.** $|z|<1$

32. פתח את הפונקציה $f(z)=\frac{3z-1}{z^2-2z-3}$ לטור לורן בכל אחד מהתחומים הבאים

א. $1<|z|<3$ **ב.** $|z|>3$ **ג.** $|z|<1$

33. פתח את הפונקציה $f(z)=\frac{z+4}{z^2(z^2+3z+2)}$ לטור לורן בכל אחד מהתחומים הבאים

א. $0<|z|<1$ **ב.** $1<|z|<2$ **ג.** $|z|>2$ **ד.** $0<|z+1|<1$

34. מצא את הרדיוס הכי גדול $R>0$ אשר עבורו הטור לורן של $f(z)=\frac{1}{e^{z^2}-1}$ מתכנס

בתחום $0 < |z| < R$.

תשובה: $R = \sqrt{2\pi}$

35. מצא את הטור לורן של $f(z) = z^2 \sin \frac{1}{z^2}$ בתחום $0 < |z| < \infty$.

תשובה: $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot \frac{1}{z^{4n}}$

36. הוכח כי הטור מקלורן של פונקציה שלמה $f(z)$ מתכנס ל־f במידה שווה על כל $\mathbb{C}$ אם ורק אם f היא פולינום.

37. יהיו $f(z)$, $g(z)$ שתי פונקציות שלמות המקיימות $|f(z)| \leq |g(z)|$ עבור כל $z \in \mathbb{C}$. אז קיים $\lambda \in \mathbb{C}$ כך ש־$f(z) = \lambda g(z)$ לכל $z \in \mathbb{C}$.

38. יהי D תחום סימטרי ביחס לראשית הצירים (ראה הגדרה 2.6 בעמוד 53). פונקציה $f(z)$ מעל התחום D נקראת **פונקציה זוגית** אם $f(-z) = f(z)$ לכל $z \in D$. f נקראת **פונקציה אי-זוגית** אם $f(-z) = -f(z)$ לכל $z \in D$. הוכח כי אם f זוגית אז כל המקדמים האי-זוגיים של הטור לורן של f סביב $z = 0$ מתאפסים. אם f אי-זוגית אז כל המקדמים הזוגיים של הטור לורן של f סביב $z = 0$ מתאפסים.

39. תהי $f(z)$ פונקציה אנליטית מעל תחום D, ותהי $z_0 \in D$ נקודה נתונה. הוכח: אם $f'(z_0) \neq 0$ אז

$$\frac{2\pi i}{f'(z_0)} = \oint_{|z-z_0|=\varepsilon} \frac{dz}{f(z) - f(z_0)}$$

כאשר $\varepsilon \leq |z - z_0|$ הוא עיגול סגור סביב z_0 הכלול בשלמותו בתוך התחום D.

הדרכה: העזר בטור טיילור של f סביב z_0: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$. על ידי תימרון פשוט קבל: $f(z) - f(z_0) = a_1(z - z_0)\left[1 + \frac{a_2}{a_1}(z - z_0) + \frac{a_3}{a_1}(z - z_0)^2 + \cdots\right]$. העזר בנוסחת האינטגרל של קושי (משפט 5.19). במידה וזה לא הולך, קיים פתרון יותר קצר באמצעות משפט השארית. ראה תרגיל 30 בפרק הבא.

40. סדרת פיבונצ'י $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מוגדרת ברקורסיה על ידי: $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, ולכל $n \geq 2$, $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$. יהי $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ הטור מקלורן שמקדמיו הם סדרת הפיבונצ'י.

א. הוכח כי זהו טור מקלורן של הפונקציה הרציונלית $\frac{z}{1-z-z^2}$.

ב. מהו רדיוס ההתכנסות של הטור?

ג. מצא נוסחה סגורה עבור a_n.

הדרכה: **א.** נסה לשחק עם צירופים ליניאריים של $zF(z)$, $z^2F(z)$.
ג. פרק לשברים חלקיים $\frac{z}{1-z-z^2} = \frac{A}{z-z_1} + \frac{B}{z-z_2}$, וקבל שני טורים גאומטריים. הנוסחה שאתה אמור לקבל היא: $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$ (נוסחת Binet).

41. תהי $f(z)$ פונקציה אנליטית בסביבת הנקודה $z = 0$, וננית כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} |f^{(n)}(0)|$ מתכנס.

הוכח כי קיימת המשכה אנליטית של f לפונקציה שלמה.

42. תן דוגמא לטור מספרים מרוכבים דו-כיווני $\sum_{n=-\infty}^{\infty} w_n$ כך שקיים הגבול $\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N} w_n$, אך לא קיים הסכום $\sum_{n=-\infty}^{\infty} w_n$.

הערה: מה זה אומר לגבי הגדרה מדויקת של סכום של טור דו-כיווני? כיצד היית מגדיר סכום כזה?

43. הוכח: פונקציה שלמה $f(z)$ המקבלת ערכים ממשיים בלבד על הציר הממשי, וערכים מדומים בלבד על הציר המדומה, היא פונקציה אי-זוגית (כלומר $f(-z)=-f(z)$ לכל $z\in\mathbb{C}$).

הדרכה: העזר בטור מקלורן $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. הצב בו $z=x$ ממשי, $z=iy$ מדומה, ועשה שימוש בנתון $f(x)=\overline{f(x)}$, $f(iy)=-\overline{f(iy)}$.

44. משפט ווייארשטראס טוען שכל פונקציה ממשית רציפה מעל הקטע $[0,1]$ היא גבול במידה שווה של סדרת פולינומים. האם ניתן להכליל משפט זה עבור פונקציה מרוכבת רציפה מעל העיגול הסגור $\overline{\mathbb{D}}(0,1)$?

רמז: אם $f(z)$ רציפה מעל $\overline{\mathbb{D}}(0,1)$ אז גם $\overline{f(z)}$ רציפה שם. בדוק אם לפולינומים יש תכונה דומה.

45. העזר בטורי חזקות בכדי להוכיח את כלל לופיטל המוכלל: יהיו $f(z)$, $g(z)$ פונקציות אנליטיות בנקודה z_0, אשר כל נגזרותיהן בנקודה z_0 מסדר קטן מ־n מתאפסות, אך $g^{(n)}(z_0)\neq 0$. אזי

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{f^{(n)}(z_0)}{g^{(n)}(z_0)}$$

46. תהי $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ פונקציה המוגדרת על ידי

$$f(z)=\int_0^1 t^2 e^{-zt}\,dt$$

א. חשב את הטור מקלורן של f. מהו רדיוס ההתכנסות שלו?

ב. חשב את $f'(0)$.

47. הוכח כי טור הפונקציות $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nz^n}{1-z^n}$ מתכנס במידה שווה על כל עיגול סגור $|z|\le r$, כאשר $0<r<1$.

48. תהי $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות אנליטיות מעל תחום פשוט קשר D, ויהי σ מסלול ז'ורדן הכלול בתוך D. נתון כי סדרת הפונקציות מתכנסת במידה שווה מעל המסלול σ. הוכח כי היא גם מתכנסת במידה שווה מעל הפנים של המסלול σ.

49. הוכח שלא קיימת סדרת פולינומים $\{P_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ המתכנסת במידה שווה לפונקציה $f(z)=1/z^2$ בטבעת $1<|z|<3$.

הצעה: זכור כי $\oint_{|z|=2} dz/z = 2\pi i$ בעוד שלכל n, $\oint_{|z|=2} P_n(z)\,dz = 0$, לכן לא ייתכן כי $P_n(z) \rightrightarrows 1/z$. אם $P_n(z) \rightrightarrows 1/z^2$ אז $zP_n(z) \rightrightarrows 1/z$ ...

50. **מספרי ברנולי** B_n מוגדרים על ידי מקדמי הטור מקלורן של הפונקציה

$$\frac{z}{e^z-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}z^n$$

הוכח את הנוסחה הבאה

$$\frac{B_0}{n!0!}+\frac{B_1}{(n-1)!1!}+\frac{B_2}{(n-2)!2!}+\cdots+\frac{B_{n-1}}{1!(n-1)!}=\begin{cases}1, & n=1\\ 0, & n>1\end{cases}$$

על ידי שימוש בנוסחה זו, חשב את המקדם ברנולי B_n, לכל n טבעי.

51. הוכח כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n$ מתכנס לפונקציה אנליטית מעל העיגול הפתוח $|z+i|<1$.

52. תהי $f(z)$ פונקציה אנליטית בטבעת $R_1<|z-z_0|<R_2$. נתון כי $|f(z)|\le M$ מעל הטבעת. הוכח כי כל מקדמי הטור לורן של f, a_n, $0\le n$, מקיימים $|a_n|\le \frac{M}{R_2^n}$, וכל המקדמים a_n, $n\le 0$ מקיימים $|a_n|\le MR_1^n$.

53. תהי $f(t)$ פונקציה ממשית ורציפה בקטע הסגור $[-1,2]$. נגדיר את הפונקציה

$$F(z)=\int_{-1}^{2} f(t)\sin(zt)\,dt$$

א. הוכח כי $F(z)$ היא פונקציה שלמה ומצא את הטור מקלורן שלה.

ב. הוכח כי $F'(z)=\int_{-1}^{2} t\,f(t)\cos(zt)\,dt$.

הדרכה: יש להיעזר בכלל לייבניץ. ראה נספח בסוף פרק 5.

54. יהיו $f(z)$, $g(z)$, שתי פונקציות שלמות. נגדיר פונקציה על שני משתנים $h:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}$

$$h(z_1,z_2)=\int_0^{2\pi} f(z_1e^{i\theta})g(z_2e^{-i\theta})\,d\theta$$

יהיו $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$, $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n$ הטורי מקלורן של f, g. חשב את הערך של $h(z_1,z_2)$, עבור z_1, z_2, נתונים.

55. יהי $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ טור חזקות שמתכנס בעיגול $|z|<R$. נתון כי ל־f יש המשכה אנליטית $g(z)$ בעיגול $\mathbb{D}(0,R+\varepsilon)$, $\varepsilon>0$, פרט לקוטב יחיד z_0 על העיגול $|z|=R$. הוכח כי $\lim_{n\to\infty}a_n/a_{n+1}=z_0$.

הדרכה: אחרי נקודת השבירה אפשר להציץ בפתרון הזה, אבל הוא נראה מסורבל מדי. חייב להיות משהו יותר סביר.

56. הוכח כי קיימת סדרת פולינומים $\{P_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ שמתכנסת ל־1 בחצי המישור העליון $\mathrm{Im}(z)>0$, מתכנסת ל־-1 בחצי המישור התחתון $\mathrm{Im}(z)<0$, ומתכנסת ל־0 על הציר הממשי $\mathrm{Im}(z)=0$.

57. הוכח כי קיימת סדרת פונקציות רציונליות $\{Q_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ המתכנסת לפונקציה $f(z)$, כך ש־$\mathrm{image}(f)=\mathbb{Z}$.

הדרכה: בנה סדרת פונקציות $P_n(z)$ רציונליות שמתכנסת לפונקציית "מדרגה". למשל, אם $\mathrm{Im}(z)>0$ אז $P_n(z)\to 1$. אחרת $P_n(z)\to 0$. קח כפולות והזזות של $P_n(z)$ בכדי לבנות את $Q_n(z)$.

קישור לפתרונות

פרק 7

שימושים

בפרק האחרון של הקורס נציג שימושים שונים של החומר שלמדנו בפרקים הקודמים לשם חישוב אינטגרלים ואיפיון נקודות מיוחדות של פונקציות אנליטיות.

7.1 שורשים ונקודות סינגולריות

- הבנה ושימוש נכון בפונקציה אנליטית מצריך יכולת זיהוי והבנה של נקודות המיוחדות של הפונקציה. הנקודות המיוחדות של פונקציה אליטית מתחלקות לשני סוגים עיקריים:
  1. **שורשים**
  2. **נקודות סינגולריות**
- כל אחד מהסוגים האלה מתחלק שוב לתתי-סוגים וכן הלאה. המיון המלא מוצג בדיאגרמת עץ שבשרטוט 7.2. אבל בכדי להבין את הדיאגרמה יש לנו עוד כברת דרך לעשות.
- שורשים הן נקודות שבהן הפונקציה מתאפסת. הדוגמא הכי מוכרת לנו היא המשפט היסודי של האלגברה שטוען כי לכל פולינום ממעלה n יש בדיוק n שורשים, אבל זה כמובן לא ניסוח מדויק מאחר ובספירת השורשים יש לקחת בחשבון גם את **הריבוי** של כל שורש.

הגדרה 7.1: נקודה z_0 נקראת **שורש של פונקציה** $f(z)$, אם $f(z_0)=0$. הנקודה z_0 נקראת **שורש בעל ריבוי** k (k מספר טבעי חיובי), אם קיימת פונקציה $g(z)$ כך ש־

$$f(z)=(z-z_0)^k g(z) \quad \text{and} \quad g(z_0)\neq 0$$

שורש בעל ריבוי 1 נקרא גם **שורש פשוט**.

דוגמה 1:

א. לפונקציה $f(z)=(z-i)^3$ יש שורש אחד $z=i$ אשר הריבוי שלו הוא 3.

ב. לפונקציה $f(z)=(z-i)^3(z-7)^2$ יש שורש אחד $z=i$ בעל ריבוי 3, ושורש שני $z=7$

בעל ריבוי 2. אם נרשום את f בצורה הבאה

$$f(z)=(z-i)(z-i)(z-i)(z-7)(z-7)$$

אז רואים כי הביטוי $z-i$ מופיע שלוש פעמים. לכן המונח "ריבוי 3" מציין שלכאורה השורש $z=i$ מופיע שלוש פעמים ברשימת השורשים.

ג. לפונקציה $f(z)=e^z$ אין שורשים!

ד. לפונקציית האפס $f(z)=0$ יש אינסוף שורשים: כל מספר מרוכב הוא שורש של f. אך לאף אחד מהשורשים הללו אין ריבוי!

טענה 7.1: תהי $f(z)$ פונקציה אנליטית בנקודה z_0. אזי z_0 היא שורש בעל ריבוי k אם ורק אם $f^{(j)}(z_0)=0$ לכל $j<k$, אך $f^{(k)}(z_0)\neq 0$.

הוכחה: **כיוון 1:** נניח כי z_0 שורש בעל ריבוי k. כלומר $f(z)=(z-z_0)^k g(z)$, $g(z_0)\neq 0$. על סמך משפט 6.34 יש לפונקציה $g(z)$ טור טיילור סביב הנקודה z_0

$$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$$

ולכן

$$f(z)=(z-z_0)^k g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^{n+k}=\sum_{n=k}^{\infty} b_{n-k}(z-z_0)^n$$

יהי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ הטור טיילור של f סביב הנקודה z_0. על סמך היחידות של טור טיילור (משפט 6.33) נקבל כי $a_j=0$ לכל $j<k$, $a_k=b_0$. מאחר ו־ $a_j=\frac{f^{(j)}(z_0)}{j!}$, נקבל כי $f^{(j)}(z_0)=0$. מאחר ו־ $g(z_0)=b_0\neq 0$, נקבל $f^{(k)}(z_0)\neq 0$.

כיוון 2: נניח כי $f^{(j)}(z_0)=0$ לכל $j<k$, אך $f^{(k)}(z_0)\neq 0$. לכן על פי משפט טיילור (6.34),

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n=\sum_{n=k}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n \\ &= (z-z_0)^k\cdot\sum_{n=k}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^{n-k} \end{aligned}$$

אם נרשום $g(z)=\sum_{n=k}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^{n-k}$ אז $g(z_0)=\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}\neq 0$ וקיבלנו את המבוקש. ∎

הערה: בטענה, k הוא מספר טבעי חיובי, והשתמשנו במוסכמה $f^{(0)}(z_0)=f(z_0)$.

מסקנה 7.2: נקודה z_0 היא שורש בעל ריבוי k של פונקציה אנליטית $f(z)$ אם ורק אם

כל k המקדמים הראשונים של הטור טיילור של f מתאפסים אך $a_k \neq 0$.

$$f(z) = a_k(z-z_0)^k + a_{k+1}(z-z_0)^{k+1} + a_{k+2}(z-z_0)^{k+2} + \cdots \qquad (a_k \neq 0)$$

הגדרה 7.2: נקודה z_0 נקראת **שורש מבודד** של פונקציה $f(z)$ אם קיימת סביבה של z_0 שבה היא השורש היחיד של f.

טענה 7.3: נקודה z_0 היא שורש לא-מבודד של f אם ורק אם קיימת סדרה אינסופית של שורשים $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך ש־$z_0 = \lim_{n\to\infty} z_n$.

הוכחה: אם z_0 שורש לא-מבודד, אז עבור כל n קיים שורש $z_n \neq z_0$ כך ש־$|z_n - z_0| < \frac{1}{n}$. ברור שסדרת השורשים $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל־z_0. הכיוון השני ברור מעצם ההגדרה. ∎

דוגמה 2:

א. הנקודות $z = i$ ו־$z = 7$ הם שורשים מבודדים של הפונקציה $f(z) = (z-i)^3(z-7)^2$.

ב. הנקודה $z = 0$ היא שורש לא-מבודד של הפונקציה

$$f(z) = \begin{cases} z^2 \sin\frac{2\pi}{z}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$$

כי $f(0) = 0$, ולכל n, הנקודה $z_n = \frac{1}{n}$ היא שורש של f. בטענה הבאה נווכח כי סיטואציה כזו אינה אפשרית אם f אנליטית. במקרה הנוכחי קל לבדוק ש־f רציפה על כל המישור אך אינה אנליטית בנקודה $z = 0$.

משפט 7.4: תהי $f(z)$ פונקציה אנליטית בתחום D. אזי ל־f יש שורש לא-מבודד ב־D אם ורק אם f מתאפסת בכל התחום D.

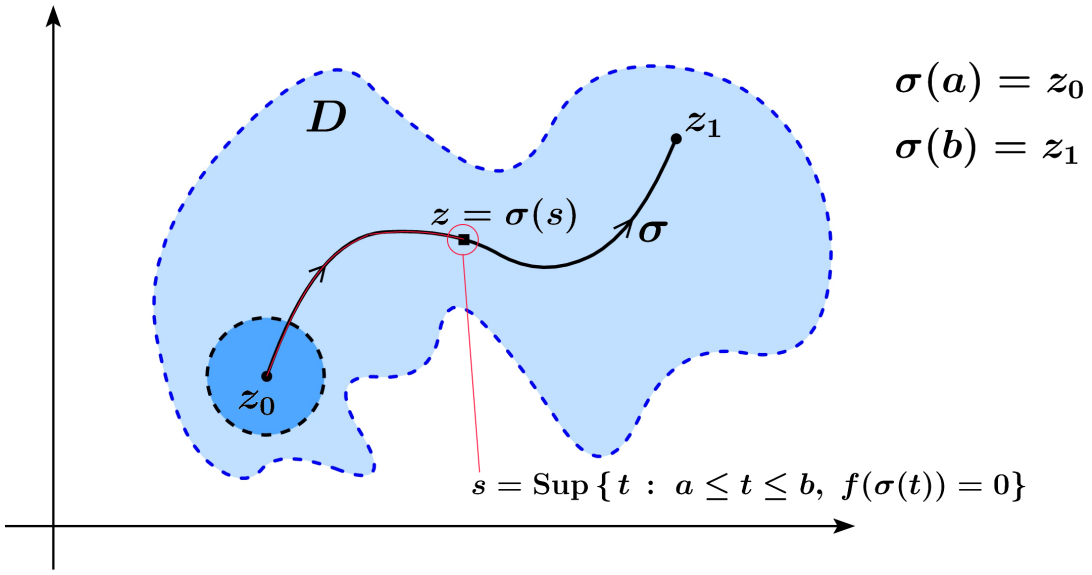
הוכחה: יהי z_0 שורש לא-מבודד של f בתחום D, ויהי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ הטור טיילור של f סביב הנקודה z_0. נוכיח כי כל מקדמי הטור מתאפסים. אחרת, יהי a_k המקדם הראשון שאינו מתאפס. נוכל לרשום $f(z) = (z-z_0)^k \sum_{n=k}^{\infty} a_n(z-z_0)^{n-k}$. נסמן

$$g(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n(z-z_0)^{n-k}$$

אזי $g(z_0) = a_k \neq 0$. מהרציפות של g נסיק כי קיימת סביבה של z_0 שבה $g(z) \neq 0$, אבל אז גם $f(z) = (z-z_0)^k g(z) \neq 0$ לכל z באותה סביבה, פרט לשורש z_0 כמובן. קיבלנו כי

z_0 הוא שורש מבודד, בסתירה לנתון. לכן כל מקדמי הטור טיילור חייבים להתאפס, ולכן קיימת סביבה של z_0 בה f מתאפסת.

נוכיח שלמעשה f מתאפסת על כל התחום D! נעזר בשרטוט 7.1. תהי z_1 נקודה כלשהי בתחום D. מהקשירות של D נובע שקיים מסלול חלק $\sigma:[a,b]\to D$, כך ש־$\sigma(a)=z_0$, $\sigma(b)=z_1$.



איור 7.1: D תחום קשיר ולכן קיים מסלול חלק σ בין הנקודה z_0 לנקודה כלשהי $z_1\in D$

נגדיר תת-קבוצה I של הקטע $[a,b]$

$$I=\{\,t:\ t\in[a,b],\ \forall s\le t: f(\sigma(s))=0\,\}$$

הקבוצה I אינה ריקה כי f מתאפסת בסביבת $z_0=\sigma(a)$, ולכן מתאפסת על קטע $[a,a+\delta]$ של המסלול (כפי שרואים בשרטוט 7.1), ולכן $[a,a+\delta]\subseteq I$. הקבוצה I חסומה מלמעלה על ידי b, ולכן יש לה סופרמום

$$s=\mathrm{Sup}\ I$$

ברור כי $z=\sigma(s)$ הוא שורש לא-מבודד של f, כי $f(z)=\lim_{t\to s^-}f(\sigma(t))=0$. נוכיח כי בהכרח $s=b$. נניח בשלילה כי $s<b$. על פי אותו טיעון שבראש ההוכחה קיימת סביבה של z שבה f מתאפסת זהותית. לכן קיים $\delta>0$ כך ש־$f(\sigma(t))=0$ לכל t בקטע $[s-\delta,s+\delta]$. קיבלנו כי $s+\delta\in I$ בסתירה לכך ש־s הוא הסופרמום של I. לכן $s=b$, ולכן $f(z_1)=f(\sigma(b))=0$. זה נכון לכל נקודה $z_1\in D$, ולכן $f\equiv 0$ זהותית אפס על כל התחום D. ∎

מסקנה 7.5: תהי $f(z)$ פונקציה אנליטית בתחום D ויהי σ מסלול בתוך D. אם f מתאפסת על σ אז f מתאפסת על כל התחום D.

הדרכה: נבחר נקודה z_0 על σ. אזי z_0 היא שורש לא-מבודד. על פי המשפט הקודם f מתאפסת על D.

משפט 7.6: ("משפט הזהות") יהיו $f(z)$, $g(z)$ פונקציות אנליטיות בתחום D, ותהי S קבוצה אינסופית של נקודות ב־D שיש לה נקודת הצטברות $z_0 \in D$ שאינה ב־S. אם לכל $z \in S$ מתקיים $f(z) = g(z)$ אז $f(z) = g(z)$ עבור כל $z \in D$.

הוכחה: עיין שוב בהגדרת נקודת הצטברות (הגדרה 2.22 בעמוד 75). מהנתונים נסיק כי קיימת סדרה אינסופית $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ המתכנסת לנקודה z_0. לכן z_0 היא שורש לא-מבודד של $f(z) - g(z)$, ולכן $f(z) - g(z) = 0$ לכל $z \in D$. ∎

תרגיל 7.1: תהי $f(z)$ פונקציה אנליטית בעיגול $|z| < 2$. ידוע שלכל מספר טבעי n,

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n}{2n+1}$$

חשב את $f(i)$.

פתרון: אם נסמן $z = \frac{1}{n}$ אז $n = \frac{1}{z}$ ונגדיר את הפונקציה

$$g(z) = \frac{\frac{1}{z}}{\frac{2}{z}+1} = \frac{1}{2+z}$$

על פי בניית g, ברור כי לכל n, $f(\frac{1}{n}) = g(\frac{1}{n})$, ולכן על פי המסקנה הקודמת $f(z) = g(z)$ עבור כל $|z| < 2$. לכן $f(i) = g(i) = \frac{1}{2+i} = \frac{2-i}{5}$.

נקודות סינגולריות

הגדרה 7.3: נקודה z_0 נקראת **נקודה סינגולרית מבודדת** של פונקציה f אם

א. f אנליטית בסביבה נקובה של z_0

ב. f אינה אנליטית או אינה מוגדרת על z_0.

דוגמה 3:

א. לפונקציה $f(z) = \frac{1}{(z-i)^3}$ יש נקודה סינגולרית מבודדת אחת $z = i$. הפונקציה אינה מוגדרת בנקודה $z = i$ ולא ניתן להגדיר אותה שם כך שתהיה אנליטית.

ב. לפונקציה $f(z) = \frac{1}{(z-i)^3(z-7)^2}$ יש שתי נקודות סינגולריות מבודדות: $z = i$, $z = 7$.

ג. הפונקציה $f(z) = e^z$ היא פונקציה שלמה ולכן אין לה שום נקודות סינגולריות.

בקורס הנוכחי נתמקד בנקודות סינגולריות מבודדות בלבד, אך נזכיר בקצרה עוד שני סוגים של נקודות סינגולריות:

א. נקודה סינגולרית לא-מבודדת היא נקודה שבה הפונקציה אינה אנליטית אך היא גבול של נקודות סינגולריות מבודדות. הדוגמא הקנונית לסוג הסינגולריות הזה היא הפונקציה

$$f(z)=\frac{1}{\sin\frac{2\pi}{z}},\quad z\neq 0$$

קל לבדוק כי לכל n טבעי, הנקודה $z_n=\frac{1}{n}$ היא נקודה סינגולרית מבודדת של f. הסדרה $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת לנקודה $z=0$, אך הפונקציה אינה אנליטית בנקודה $z=0$, ולכן $z=0$ היא נקודה סינגולרית לא-מבודדת של f.

ב. סוג נוסף של נקודה סינגולרית הוא **נקודה סינגולרית חריגה** שיש לה הגדרות שונות בספרים שונים, אשר לא נעסוק בה. למשל הנקודה $z=0$ היא נקודה סינגולרית חריגה של פונקציית הלוגריתם $\mathrm{Log}(z)$. הנקודה $z=0$ אינה נקודה סינגולרית מבודדת כי $\mathrm{Log}(z)$ אינה אנליטית על החריץ $(-\infty,0]$, ובנוסף $z=0$ אינה גם נקודה סינגולרית לא-מבודדת. כאמור, סוג זה של נקודות לא יטופל בקורס הנוכחי.

הגדרה 7.4: נקודה z_0 נקראת **נקודה סינגולרית סליקה** של פונקציה f, אם היא נקודה סינגולרית מבודדת של f וניתן להגדיר את $f(z_0)$ כך שהפונקציה f תהיה אנליטית בנקודה z_0.

המשמעות של נקודה סינגולרית סליקה היא שהגבול $w=\lim_{z\to z_0}f(z)$ קיים, ולאחר "התיקון" $f(z_0)=w$, הפונקציה f תהיה אנליטית בנקודה z_0.

דוגמה 4: הנקודה $z=0$ היא נקודה סינגולרית סליקה של הפונקציה $f(z)=\frac{\sin z}{z}$. הפונקציה f אינה מוגדרת בנקודה $z=0$, אבל אם נגדיר $f(0)=\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}=1$, אז f תהיה אנליטית בנקודה $z=0$, ותהפוך להיות פונקציה שלמה. ניתן להוכיח זאת באמצעות הטור טיילור של $\sin z$

$$\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\quad\Longrightarrow\quad\frac{\sin z}{z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n+1)!}$$

הטור טיילור של $\sin z$ מתחיל באיבר z, ולכן לאחר חילוקו ב־z הוא נותר טור טיילור המוגדר ומתכנס על כל המישור.

דוגמה 5: הנקודה $z=0$ היא נקודה סינגולרית מבודדת של $f(z)=\frac{1}{z}$ שאינה סליקה, כי לא קיים הגבול של $f(z)$ בנקודה $z=0$. לכן אין שום סיכוי לתקן אותה בכדי שתהיה אנליטית בנקודה $z=0$.

טענה 7.7: נקודה סינגולרית מבודדת של פונקציה $f(z)$ היא סליקה אם ורק אם הטור לורן של f סביב z_0 יוצא טור טיילור (כלומר, כל מקדמי החזקות השליליות מתאפסים).

הוכחה: מהנתון ש־z_0 היא נקודה סינגולרית של f נובע כי f מוגדרת בסביבה נקובה של z_0. על פי משפט לורן 6.38, יש לפונקציה f טור לורן $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ סביב הנקודה z_0. אם z_0 נקודה סינגולרית סליקה של f, אז אפשר להגדיר את $f(z_0)$ כך ש־f תהיה אנליטית בנקודה z_0, ולכן על פי משפט טיילור 6.34 יש לה טור טיילור בסביבת z_0, ולכן מיחידות הטור לורן נובע שכל מקדמי החזקות השליליות חייבות להתאפס.

הכיוון השני של הטענה ברור: אם מקדמי החזקות השליליות של הטור לורן מתאפסים, אז הטור לורן הופך להיות טור טיילור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ ולכן אם נגדיר $f(z_0)=a_0$, f תהפוך להיות אנליטית באופן אוטומטי. ∎

טור החזקות השליליות $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-z_0)^n$ נקרא לפעמים **החלק העיקרי** של הטור לורן $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, ולכן נוכל לנסח את הטענה האחרונה גם באופן הבא: נקודה סינגולרית מבודדת של פונקציה $f(z)$ היא סליקה אם ורק אם החלק העיקרי של הטור לורן של f סביב z_0 מתאפס.

הגדרה 7.5: נקודה סינגולרית מבודדת z_0 נקראת **קוטב מסדר** k (k מספר טבעי חיובי) של פונקציה f, אם z_0 היא נקודה סינגולרית סליקה של הפונקציה

$$g(z)=(z-z_0)^k f(z)$$

ובנוסף $g(z_0)=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^k f(z)\neq 0$. קוטב מסדר 1 נקרא גם **קוטב פשוט**.

דוגמה 6:

א. הנקודה $z=i$ היא קוטב מסדר 3 של הפונקציה $f(z)=\frac{1}{(z-i)^3}$. הפונקציה

$$g(z)=(z-i)^3 f(z)=1$$

אינה מתאפסת בנקודה $z=i$.

ב. לפונקציה $f(z)=\frac{1}{(z-i)^3(z-7)^2}$ יש שני קטבים: $z=i$ קוטב מסדר 3, $z=7$ קוטב מסדר 2.

טענה 7.8: תהי z_0 נקודה סינגולרית מבודדת של פונקציה $f(z)$. אזי z_0 היא קוטב מסדר k אם ורק אם הטור לורן של f סביב z_0 מכיל מספר סופי חיובי של חזקות שליליות.

הוכחה: אם z_0 קוטב מסדר k אז לפונקציה $g(z)=(z-z_0)^k f(z)$ יש טור טיילור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ (לאחר התיקון שלה בנקודה z_0), ובנוסף $a_0=g(z_0)\neq 0$. לכן

$$f(z)=\frac{g(z)}{(z-z_0)^k}=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^{n-k}=\sum_{n=-k}^{\infty} a_{n+k}(z-z_0)^n$$

טור החזקות השליליות הוא סופי $\sum_{n=-k}^{-1} a_{n+k}(z-z_0)^n$. נציין גם כי המקדם של החזקה השלילית הראשונה בטור $(z-z_0)^{-k}$ הוא $a_0\neq 0$.

הכיוון השני קל: אם הטור לורן של f סביב z_0 מכיל מספר סופי וחיובי של חזקות שליליות, אז יש לו את הצורה $\sum_{n=-k}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, k טבעי חיובי. נוכל להניח כי $a_{-k}\neq 0$. ברור אז כי $g(z)=(z-z_0)^k f(z)$ תקיים את הגדרת קוטב מסדר k. ∎

הגדרה 7.6: כל נקודה סינגולרית מבודדת שאינה קוטב ואינה סליקה נקראת **נקודה סינגולרית עיקרית**.

טענה 7.9: נקודה סינגולרית מבודדת z_0 של פונקציה $f(z)$ היא נקודה סינגולרית עיקרית אם ורק אם הטור לורן של f סביב z_0 מכיל מספר אינסופי של חזקות שליליות.

הוכחה: הטענה נובעת מייד מהטענה הקודמת. אם טור החזקות השליליות היה סופי, אז z_0 היא קוטב או נקודה סינגולרית סליקה. לכן בהכרח טור החזקות השליליות הוא אינסופי. ∎

דוגמה 7: אחת הדרכים הפשוטות לייצור דוגמאות של נקודות סינגולרית עיקריות היא להציב $\frac{1}{z-z_0}$ בנוסחה של פונקציה אנליטית. למשל $\sin z$ היא פונקציה שלמה. אבל לפונקציה $\sin\frac{1}{z}$ יש נקודה סינגולרית עיקרית $z=0$. רואים את זה מייד מהטור לורן של $\sin\frac{1}{z}$

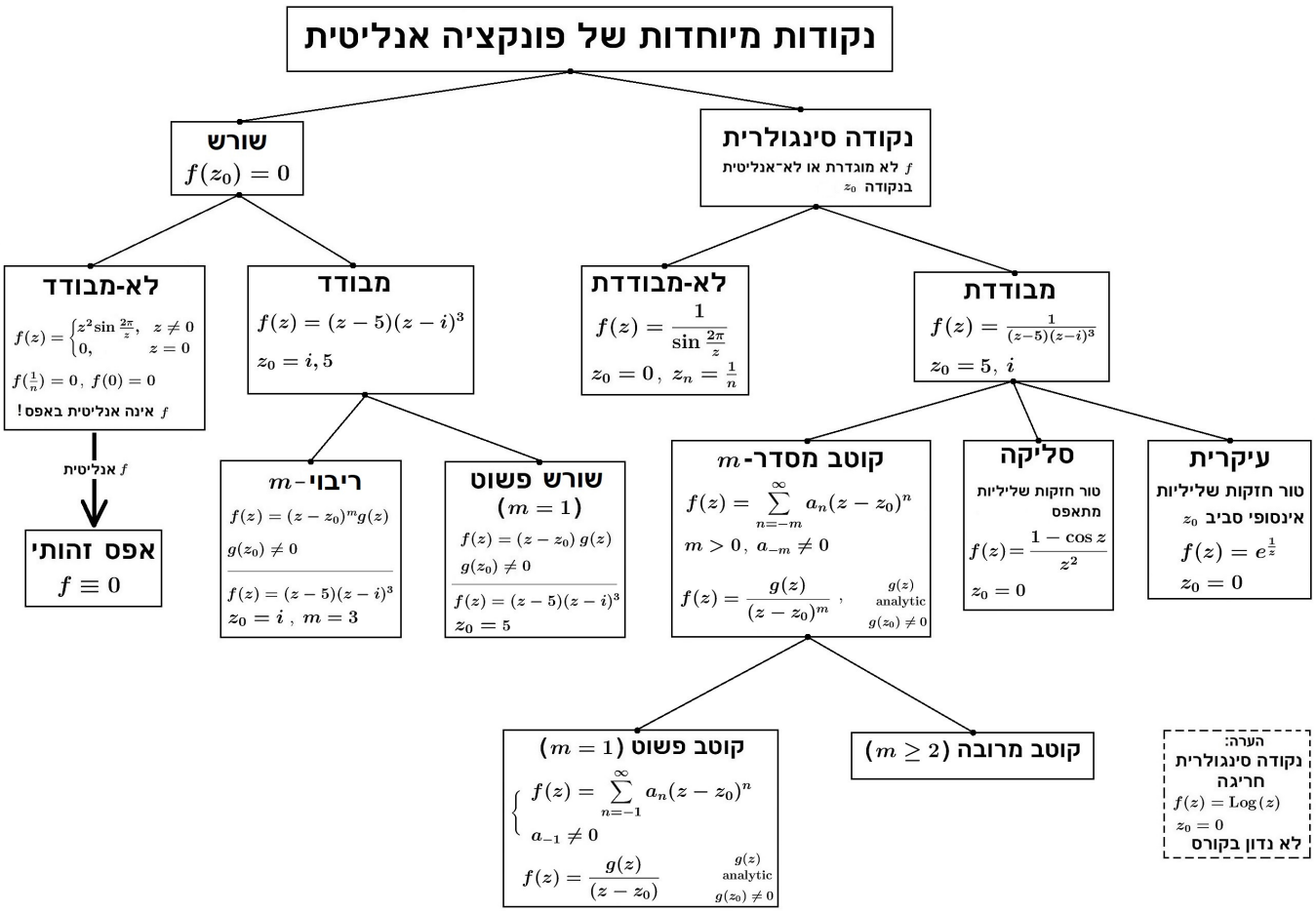
$$\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\quad\Longrightarrow\quad \sin\frac{1}{z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{-2n-1}}{(2n+1)!}$$

הטור לורן כולו עשוי מאינסוף חזקות שליליות, ולכן $z=0$ נקודה סינגולרית עיקרית.

טענה 7.10: (אנליטיות וחסימות גוררת סליקות)
תהי $f(z)$ פונקציה אנליטית בתחום D פרט לנקודה פנימית z_0 של D. אם $f(z)$ חסומה בסביבת z_0, אז z_0 נקודה סינגולרית סליקה של f.

הוכחה: על פי משפט לורן קיים טור לורן

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$



איור 7.2: דיאגרמת עץ של נקודות מיוחדות של פונקציה אנליטית

של f סביב z_0. נוכיח שלכל $n<0$, $a_n=0$. על פי משפט לורן, נוכל לבחור כל $r>0$ קטן כרצוננו ולקבל

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\sigma_r}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz$$

כאשר σ_r הוא המעגל $|z-z_0|=r$. יהי $n<0$. אזי $m=-n$ הוא מספר טבעי חיובי. על פי אי-שוויון המשולש האינטגרלי

$$\begin{aligned} |a_n| &= \frac{1}{2\pi}\left|\oint_{\sigma_r}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz\right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\oint_{\sigma_r}\frac{|f(z)|}{|z-z_0|^{n+1}}\,dz \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi r\cdot\frac{M}{r^{n+1}}=Mr^m \xrightarrow[r\to 0]{} 0 \end{aligned}$$

הסימן M הוא החסם של $f(z)$ בסביבת z_0. קיבלנו כי לכל $n<0$, $a_n=0$, ולכן z_0 היא נקודה סינגולרית סליקה של f. ∎

דוגמה 8: במשבצת של שורש לא-מבודד בדיארמת העץ אנו פוגשים את הדוגמא

$$f(z)=\begin{cases} z^2\sin\frac{2\pi}{z}, & z\neq 0 \\ 0, & z=0 \end{cases}$$

לפונקציה $f(z)$ יש סדרת שורשים מבודדים בנקודות $z_n=\frac{1}{n}$, ושורש לא-מבודד $z=0$. קל לבדוק שהפונקציה f רציפה בנקודה $z=0$ אך אינה גזירה בה. דוגמא זו זכורה לנו גם מקורס חדו"א 1 בו מוכיחים שלפונקציה הממשית $f(x)=x^2\sin\frac{2\pi}{x}$ יש נקודת אי-גזירות סליקה בנקודה $x=0$. הדוגמא נכשלת במקרה המרוכב מהסיבה שאם $f(z)$ היתה אנליטית בנקודה $z=0$ נקבל סתירה למשפט הזהות (משפט 7.6)! כי גם פונקציית האפס מתאפסת על הסדרה $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$.

טענה 7.11:

א. אם z_0 שורש מריבוי m של $f(z)$, ושורש מריבוי n של $g(z)$ אזי

- אם $m<n$ אז z_0 קוטב מסדר $n-m$ של $\frac{f(z)}{g(z)}$
- אם $m=n$ אז z_0 נקודה סינגולרית סליקה של $\frac{f(z)}{g(z)}$
- אם $m>n$ אז z_0 שורש מריבוי $n-m$ של $\frac{f(z)}{g(z)}$

ב. אם z_0 קוטב מסדר m של $f(z)$, וקוטב מסדר n של $g(z)$ אזי

- אם $m<n$ אז z_0 שורש מריבוי $n-m$ של $\frac{f(z)}{g(z)}$
- אם $m=n$ אז z_0 נקודה סינגולרית סליקה של $\frac{f(z)}{g(z)}$
- אם $m>n$ אז z_0 קוטב מסדר $n-m$ של $\frac{f(z)}{g(z)}$

הוכחה: א. מהגדרת השורש נובע כי

$$\begin{aligned} f(z) &= (z-z_0)^m f_1(z) \\ g(z) &= (z-z_0)^n g_1(z) \end{aligned}$$

כאשר f_1, g_1 פונקציות אנליטיות המקיימות $f_1(z_0)\neq 0$, $g_1(z_0)\neq 0$, ולכן לכל $z\neq z_0$

$$\frac{f(z)}{g(z)}=(z-z_0)^{m-n}\cdot\frac{f_1(z)}{g_1(z)}$$

אם $m<n$, אז מקבלים מייד כי z_0 קוטב מסדר $n-m$ של $\frac{f(z)}{g(z)}$. אם $m=n$ אז $\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{f_1(z)}{g_1(z)}$, ולכן z_0 נקודה סינגולרית סליקה. אם $m>n$, אז לביטוי $(z-z_0)^{m-n}$ חזקה חיובית ולכן z_0 שורש בעל ריבוי $n-m$ של $\frac{f(z)}{g(z)}$.

ב. מהגדרת קוטב נובע כי $f_1(z) = (z-z_0)^m f(z)$, $g_1(z) = (z-z_0)^n g(z)$ פונקציות אנליטיות (לאחר תיקון נקודה סינגולרית סליקה) המקיימות $f_1(z_0) \neq 0$, $g_1(z_0) \neq 0$, ולכן לכל $z \neq z_0$

$$\frac{f(z)}{g(z)} = (z-z_0)^{n-m}\frac{f_1(z)}{g_1(z)}$$

אם $m < n$, אז מקבלים מייד כי z_0 שורש בעל ריבוי $n-m$ של $\frac{f(z)}{g(z)}$. אם $m = n$ אז $\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f_1(z)}{g_1(z)}$, ולכן z_0 נקודה סינגולרית סליקה. אם $m > n$, אז לביטוי $(z-z_0)^{n-m}$ חזקה שלילית ולכן z_0 קוטב מסדר $m-n$ של $\frac{f(z)}{g(z)}$. ∎

טענה 7.12:

א. אם z_0 שורש מריבוי m של $f(z)$, וקוטב מסדר n של $g(z)$ אזי z_0 היא שורש בעל ריבוי $m+n$ של $\frac{f(z)}{g(z)}$.

ב. אם z_0 קוטב מסדר m של $f(z)$, ושורש מסדר n של $g(z)$ אזי z_0 היא קוטב מסדר $m+n$ של $\frac{f(z)}{g(z)}$.

תרגיל 7.2: אם z_0 שורש או קוטב מסדר m של פונקציה $f(z)$, ובנוסף z_0 היא שורש או קוטב מסדר n של פונקציה $g(z)$, מה תוכל לומר על סוג הנקודה z_0 ביחס למכפלה $f(z)g(z)$? נסח את כל האפשרויות והוכח את תשובתך.

7.2 משפט השארית (Residue Theorem)

משפט השארית הוא אחת התוצאות המשמעותיות והשימושיות בתורת הפונקציות המרוכבות. יש לו שימושים רבים, בין השאר לחישוב אינטגרלים מסוגים שונים, כולל אינטגרלים ממשיים שלא ניתן לפתור על ידי שיטות של חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי ממשי.

הגדרה 7.7: תהי $f(z)$ פונקציה אנליטית בסביבה נקובה של z_0. **השארית (Residue)** של f בנקודה z_0 מוגדרת להיות המקדם a_{-1} בטור לורן של f סביב z_0.
סימון: $\mathrm{Res}(f, z_0)$.

כלומר: השארית $\mathrm{Res}(f, z_0)$ היא המקדם של החזקה השלילית הראשונה בטור לורן של f סביב z_0.

אם הפונקציה אנליטית בנקודה z_0 אז השארית שלה בנקודה z_0 היא 0.

על סמך נוסחה (6.15) שבמשפט לורן 6.38, **נוסחת השארית** של פונקציה $f(z)$ בנקודה z_0

$$\mathbf{Res}(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma} f(z)\,dz \tag{7.1}$$

כאשר σ הוא מסלול ז'ורדן חלק למקוטעין סביב z_0.

דוגמה 9: השארית של $f(z)=\frac{1}{z}$ בנקודה $z=0$ היא 1. השארית של $f(z)=\frac{1}{z^2}$ בנקודה $z=0$ היא 0.

משפט 7.13: (משפט השארית) תהי $f(z)$ פונקציה אנליטית מעל תחום D, פרט למספר סופי של נקודות סינגולריות מבודדות בתחום. יהי σ מסלול ז'ורדן חלק למקוטעין בתוך D, המקיף את הנקודות הסינגולרית $z_1, z_2, \ldots, z_m$. אזי

$$\oint_{\sigma} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{n=1}^{m} \mathbf{Res}(f, z_n) \tag{7.2}$$

הוכחה: נסמן על ידי $d(z,\sigma)$ את המרחק הכי קצר מנקודה z למסלול σ, ויהי

$$r_0 = \mathrm{Min}\{d(z_1,\sigma),\ d(z_2,\sigma),\ \ldots,\ d(z_m,\sigma)\}$$

נגדיר

$$r = \frac{1}{3}\cdot \mathrm{Min}\{|z_j - z_k| : 1 \le j < k \le n\} \cup \{r_0\}$$

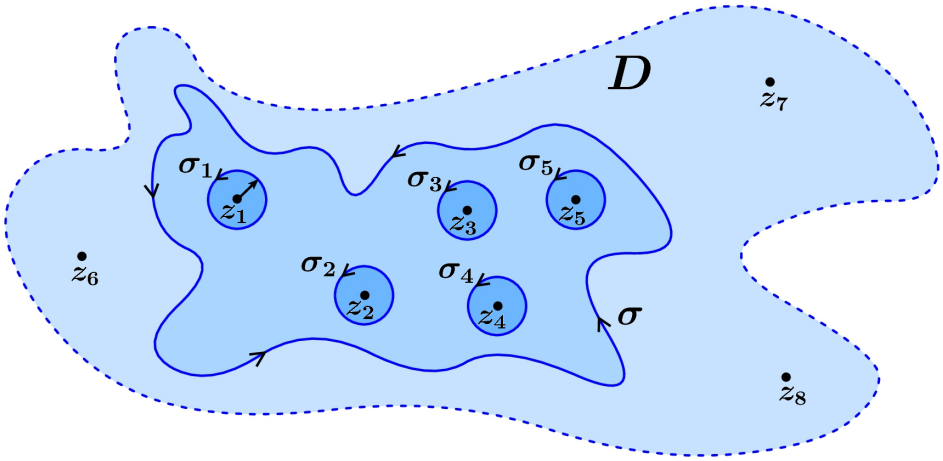
מדובר בקבוצת כל המרחקים בין כל שתי נקודות סינגולריות שונות z_j, z_k, $j \neq k$. זוהי קבוצה סופית ולכן יש לה ערך מינימלי. הרדיוס r מוגדר להיות $\frac{1}{3}$ מערך זה בכדי להבטיח שהעיגולים $\mathbb{D}(z_k, r)$ יהיו זרים כפי שרואים בשרטוט 7.3

יהיו $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m$ מעגלים ברדיוס r סביב הנקודות הסינגולריות $z_1, z_2, \ldots, z_m$.

על פי המסקנה 5.18 של משפט קושי-גורסה

$$\oint_{\sigma} f(z)dz = \oint_{\sigma_1} f(z)dz + \oint_{\sigma_2} f(z)dz + \cdots + \oint_{\sigma_m} f(z)dz \tag{7.3}$$

יהי $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_k)^n$ הטור לורן של $f(z)$ סביב הנקודה הסינגולרית z_k. על פי השירטוט ברור כי הטור מתכנס בהחלט בתחום $0 < |z-z_k| < R_k$ שכולל בתוכו את העיגול הנקוב $\dot{\mathbb{D}}(z_k, r)$. כלומר המסלול σ_k כלול בתוך טבעת ההתכנסות $0 < |z-z_k| < R_k$ לכן על פי



איור 7.3: לפונקציה $f(z)$ חמישה נקודות סינגולריות בתוך המסלול σ ושלושה נקודות סינגולריות מחוץ σ

משפט לורן, נוכל להשתמש במסלול σ_k לחישוב מקדמי הטור לורן

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\sigma_k}\frac{f(z)}{(z-z_k)^{n+1}}dz \quad (-\infty < n < \infty)$$

ניגש לחישוב של האינטגרל $\oint_{\sigma_k} f(z)dz$ עבור $k = 1, 2, \ldots, n$.

$$\begin{aligned}\oint_{\sigma_k} f(z)dz &= \oint_{\sigma_k}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_k)^n\right]dz \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \oint_{\sigma_k}(z-z_k)^n dz \\ &= a_{-1}\oint_{\sigma_k}\frac{dz}{z-z_k} = 2\pi i\,\mathrm{Res}(f, z_k)\end{aligned}$$

נזכור כי המסלול σ_k הוא תת-קבוצה סגורה וחסומה של טבעת ההתכנסות, ולכן ההתכנסות של טור לורן עליו היא התכנסות במידה שווה, המאפשרת את החלפת סדר פעולות האינטגרציה והסכימה. לכל $n \neq -1$, $\oint_{\sigma_k}(z-z_k)^n dz = 0$ כי לפונקציה $(z-z_k)^n$ יש פונקציה פרימיטיבית אנליטית (בכל המישור המרוכב!). משוויון (7.3) נקבל

$$\oint_{\sigma} f(z) = \sum_{k=1}^{n}\oint_{\sigma_k} f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}(f, z_k)$$

וזוהי כמובן טענת המשפט. ∎

הערה: בספרים מסוימים המסלול σ אינו חייב להיות פשוט. קל לראות שבמקרה כזה יש לכפול כל איבר בסכום באינדקס $\mathrm{Ind}(z_k, \sigma)$ (ראה תרגילים 59-63 שבסוף פרק 5).

הטענה הבאה תקל עלינו במקרים רבים את חישוב השארית.

טענה 7.14: אם z_0 הוא קוטב מסדר k של פונקציה $f(z)$, אז

$$\mathrm{Res}(f,z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{\left[(z-z_0)^k f(z)\right]^{(k-1)}}{(k-1)!}$$

הוכחה: על פי הגדרת קוטב מסדר k, z_0 היא נקודה סינגולרית סליקה של הפונקציה $g(z)=(z-z_0)^k f(z)$, ובנוסף, לאחר תיקון בנקודה z_0

$$g(z_0)=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^k f(z)\neq 0$$

ההכפלה בגורם $(z-z_0)^k$ מעתיקה את השארית של f, שהיא המקדם a_{-1} למקום ה־$k-1$ בטור טיילור של $g(z)$. לכן אם נגזור את $g(z)$ $k-1$ פעמים נקבל $(k-1)!a_{-1}$. לכן

$$\mathrm{Res}(f,z_0)=\frac{g^{(k-1)}(z)}{(k-1)!}=\lim_{z\to z_0}\frac{\left[(z-z_0)^k f(z)\right]^{(k-1)}}{(k-1)!}$$

הסיבה לכך שבשלב האחרון נאלצנו להשתמש בגבול היא שהפונקציה $f(z)$ אינה מוגדרת בנקודה z_0. ∎

בפרק 3, עמוד 118, הצגנו גירסה פשוטה של כלל לופיטל עבור פונקציות מרוכבות (משפט 3.27). במקרים רבים ניתן להשתמש בו בכדי לחשב את הגבול הדרוש לחישוב השארית.

מסקנה 7.15: אם z_0 קוטב פשוט של $f(z)$ אז

$$\mathrm{Res}(f,z_0)=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$$

דוגמה 10: לא קשה לבדוק ש־$z_0=1+i$ הוא קוטב פשוט של $f(z)=\frac{1}{z^4+4}$, ולכן על פי המסקנה האחרונה

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}(f,z_0) &= \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)=\lim_{z\to 1+i}\frac{z-1-i}{z^4+4}=\frac{1}{4z^3}\Big|_{z=1+i}\\ &= \frac{1}{4(1+i)^3}=\frac{-1-i}{16}\end{aligned}$$

דוגמה 11: חשב את השארית של הפונקציה $f(z)=\frac{e^z-1-z}{\sin(z)-z}$ בקוטב $z=0$.

פתרון: קל לראות ש־$z=0$ הוא שורש מריבוי 2 של המונה e^z-1-z ושורש מריבוי 3 של המכנה $\sin z$ ולכן (על פי טענה 7.11) $z=0$ הוא קוטב פשוט של f. לכן נוכל להשתמש

בנוסחה

$$\mathrm{Res}(f,z_0)=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$$

לחישוב השארית של $f(z)$ בנקודה $z=0$ (תוך שימוש בכלל לופיטל)

$$\begin{aligned}\lim_{z\to 0}\frac{z(e^z-1-z)}{\sin z-z} &= \lim_{z\to 0}\frac{(e^z-1-z)+z(e^z-1)}{\cos(z)-1}\\ &= \lim_{z\to 0}\frac{e^z-1+ze^z+e^z-1}{-\sin(z)}\\ &= \lim_{z\to 0}\frac{3e^z+ze^z}{-\cos(z)}=-3\end{aligned}$$

<u>פתרון שני:</u>

דרך נוספת לפתור את הבעייה היא באמצעות טורי טיילור

$$\begin{aligned}e^z-1-z &= \tfrac{z^2}{2!}+\tfrac{z^3}{3!}+\tfrac{z^4}{4!}\cdots\\ &= z^2\left(\tfrac{1}{2!}+\tfrac{z}{3!}+\tfrac{z^2}{4!}\cdots\right)=z^2g(z)\\ \sin(z)-z &= -\tfrac{z^3}{3!}+\tfrac{z^5}{5!}-\tfrac{z^7}{7!}+\cdots\\ &= z^3\left(-\tfrac{1}{3!}+\tfrac{z^2}{5!}-\tfrac{z^4}{7!}+\cdots\right)=z^3h(z)\end{aligned}$$

ברור כי $g(0)\neq 0$, $h(0)\neq 0$, ולכן $z=0$ הוא קוטב פשוט של $f(z)=\frac{g(z)}{zh(z)}$. על פי נוסחת חישוב השארית של קוטב פשוט

$$\mathrm{Res}(f,0)=\lim_{z\to 0}zf(z)=\lim_{z\to 0}z\frac{g(z)}{zh(z)}=\frac{g(0)}{h(0)}=\frac{\frac{1}{2!}}{-\frac{1}{3!}}=-3$$

דוגמה 12: חשב את האינטגרל $\oint_{|z|=1}z^5e^{\frac{2}{z}}$.

פתרון: טור לורן של $e^{\frac{2}{z}}$ הוא

$$e^{\frac{2}{z}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{2}{z}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}z^{-n}$$

ולכן הטור לורן של $z^5e^{\frac{2}{z}}$ הוא

$$z^5e^{\frac{2}{z}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}z^{-n+5}$$

לפונקציה $f(z)=z^5e^{\frac{2}{z}}$ יש קוטב יחיד בנקודה $z=0$. השארית של f בנקודה $z=0$

מתקבלת עבור $n=6$:

$$\mathrm{Res}(f,0)=\frac{2^6}{6!}=\frac{64}{720}=\frac{4}{45}$$

לכן

$$\oint_{|z|=1} z^5 e^{\frac{2}{z}} = 2\pi i\,\mathrm{Res}(f,0)=\frac{8\pi i}{45}$$

דוגמה 13: חשב את האינטגרל $\displaystyle\oint_{|z|=1}\frac{(z^2-1)^2\,dz}{z^2(z+\frac{1}{2})(z+2)}$

פתרון: נסמן $f(z)=\frac{(z^2-1)^2}{z^2(z+\frac{1}{2})(z+2)}$. יש להשתמש במשפט השארית. יש לנו שני קטבים בתוך העיגול $|z|=1$: $z_0=0$, קוטב מסדר 2, ו־ $z_1=-\frac{1}{2}$, קוטב פשוט. לכן על פי משפט השארית 7.13

$$\oint_{|z|=1}\frac{(z^2-1)^2\,dz}{z^2(z+\frac{1}{2})(z+2)}=2\pi i\left[\mathrm{Res}(f,0)+\mathrm{Res}(f,-\frac{1}{2})\right]$$

נסמן

$$g(z)=z^2f(z)=\frac{z^4-2z^2+1}{z^2+\frac{5}{2}z+1}$$

אזי

$$\mathrm{Res}(f,0)=\lim_{z\to 0}\frac{g'(z)}{1!}=\frac{(-2z-5/2)(z^4-2z^2+1)}{(z^2+5/2z+1)^2}+\frac{4z^3-4z}{z^2+5/2z+1}\Big|_{z=0}=-\frac{5}{2}$$

הקוטב $z_1=-\frac{1}{2}$ הוא קוטב פשוט ולכן

$$\mathrm{Res}(f,-\frac{1}{2})=\frac{(z^2-1)^2}{z^2(z+2)}\Big|_{z=-\frac{1}{2}}=\frac{9/16}{1/4\cdot 3/2}=3/2$$

לכן

$$\oint_{|z|=1}\frac{(z^2-1)^2\,dz}{z^2(z+\frac{1}{2})(z+2)}=2\pi i\left(-\frac{5}{2}+\frac{3}{2}\right)=-2\pi i$$

דוגמה 14: חשב את האינטגרל $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{5+4\cos\theta}$

פתרון: מהזוגיות של $\cos\theta$ נובע

$$\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{5+4\cos\theta}=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\theta}{5+4\cos\theta}=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\theta}{5+2e^{i\theta}+2e^{-i\theta}}$$

$$=\frac{1}{2i}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{e^{i\theta}}\cdot\frac{ie^{i\theta}\,d\theta}{5+2e^{i\theta}+2e^{-i\theta}}=\frac{1}{2i}\oint_{|z|=1}\frac{1}{z}\cdot\frac{dz}{5+2z+2z^{-1}}$$

$$=\frac{1}{2i}\oint_{|z|=1}\frac{dz}{2(z+2)(z+\frac{1}{2})}$$

$$= \frac{1}{4i} \cdot 2\pi i \cdot \text{Res}\left(\frac{1}{(z+2)(z+\frac{1}{2})},\ -\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{-\frac{1}{2}+2} = \frac{\pi}{3}$$

נציין כי הביטוי $|z| = 1$ שמופיע בגבול התחתון של האינטגרל הקווי מסתיר את הפרמטריזציה של המעגל שלנו שהיא $z = e^{i\theta}$, $-\pi \le \theta \le \pi$.

באמצעות ההצבות $\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$, $\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$, ניתן לפתור אינטגרלים טריגונומטריים ממשיים רבים מהצורה $\int_a^b f(\sin\theta, \cos\theta)\, d\theta$.

דוגמה 15: חשב את ערך האינטגרל $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\sin\theta}$

פתרון: נשתמש בהצבה הסטנדרטית $z = e^{i\theta}$ (ולכן $dz = ie^{i\theta}d\theta$, $d\theta = \frac{dz}{ie^{i\theta}} = \frac{dz}{iz}$)

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\sin\theta} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{2+\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2id\theta}{4i+e^{i\theta}-e^{-i\theta}}$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2idz}{iz(4i+z-\frac{1}{z})} = 2\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dz}{z^2+4iz-1}$$

$$= 2\oint_{|z|=1} \frac{dz}{(z-z_1)(z-z_2)}$$

כאשר z_1, z_2 הם השורשים של המשוואה הריבועית $z^2+4iz-1=0$

$$z_1 = (-2+\sqrt{3})i, \qquad z_2 = (-2-\sqrt{3})i$$

קל לבדוק שהקוטב הפשוט z_1 נמצא בתוך המעגל $|z| = 1$, אבל הקוטב z_2 נמצא מחוץ למעגל. לכן על פי משפט השארית

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\sin\theta} = 2\oint_{|z|=1} \frac{dz}{(z-z_1)(z-z_2)} = 2\cdot 2\pi i\,\text{Res}\left(\frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)}, z_1\right)$$

$$= 4\pi i \cdot \frac{1}{z_1-z_2} = \frac{4\pi i}{(-2+\sqrt{3})i-(-2-\sqrt{3})i} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

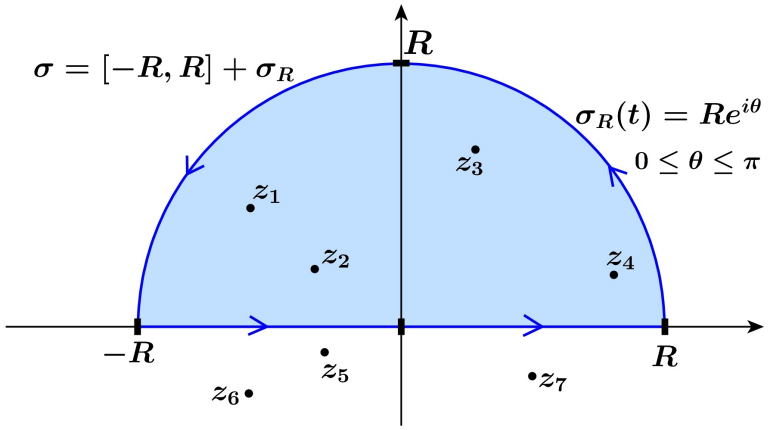
7.3 חישוב אינטגרלים מוכללים

- אינטגרלים מוכללים הם אינטגרלים אשר בהם לפחות אחד מגבולות האינטגרציה הוא אינסופי. חישוב אינטגרלים כאלה מופיע בנושא של התמרות אינטגרליות ויש לו חשיבות רבה בתחומים של הנדסת חשמל ותיקשורת.
- למרות שבחלק מהמקרים מדובר באינטגרלים מוכללים ממשיים, השימוש במשפט השארית ובמשפטים נוספים מתחום הפונקציות המרוכבות הוא קריטי לחישובם. זה מחזיר אותנו לדיון בתחילת הפרק לחשיבותם של המספרים "המדומים" גם עבור פתרון בעיות ממשיות.
- נתחיל בחישוב של אינטגרלים מוכללים של פונקציות רציונליות $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}dx$, כאשר $P(x)$, $Q(x)$ הינם פולינומים. כזכור מקורס חדו"א, חישוב של אינטגרלים כאלה ברוב המקרים הוא בעייה קשה או בלתי פתירה באמצעות הכלים הרגילים של חדו"א 1.

טענה 7.16: אם $P(z)$, $Q(z)$ זוג פולינומים מרוכבים המקיימים $\deg(P)\le\deg(Q)-2$, ובנוסף לפולינום $Q(z)$ אין שורשים ממשיים. אזי

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}dx=2\pi i\sum_{n=1}^{m}\operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)},z_n\right)$$

כאשר z_1, z_2, $\dots$, z_m, הם הקטבים של $\frac{P(z)}{Q(z)}$ בחצי המישור העליון.



איור 7.4: מסלול חצי-מעגלי $\sigma=[-R,R]+\sigma_R$, $\sigma_R(t)=Re^{i\theta}$, $0\le\theta\le\pi$. חלק מהקטבים כלולים במסלול וחלקם בחוץ.

הוכחה: יהי $P(z)$ פולינום ממעלה m, $Q(z)$ פולינום ממעלה n ונניח כי $n\ge m+2$. אזי

$$\left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right|=\left|\frac{a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_mz^m}{b_0+b_1z+b_2z^2+\cdots+b_nz^n}\right|=\frac{|a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_mz^m|}{|b_0+b_1z+b_2z^2+\cdots+b_nz^n|}$$

$$=\frac{|z|^m\cdot\left|\frac{a_0}{z^m}+\frac{a_1}{z^{m-1}}+\frac{a_2}{z^{m-2}}+\cdots+a_m\right|}{|z|^n\cdot\left|\frac{b_0}{z^n}+\frac{b_1}{z^{n-1}}+\frac{b_2}{z^{n-2}}+\cdots+b_n\right|}$$

$$= \frac{\left|\frac{a_0}{z^m} + \frac{a_1}{z^{m-1}} + \frac{a_2}{z^{m-2}} + \cdots + a_m\right|}{|z|^{n-m} \cdot \left|\frac{b_0}{z^n} + \frac{b_1}{z^{n-1}} + \frac{b_2}{z^{n-2}} + \cdots + b_n\right|}$$

$$\approx \frac{|a_m|}{|z|^{n-m} \cdot |b_n|} \leq \frac{|a_m|}{|z|^2 \cdot |b_n|} \xrightarrow[|z|\to\infty]{} \frac{|a_m|}{\infty \cdot |b_n|} = 0$$

כל אחד מהשברים $\frac{a_k}{z^{m-k}}$, $\frac{b_k}{z^{n-k}}$, שואף לאפס כאשר $|z| \to \infty$. לכן החישוב מוכיח שכאשר $|z|$ שואף לאינסוף הביטוי $\left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right|$ נעשה קטן ביחס ל־ $\frac{1}{|z|^2}$.

$$\oint_{\sigma} \frac{P(z)}{Q(z)}dz = \int_{[-R,R]} \frac{P(x)}{Q(x)}dx + \int_{\sigma_R} \frac{P(z)}{Q(z)}dz \tag{7.4}$$

נשתמש בתוצאה הקודמת ובאי-שוויון המשולש האינטגרלי (משפט 5.2)

$$\left|\int_{\sigma_R} \frac{P(z)}{Q(z)}dz\right| \leq \int_{\sigma_R} \left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right| dz \leq \pi R \cdot \max_{|z|=R} \left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right| \precsim \pi R \cdot \frac{C}{R^2} = \frac{C}{R} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

ולכן

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\sigma_R} \frac{P(z)}{Q(z)}dz = 0 \tag{7.5}$$

על פי המשפט היסודי של האלגברה, לפולינום $Q(x)$ יש לכל היותר n שורשים שונים, ולכן לפונקציה הרציונלית $\frac{P(x)}{Q(x)}$ יש לכל היותר n קטבים. יהי R_0 מספר ממשי מספיק גדול כך שלכל $R \geq R_0$ חצי המעגל העליון יכיל בתוכו את כל הקטבים שבחצי המישור העליון. על פי משפט השארית הערך I של האינטגרל $\int_{\sigma_R} \frac{P(z)}{Q(z)}dz$ יהיה קבוע לכל $R \geq R_0$

$$\forall R \geq R_0: \quad I = \int_{\sigma_R} \frac{P(z)}{Q(z)}dz = 2\pi i \cdot \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}, z_j\right)$$

כאשר $z_1, \ldots, z_k$ הם הקטבים של $\frac{P(z)}{Q(z)}$ בחצי המישור העליון. לכן מהשוויון (7.4) והשוויון (7.5) נובע כי

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \lim_{R\to\infty} \left[I - \int_{\sigma_R} \frac{P(z)}{Q(z)}dz\right] = I - 0 = I$$

קיבלנו לכן את הנוסחה

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}dx = 2\pi i \cdot \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}, z_j\right)$$

■

למעשה ניתן להכליל את הטענה עבור כל פונקציה $f(z)$ השואפת לאפס בקצב ריבועי

$$\lim_{|z|\to\infty} |z^2 f(z)| = 0$$

נשאיר את הפרטים לתלמיד.

הטענה נכונה גם עבור חצי המישור התחתון, אבל בגלל שיש לקחת מסלול שלילי של המסלול, יש להוסיף מינוס לתוצאה.

דוגמה 16: חשב את $\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+4}$.

פתרון: במקרה זה $P(z)=1$, $Q(z)=z^4+1$. ברור שתנאי טענה 7.16 מתקיימים. הקטבים של $f(z)=\frac{1}{z^4+1}$ הם השורשים של z^4+4

$$z=(-4)^{\frac{1}{4}}=4e^{\frac{(2k+1)\pi i}{4}}=1+i,\ -1+i,\ 1-i,\ -1-i$$

ולכן

$$f(z)=\frac{1}{z^4+1}=\frac{1}{(z-1-i)(z-1+i)(z+1-i)(z+1+i)}$$

הקטבים שנמצאים בחצי העליון של המישור הם: $1+i$, $-1+i$, ולכן

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+4}=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^4+4}=\pi i\left[\mathrm{Res}(f,1+i)+\mathrm{Res}(f,-1+i)\right]$$

כל הקטבים הם פשוטים ולכן

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}(f,1+i)&=\lim_{z\to 1+i}(z-1-i)f(z)\\&=\frac{1}{(z-1+i)(z+1-i)(z+1+i)}\Big|_{z=1+i}\\&=\frac{1}{2i\cdot 2\cdot(2+2i)}=\frac{1}{-8+8i}=\frac{-1-i}{16}\end{aligned}$$

באותו האופן

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}(f,-1+i)&=\lim_{z\to 1+i}(z+1-i)f(z)\\&=\frac{1}{(z-1-i)(z-1+i)(z+1+i)}\Big|_{z=-1+i}\\&=\frac{1}{-2\cdot(-2+2i)\cdot 2i}=\frac{1}{8+8i}=\frac{1-i}{16}\end{aligned}$$

לכן

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+4} = \pi i\left[\frac{-1-i}{16}+\frac{1-i}{16}\right] = \frac{\pi}{8}$$

הערה: על ידי שימוש בכלל לופיטל ניתן לפשט מאוד את חישוב השאריות $\mathrm{Res}(f,1+i)$ ו־$\mathrm{Res}(f,-1+i)$. למשל

$$\mathrm{Res}(f,1+i) = \lim_{z\to 1+i}\frac{z-1-i}{z^4+4} = \frac{1}{4z^3}\Big|_{z=1+i} = \frac{1}{4(1+i)^3} = \frac{-1-i}{16}$$

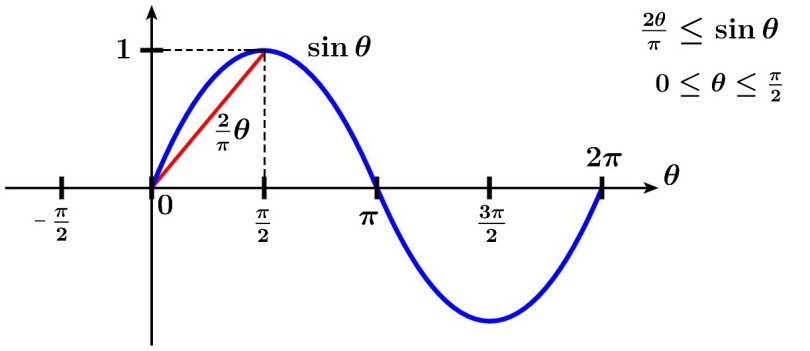
בכדי לחשב אינטגרלים מוכללים בהם מעורבים פונקציות רציונליות וטריגונומטריות, נזדקק ללמה הבאה של קמיל ז'ורדן.

טענה 7.17: (הלמה של ז'ורדן) תהי $f(z)$ פונקציה אנליטית על $\mathbb{C}$ חוץ ממספר סופי של קטבים, כך ש־$\lim_{|z|\to\infty}|f(z)| = 0$. אזי

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\sigma_R} e^{i\alpha z}f(z)dz = 0$$

כאשר $\alpha>0$ ממשי ו־σ_R חצי מעגל עליון: $\sigma_R(\theta) = Re^{i\theta}$, $0\le\theta\le\pi$.

הוכחה: נשתמש באי-שוויון $\frac{2\theta}{\pi}\le\sin\theta$ בקטע $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$, שקל להוכיח כתרגיל, וכפי שניתן להווכח ויזואלית משרטוט 7.5.



איור 7.5: הוכחה ויזואלית של אי-השוויון מסלול חצי-מעגלי $\sigma_R(t) = Re^{i\theta}$, $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}\left|\int_{\sigma_R} e^{i\alpha z}f(z)dz\right| &= \left|\int_{\sigma_R} e^{i\alpha R\cos\theta-\alpha R\sin\theta}\cdot f(z)\cdot iRe^{i\theta}\,d\theta\right| \\ &\le \int_0^\pi e^{-\alpha R\sin\theta}|f(Re^{i\theta})|\cdot R\,d\theta \\ &\le R\cdot\operatorname*{Max}_{0\le\theta\le\pi} f(Re^{i\theta})\cdot\int_0^\pi e^{\frac{-2\alpha R\theta}{\pi}}d\theta \\ &= 2R\cdot\operatorname*{Max}_{0\le\theta\le\pi} f(Re^{i\theta})\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{-2\alpha R\theta}{\pi}}d\theta \quad \text{(symmetry)}\end{aligned}$$

את האינטגרל האחרון נפתור בקלות

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{-2\alpha R\theta}{\pi}} d\theta = -\frac{\pi}{2\alpha R} e^{\frac{-2\alpha R\theta}{\pi}} \Big|_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2\alpha R}(1 - e^{-\alpha R})$$

לסיכום, קיבלנו

$$\begin{aligned} \left| \int_{\sigma_R} e^{i\alpha z} f(z) dz \right| &\leq 2R \cdot \underset{0\leq\theta\leq\pi}{\text{Max}} f(Re^{i\theta}) \cdot \frac{\pi}{2\alpha R}(1 - e^{-\alpha R}) \\ &= \underset{0\leq\theta\leq\pi}{\text{Max}} f(Re^{i\theta}) \cdot \frac{\pi}{\alpha}(1 - e^{-\alpha R}) \xrightarrow[R\to\infty]{} 0 \end{aligned}$$

בגלל ש־$\alpha > 0$, הביטוי $1 - e^{-\alpha R}$ שואף ל־1 כאשר R שואף לאינסוף, ולכן אינו משפיע. ■

מסקנה 7.18: אם $P(z)$, $Q(z)$ זוג פולינומים מרוכבים המקיימים $\deg(P) < \deg(Q)$, אזי לכל $\alpha > 0$

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\sigma_R} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z} dz = 0$$

מסקנה 7.19: אם $P(z)$, $Q(z)$ זוג פולינומים מרוכבים המקיימים $\deg(P) < \deg(Q)$, ובנוסף לפולינום $Q(z)$ אין שורשים ממשיים. אזי

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x} dx = 2\pi i \sum_{n=1}^{m} \text{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha x}, z_n\right)$$

כאשר $z_1, z_2, \ldots, z_m$, הם הקטבים של $\frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z}$ בחצי המישור העליון.

ההוכחה זהה להוכחת טענה 7.16 ונשאיר את פרטיה לתלמיד (יש להעזר בשרטוט 7.4). נציין כי

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \cos \alpha x \, dx + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \sin \alpha x \, dx$$

ולכן אם

$$2\pi i \sum_{k=1}^{n} \text{Res}(f, z_k) = A + Bi$$

אז

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(z)}{Q(z)} \cos(x) \, dx = A$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(z)}{Q(z)} \sin(x) \, dx = B$$

דוגמה 17: הוכח כי $$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x^2+4x+5}dx=-\frac{\pi\sin(2)}{e}$$

פתרון: נחשב את

$$\oint_{\sigma_R}\frac{e^{iz}}{z^2+4z+5}dz=\oint_{\sigma_R}\frac{\cos z}{z^2+4z+5}dz+i\oint_{\sigma_R}\frac{\sin z}{z^2+4z+5}dz$$

ברור שכאן $P(z)=1$, $Q(z)=z^2+4z+5$ מקיימים את תנאי מסקנה 7.19. הקטבים של הפונקציה $f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}e^{iz}$ הם שורשי הפולינום z^2+4z+5

$$z_1,z_2=\frac{-4\pm\sqrt{16-20}}{2}=-2+i,-2-i$$

יש לנו קוטב יחיד $z_1=-2+i$ שנמצא בחצי העליון של המישור, ולכן

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x^2+4x+5}dx=2\pi i\cdot\operatorname{Res}\left(\frac{e^{iz}}{z^2+4z+5},\ -2+i\right)$$

מדובר בקוטב פשוט, ולכן

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\left(\frac{e^{iz}}{z^2+4z+5},\ -2+i\right)&=\lim_{z\to-2+i}\frac{e^{iz}}{z^2+4z+5}(z+2-i)\\&=\lim_{z\to-2+i}\frac{e^{iz}}{z+2+i}\\&=\frac{e^{-1-2i}}{2i}\\&=\frac{\sin(-2)}{e}-\frac{i\cos(-2)}{e}\end{aligned}$$

לכן

$$\begin{aligned}\oint_{\sigma_R}\frac{e^{iz}}{z^2+4z+5}dz&=2\pi i\cdot\left[\frac{\sin(-2)}{e}-\frac{i\cos(-2)}{e}\right]\\&=\frac{\pi\cos(2)}{e}-\frac{\pi\sin(2)}{e}i\end{aligned}$$

לכן

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x^2+4x+5}dx=-\frac{\pi\sin(2)}{e}$$

הערה: הפולינומים $P(x)$, $Q(x)$, שמופיעים עם משתנה "ממשי" x עשויים להכיל מקדמים מרוכבים!

7.4 עקרון הארגומנט ומשפט רושה (Eugène Rouché 1832-1910)

איתור שורשים וקטבים של פונקציות מרוכבות בתחומים נתונים יש חשיבות גבוהה עבור פיתוח והאצה של אלגוריתמים חישוביים בתחומים שונים. לפעמים הידיעה כי לפונקציה נתונה יש מספר ידוע של שורשים בתחום נתון (ללא מציאת השורשים המדויקים) היא בעלת חשיבות אלגוריתמית. עקרון הארגומנט ומשפט רושה הם הכלים הבסיסיים שמסייעים לכך.

הגדרה 7.8: פונקציה $f(z)$ נקראת **מרומורפית** בתחום D אם היא אנליטית בתחום D מלבד בקטבים.

הגדרה 7.9: הנגזרת הלוגריתמית של פונקציה אנליטית $f(z)$ מוגדרת להיות המנה $\frac{f'(z)}{f(z)}$.

המקור לשם הוא מכך שהביטוי $\frac{f'(z)}{f(z)}$ הוא הנגזרת של הפונקציה $\log f(z)$. אם $f(z)$ אנליטית בתחום D אז הנגזרת הלוגריתמית שלה $\frac{f'(z)}{f(z)}$ היא פונקציה מרומורפית בתחום D. היא אנליטית בכל נקודה של D, פרט לשורשים של $f(z)$ שבהן לפונקציה $\frac{f'(z)}{f(z)}$ יש קטבים.

טענה 7.20: הנגזרת הלוגריתמית של מכפלת פונקציות שווה לסכום הנגזרות הלוגריתמיות

$$\frac{[f(z)g(z)]'}{f(z)g(z)} = \frac{f'(z)}{f(z)} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

הוכחה:

$$\frac{[f(z)g(z)]'}{f(z)g(z)} = \frac{f'(z)g(z) + f(z)g'(z)}{f(z)g(z)} = \frac{f'(z)}{f(z)} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

■

על ידי שימוש באינדוקציה מתמטית ניתן להוכיח נוסחה דומה עבור מכפלה של n פונקציות.

מסקנה 7.21: הנגזרת הלוגריתמית של מכפלת n פונקציות שווה לסכום הנגזרות הלוגריתמיות שלהן

$$\frac{[f_1(z)f_2(z)\cdots f_n(z)]'}{f_1(z)f_2(z)\cdots f_n(z)} = \frac{f_1'(z)}{f_1(z)} + \frac{f_2'(z)}{f_2(z)} + \cdots + \frac{f_n'(z)}{f_n(z)} \tag{7.6}$$

טענה 7.22: תהי $f(z)$ פונקציה אנליטית בתחום D, עם m שורשים $z_1, z_2, \ldots, z_m$ בעלי ריבוי $k_1, k_2, \ldots, k_m$. אזי קיימת פונקציה אנליטית $g(z)$ שאינה מתאפסת בתחום

D, כך ש־

$$f(z) = (z-z_1)^{k_1}(z-z_2)^{k_2}\cdots(z-z_m)^{k_m}\,g(z) \tag{7.7}$$

והנגזרת הלוגריתמית של f נתונה על ידי

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k_1}{z-z_1} + \frac{k_2}{z-z_2} + \cdots + \frac{k_m}{z-z_m} + \frac{g'(z)}{g(z)} \tag{7.8}$$

הוכחה: על פי ההגדרה של שורש קיימת פונקציה אנליטית $g_1(z)$ כך ש־

$$f(z) = (z-z_1)^{k_1} g_1(z)$$

ובנוסף $g_1(z_1) \neq 0$. לכן השורשים z_2, z_3, ..., z_m עוברים לפונקציה $g_1(z)$ עם אותו ריבוי כמו קודם. לאחר m צעדים מסוג זה נקבל את השוויון (7.7). השוויון (7.8) הוא תוצאה מיידית מהמסקנה הקודמת. נעיר רק שהנגזרת הלוגריתמית של $(z-c)^k$ היא

$$\frac{[(z-c)^k]'}{(z-c)^k} = \frac{k(z-c)^{k-1}}{(z-c)^k} = \frac{k}{z-c}$$

■

טענה 7.23: תהי $f(z)$ פונקציה מרומורפית בתחום D, עם m קטבים z_1, z_2, ..., z_m מסדר k_1, k_2, ..., k_m. אזי קיימת פונקציה אנליטית $g(z)$ בכל התחום D, כך ש־

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_1)^{k_1}(z-z_2)^{k_2}\cdots(z-z_m)^{k_m}} \tag{7.9}$$

והנגזרת הלוגריתמית של f נתונה על ידי

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = -\frac{k_1}{z-z_1} - \frac{k_2}{z-z_2} - \cdots - \frac{k_m}{z-z_m} + \frac{g'(z)}{g(z)} \tag{7.10}$$

הוכחה: אם z_1 קוטב מסדר k_1 של $f(z)$, אז קיימת פונקציה $g_1(z)$ שהיא אנליטית ב־z_1, כך ש־$f(z) = \frac{g_1(z)}{(z-z_1)^{k_1}}$. ברור שעכשיו z_2 הוא קוטב מסדר k_2 של $g_1(z)$, ולכן קיימת פונקציה אנליטית בנקודה z_2 כך ש־$g_1(z) = \frac{g_2(z)}{(z-z_2)^{k_2}}$, ולכן

$$f(z) = \frac{g_1(z)}{(z-z_1)^{k_1}} = \frac{g_2(z)}{(z-z_1)^{k_1}(z-z_2)^{k_2}}$$

לאחר m צעדים מסוג זה נקבל את שוויון (7.9). נוכל לרשום אותו גם בצורה הבאה

$$f(z) = (z-z_1)^{-k_1}(z-z_2)^{-k_2}\cdots(z-z_m)^{-k_m}\,g(z)$$

והמעבר לשוויון (7.10) מתקבל שוב באופן מיידי מנוסחה (7.6). ∎

משפט 7.24: (עקרון הארגומנט) תהי $f(z)$ פונקציה מרומורפית בתחום D, ויהי σ מסלול ז'ורדן חלק למקוטעין בתוך D שאינו עובר דרך השורשים או הקטבים של f. יהי $Z(f,\sigma)$ מספר השורשים של f שנמצאים בתוך σ, כך שהספירה נעשית על פי הריבוי של כל שורש. יהי $P(f,\sigma)$ מספר הקטבים של f שנמצאים בתוך σ, כך שהספירה נעשית על פי הסדר של כל קוטב. אזי

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\sigma}\frac{f'(z)}{f(z)}=Z(f,\sigma)-P(f,\sigma) \tag{7.11}$$

הוכחה: יהיו $z_1,z_2,\ldots,z_m$ השורשים בתוך σ, בעלי ריבוי $k_1,k_2,\ldots,k_m$. יהיו $w_1,w_2,\ldots,w_j$ הקטבים בתוך σ, מסדר $l_1,l_2,\ldots,l_j$. בתרגיל 7.3 התלמיד נדרש להוכיח שיש רק מספר סופי של נקודות כאלה בתוך כל מסלול ז'ורדן. על סמך שתי הטענות הקודמות, קיימת פונקציה אנליטית בסביבת המסלול σ כך ש־

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{k_1}{z-z_1}+\frac{k_2}{z-z_2}+\cdots+\frac{k_m}{z-z_m}-\frac{l_1}{z-w_1}-\frac{l_2}{z-w_2}-\cdots-\frac{l_j}{z-w_j}+\frac{g'(z)}{g(z)}$$

על סמך מסקנה 5.17 (ראה עמוד 200) אם z_0 נקודה בתוך המסלול σ אז

$$\oint_{\sigma}\frac{1}{z-z_0}\,dz=2\pi i$$

ולכן

$$\oint_{\sigma}\frac{f'(z)}{f(z)}=2\pi i(k_1+k_2+\cdots+k_m-l_1-l_2-\cdots-l_j)+\oint_{\sigma}\frac{g'(z)}{g(z)}\,dz$$

על פי משפט קושי-גורסה (משפט 5.8 בעמוד 188), האינטגרל $\oint\frac{g'(z)}{g(z)}\,dz$ מתאפס כי $\frac{g'(z)}{g(z)}$ פונקציה אנליטית בפנים המסלול σ וגם על המסלול עצמו (כי למכנה $g(z)$ אין שום שורשים או קטבים על המסלול). לכן נקבל

$$\oint_{\sigma}\frac{f'(z)}{f(z)}=2\pi i(Z(f,\sigma)-P(f,\sigma))$$

וסיימנו. ∎

מקור השם "עקרון הארגומנט" הוא בפירוש הגאומטרי של הביטוי $\oint_{\sigma}\frac{f'(z)}{f(z)}dz$ כמדידת שינוי הארגומנט של $f(z)$ כאשר z נע לאורך המסלול σ, מאחר ו־$\frac{f'(z)}{f(z)}$ הוא הנגזרת של $\log f(z)=\ln|f(z)|+i\arg(f(z))$.

עקרון הארגומנט שימושי באלגוריתמים לאיתור אזורים בהן פונקציה נתונה עשויה להכיל שורשים או קטבים. בדרך כלל מדובר בפונקציות נומריות אשר לא ניתן לטפל בהן בכלים אלגבריים רגילים. באלגוריתמים מסוג זה מחשבים קודם את האינטגרל $\oint_{\boldsymbol{\sigma}} \frac{f'(z)}{f(z)}$ (באמצעות שיטות נומריות) מעל מעגל גדול שמכסה את כל האזורים שבהם אנו מתעניינים, ולאחר מכן מחשבים את האינטגרל מעל אזורים יותר ויותר קטנים (על פי שיטות חצייה שונות) עד שמגיעים לאזורים בהם יש שורש או קוטב יחיד.

אחת מהתוצאות הידועות של עקרון הארגומנט הוא משפט רושה (Eugène Rouché 1832-1910) אשר גם הוא שימושי עבור איתור שורשים וקטבים של פונקציות מרומורפיות.

משפט 7.25: (Rouché) יהיו $f(z)$, $g(z)$, שתי פונקציות אנליטיות בתחום D, ויהי $\boldsymbol{\sigma}$ מסלול ז'ורדן חלק למקוטעין בתוך D, אשר גם הפנים שלו כלול ב־D. אם $|f(z)| > |g(z)|$ על כל נקודה במסלול $\boldsymbol{\sigma}$ אז

$$Z(f+g,\boldsymbol{\sigma}) = Z(f,\boldsymbol{\sigma})$$

כלומר מספר השורשים של $f(z)+g(z)$ בתוך המסלול $\boldsymbol{\sigma}$ זהה לזה של $f(z)$.

הוכחה: נשתמש בעקרון הארגומנט ובטענה 7.20. החלק של ספירת מספר הקטבים אינו מופיע מאחר ומדובר בפונקציות אנליטיות ללא קטבים

$$\begin{aligned}
Z(f+g,\boldsymbol{\sigma}) &= \tfrac{1}{2\pi i}\oint_{\boldsymbol{\sigma}} \tfrac{[f(z)+g(z)]'}{f(z)+g(z)} = \tfrac{1}{2\pi i}\oint_{\boldsymbol{\sigma}} \frac{\left[f(z)\left(1+\frac{f(z)}{g(z)}\right)\right]'}{f(z)\left(1+\frac{f(z)}{g(z)}\right)} \\
&= \tfrac{1}{2\pi i}\oint_{\boldsymbol{\sigma}} \left[\frac{f'(z)}{f(z)} + \frac{\left(1+\frac{f(z)}{g(z)}\right)'}{1+\frac{f(z)}{g(z)}}\right] \boldsymbol{dz} \\
&= Z(f,\boldsymbol{\sigma}) + \tfrac{1}{2\pi i}\oint_{\boldsymbol{\sigma}} \frac{\left(1+\frac{f(z)}{g(z)}\right)'}{1+\frac{f(z)}{g(z)}} \boldsymbol{dz}
\end{aligned}$$

על פי הנתון $\left|\frac{g(z)}{f(z)}\right| < 1$ על כל נקודות המסלול $\boldsymbol{\sigma}$, ולכן הפונקציה $1+\frac{g(z)}{f(z)}$ לא תוכל לקבל ערך ממשי שלילי או אפס. כלומר תמונת המסלול תחת הפונקציה $1+\frac{g(z)}{f(z)}$ כלולה במישור המחורץ שבו הענף הראשי של פונקציית הלוגריתם $\mathrm{Log}(z)$ אנליטית. לכן הפונקציה $\mathrm{Log}\left(1+\frac{g(z)}{f(z)}\right)$ מוגדרת היטב ואנליטית על המסלול $\boldsymbol{\sigma}$. הנגזרת שלה היא

$$\left[\mathrm{Log}\left(1+\frac{g(z)}{f(z)}\right)\right]' = \frac{\left(1+\frac{f(z)}{g(z)}\right)'}{1+\frac{f(z)}{g(z)}}$$

לכן על פי משפט קושי-גורסה (משפט 5.8)

$$\oint_{\sigma} \frac{\left(1+\frac{f(z)}{g(z)}\right)'}{1+\frac{f(z)}{g(z)}}dz = 0$$

ולכן נקבל $Z(f+g,\sigma) = Z(f,\sigma)$. ∎

דוגמה 18: הוכח שכל השורשים של הפולינום $P(z) = z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$ כלולים בעיגול $|z| < 2$.

פתרון: ראשית כל נציין כי לא קיימת נוסחה אלגברית למציאת השורשים של פולינומים ממעלה 5 ומעלה. לכן נדרשים שיטות נומריות שבאמצעותן ניתן לקבל קירובים לשורשים. נציב $f(z) = z^5$, $g(z) = z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$ במשפט רושה. המסלול שלנו הוא המעגל $|z| = 2$. לא קשה לראות כי על המעגל הזה מתקיים

$$|g(z)| \le |z|^4 + |z|^3 + |z|^2 + |z| + 1 = 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 31 < 32 = |z|^5$$

ולכן $|g(z)| < |f(z)|$ על המעגל $|z| = 2$. לכן מתקיימים תנאי משפט רושה, ולכן לפונקציה $f(z) + g(z)$ (שהיא הפולינום שלנו) יש אותו מספר שורשים כמו לפולינום $f(z) = z^5$ בתוך העיגול $|z| < 2$. לפולינום z^5 יש שורש יחיד $z = 0$ בעל ריבוי 5, ולכן כל השורשים של הפולינום שלנו חייבים להימצא בתוך העיגול $|z| < 2$.

תרגיל 7.3: אם $f(z)$ פונקציה מרומורפית ולא מתאפסת זהותית מעל קבוצה קומפקטית אז מספר השורשים והקטבים בקבוצה הוא סופי.

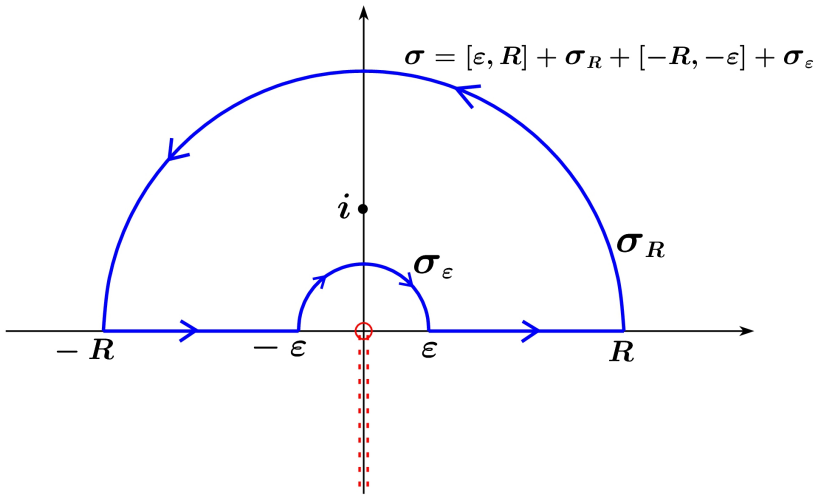
7.5 שימושים נוספים

בסעיף הנוכחי נציג דוגמאות יותר מתקדמות לשימוש במשפט השארית ועקרון הארגומנט.

דוגמה 19: הוכח כי

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}dx = 0, \qquad \int_0^{\infty} \frac{\ln^2 x}{1+x^2}dx = \frac{\pi^3}{8}$$

על ידי שימוש במסלול הנתון בשרטוט 7.6



איור 7.6: המסלול σ עוקף את הנקודה הסינגולרית $z=0$ ואת החריץ המתאים לענף $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$

פתרון: נציג הוכחה מתימטית של האינטגרל הראשון ללא שימוש בפונקציות מרוכבות,

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}dx = \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}dx + \int_1^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}dx$$

נפתור את האינטגרל השני על ידי ההצבה $x = \frac{1}{t}$

$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}dx = \int_1^0 \frac{-\ln t}{1+\frac{1}{t^2}} \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt = -\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2}dt$$

לכן

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}dx = \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}dx + \int_1^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}dx = \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}dx - \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}dx = 0$$

נגדיר פונקציה מרוכבת

$$f(z) = \frac{\log^2(z)}{1+z^2}$$

כאשר $\log(z)$ מבוסס על הענף $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ (אשר החריץ שלו, המצויר בצבע אדום בתרשים 7.6, אינו נחתך עם המסלול σ). נניח כי $R > 1$, $\varepsilon < 1$ ולכן הקוטב הפשוט של $z = i$ $f(z)$ נמצא בתוך המסלול σ. על פי משפט השארית

$$\oint_\sigma f(z)dz = \int_{[\varepsilon,R]} f(z)dz + \int_{\sigma_R} f(z)dz + \int_{[-R,-\varepsilon]} f(z)dz + \int_{\sigma_\varepsilon} f(z)dz$$

$$= 2\pi i \cdot \text{Res}(f, i) = 2\pi i \cdot \frac{\log^2(z)}{z+i}\Big|_{z=i}$$

$$= 2\pi i \cdot \frac{\log^2(i)}{2i} = 2\pi i \cdot \frac{(\pi i/2)^2}{2i} = -\frac{\pi^3}{4}$$

נעריך את הגודל של כל אחד מארבעת האינטגרלים

$$\left|\int_{\sigma_R} f(z)dz\right| \le \int_{\sigma_R} \frac{|z|^{\frac{1}{2}}}{|z|^2-1} \le \pi R \cdot \frac{R^{\frac{1}{2}}}{R^2-1} = \frac{\pi R^{\frac{3}{2}}}{R^2-1} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

באופן דומה האינטגרל על המעגל הקטן ישאף לאפס כאשר $\varepsilon \to 0$

$$\begin{aligned}\left|\int_{\sigma_\varepsilon} f(z)dz\right| &= \left|\int_{\sigma_\varepsilon} \frac{[\ln|z| + i\arg(z)]^2}{1+z^2}dz\right| \le \int_{\sigma_\varepsilon} \frac{|\ln|z| + i\arg(z)|^2}{|1+z^2|}dz \\ &\le \pi\varepsilon \cdot \frac{(\ln\varepsilon + 2\pi)^2}{1-\varepsilon^2} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0\end{aligned}$$

נותרו שני האינטגרלים על הקטעים הממשיים

$$\int_{[\varepsilon,R]} f(z)dz = \int_\varepsilon^R \frac{\ln^2 x}{1+x^2}dx$$

$$\begin{aligned}\int_{[-R,-\varepsilon]} f(z)dz &= \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{[\ln(-x)+i\pi]^2}{1+x^2}dx = \int_\varepsilon^R \frac{[\ln x + i\pi]^2}{1+x^2}dx \\ &= \int_\varepsilon^R \frac{\ln^2 x + 2\pi i \ln x - \pi^2}{1+x^2}dx \\ &= \int_\varepsilon^R \frac{\ln^2 x}{1+x^2}dx + 2\pi\int_\varepsilon^R \frac{\ln x}{1+x^2}dx - \pi^2\int_\varepsilon^R \frac{1}{1+x^2}dx\end{aligned}$$

לסיכם קיבלנו שכאשר $R\to\infty$, $\varepsilon\to 0$,

$$\begin{aligned}\oint_\sigma f(z)dz &= 2\int_0^\infty \frac{\ln^2 x}{1+x^2}dx + 2\pi\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}dx - \pi^2\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx \\ &= 2\int_0^\infty \frac{\ln^2 x}{1+x^2}dx + 2\pi\cdot 0 - \pi^2\cdot\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi^3}{4}\end{aligned}$$

לכן

$$2\int_0^\infty \frac{\ln^2 x}{1+x^2}dx = -\frac{\pi^3}{4} + \frac{\pi^3}{2} = \frac{\pi^3}{4}$$

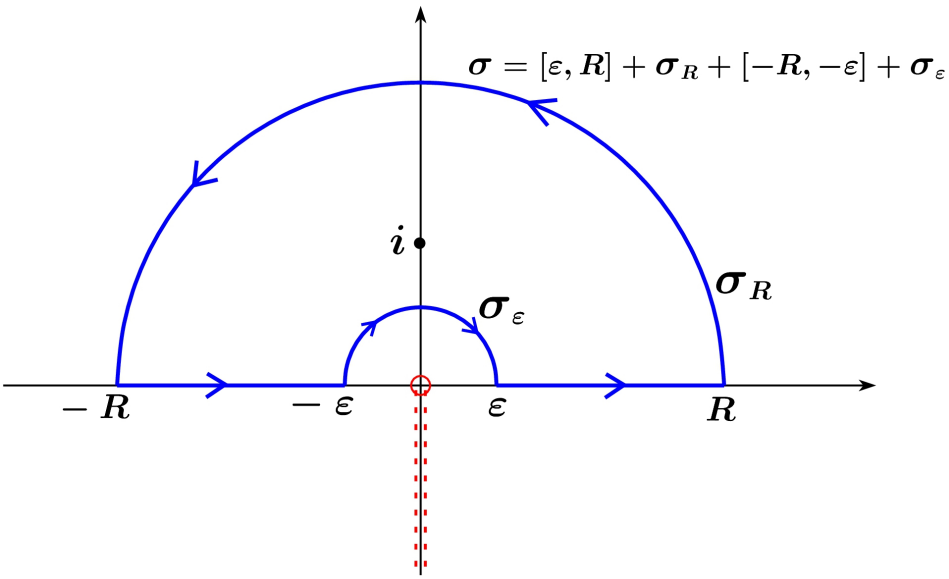
ולכן

$$\int_0^\infty \frac{\ln^2 x}{1+x^2}dx = \frac{\pi^3}{8}$$

דוגמה 20: הוכח כי לכל $0 < a < 2$

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x^2} = \frac{\pi}{2\sin\frac{\pi a}{2}}$$

על ידי שימוש במשפט השארית מעל המסלול שבשרטוט 7.7



איור 7.7: המסלול σ עוקף את הנקודה הסינגולרית $z=0$ ואת החריץ המתאים לענף $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$

פתרון: נגדיר פונקציה מרוכבת

$$f(z) = \frac{z^{a-1}}{1+z^2}$$

כאשר פונקציית הלוגריתם בביטוי $z^{a-1} = e^{(a-1)\log z}$ מבוססת על הענף $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ (אשר החריץ שלו, המצויר בצבע אדום בתרשים 7.7, אינו נחתך עם המסלול σ). נניח כי $R > 1$, $\varepsilon < 1$ ולכן הקוטב הפשוט $z = i$ של $f(z)$ נמצא בתוך המסלול σ. על פי משפט השארית

$$\begin{aligned}\oint_\sigma f(z)dz &= \int_{[\varepsilon,R]} f(z)dz + \int_{\sigma_R} f(z)dz + \int_{[-R,-\varepsilon]} f(z)dz + \int_{\sigma_\varepsilon} f(z)dz \\ &= 2\pi i \cdot \mathrm{Res}(f, i) = 2\pi i \cdot \frac{z^{a-1}}{z+i}\Big|_{z=i} \\ &= 2\pi i \cdot \frac{(2i)^{a-1}}{2i} = \pi e^{(a-1)\log(2i)} = \pi e^{\frac{(a-1)\pi i}{2}}\end{aligned}$$

נעריך את הגודל של כל אחד מארבעת האינטגרלים

$$\left|\int_{\sigma_R} \frac{z^{a-1}}{1+z^2}dz\right| \le \int_{\sigma_R} \frac{|z|^{a-1}}{|z|^2-1} \le \pi R \cdot \frac{R^{a-1}}{R^2-1} = \frac{\pi R^a}{R^2-1} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

באופן דומה האינטגרל על המעגל הקטן ישאף לאפס כאשר $\varepsilon \to 0$

$$\begin{aligned}\left|\int_{\sigma_\varepsilon} \frac{z^{a-1}}{1+z^2}dz\right| &= \int_{\sigma_\varepsilon} \frac{\varepsilon^{a-1}}{|1+z^2|}dz \le \int_{\sigma_\varepsilon} \frac{\varepsilon^{a-1}}{1-\varepsilon^2}dz \\ &\le \pi\varepsilon \cdot \frac{\varepsilon^{a-1}}{1-\varepsilon^2} = \frac{\pi\varepsilon^a}{1-\varepsilon^2} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0\end{aligned}$$

נותרו שני האינטגרלים על הקטעים הממשיים

$$\int_{[\varepsilon,R]} \frac{z^{a-1}}{1+z^2}dz = \int_\varepsilon^R \frac{x^{a-1}}{1+x^2}dx \qquad (x \in \mathbb{R})$$

$$\begin{aligned}\int_{[-R,-\varepsilon]} \frac{z^{a-1}}{1+z^2}dz &= \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{(a-1)(\ln(-x)+i\pi)}}{1+x^2}dx = \int_\varepsilon^R \frac{e^{(a-1)(\ln(x)+i\pi)}}{1+x^2}dx \\ &= \int_\varepsilon^R \frac{x^{a-1}\cdot e^{(a-1)\pi i}}{1+x^2}dx = e^{(a-1)\pi i}\int_\varepsilon^R \frac{x^{a-1}}{1+x^2}dx\end{aligned}$$

לסיכם קיבלנו שכאשר $R \to \infty$, $\varepsilon \to 0$,

$$\begin{aligned}\oint_\sigma \frac{z^{a-1}}{1+z^2}dz &= \int_\varepsilon^R \frac{x^{a-1}}{1+x^2}dx + e^{(a-1)\pi i}\int_\varepsilon^R \frac{x^{a-1}}{1+x^2}dx \\ &= \left(1+e^{(a-1)\pi i}\right)\int_\varepsilon^R \frac{x^{a-1}}{1+x^2}dx = \pi e^{\frac{(a-1)\pi i}{2}}\end{aligned}$$

לכן

$$\int_\varepsilon^R \frac{x^{a-1}}{1+x^2}dx = \frac{\pi e^{\frac{(a-1)\pi i}{2}}}{1+e^{(a-1)\pi i}} = \frac{\pi}{e^{\frac{-(a-1)\pi i}{2}}+e^{\frac{(a-1)\pi i}{2}}} = \frac{\pi}{2\cos\frac{(a-1)\pi}{2}} = \frac{\pi}{2\sin\frac{\pi a}{2}}$$

דוגמה 21: **א.** מצא את הקטבים (כולל סדר) של הפונקציה $f(z) = \frac{1}{(e^z+e^{-z})^3}$.
ב. חשב את השארית של הפונקציה בכל אחד מהקטבים שמצאת בסעיף הקודם.
ג. חשב את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(e^x+e^{-x})^3}$.

פתרון:

א. הקטבים של $f(z)$ הם השורשים של המשוואה

$$e^z + e^{-z} = 0$$

על ידי הכפלת שני האגפים ב־ e^z נקבל $e^{2z}+1=0$, ולכן

$$e^{2z}=-1=e^{(2k+1)\pi i},\quad k\in\mathbb{Z}$$

ונקבל אינסוף קטבים: $z=\frac{(2k+1)\pi i}{2}$. אותנו יעניינו רק שני הקטבים הבאים: $z_1=\frac{\pi i}{2}$, $z_2=-\frac{\pi i}{2}$.

ב. נטפל בקוטב z_1 בלבד מאחר והוא רלבנטי לסעיף הבא. הטיפול בקוטב השני דומה. על פי טענה 7.14 יספיק למצוא מספר טבעי m כך שקיים הגבול $\lim_{z\to z_1}(z-z_1)^m f(z)\neq 0$. לא קשה לנחש שהמספר $m=3$ יתאים. נשתמש בכלל לופיטל לחישוב הגבול

$$\begin{aligned}
&\lim_{z\to z_1}\frac{(z-z_1)^3}{(e^z+e^{-z})^3}=\lim_{z\to z_1}\frac{3(z-z_1)^2}{3(e^z+e^{-z})^2(e^z-e^{-z})}\\
&=\lim_{z\to z_1}\frac{6(z-z_1)}{6(e^z+e^{-z})(e^z-e^{-z})^2+3(e^z+e^{-z})^3}\\
&=\lim_{z\to z_1}\frac{6}{6(e^z-e^{-z})^3+12(e^z+e^{-z})^2(e^z-e^{-z})+9(e^z+e^{-z})^2(e^z-e^{-z})}\\
&=\frac{6}{6\cdot(\frac{i}{2}+\frac{i}{2})+0+0}=\frac{6}{12i}=-\frac{i}{2}
\end{aligned}$$

בשלב האחרון השתמשנו בשוויון $e^{z_1}+e^{-z_1}=0$ ובשוויון $e^{z_1}-e^{-z_1}=2i$.

קיבלנו שהפונקציה $g(z)=(z-z_1)^3f(z)$ מקיימת את תנאי טענה 7.14 ולכן

$$\operatorname{Res}(f,z_1)=\lim_{z\to z_1}\frac{g(2)(z)}{2!}$$

נחשב את $g^{(2)}(z)$

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{(z-z_1)^3}{(e^z+e^{-z})^3}\right]=\frac{d}{dz}\left[\frac{3(z-z_1)^2(e^z+e^{-z})^3-3(z-z_1)^3(e^z+e^{-z})^2(e^z-e^{-z})}{(e^z+e^{-z})^6}\right]\\
&=\frac{d}{dz}\left[\frac{3(z-z_1)^2}{(e^z+e^{-z})^3}-\frac{3(z-z_1)^3(e^z-e^{-z})}{(e^z+e^{-z})^4}\right]\\
&=\frac{3(z-z_1)}{(e^z+e^{-z})^3}\left[\frac{4(z-z_1)^2(e^z-e^{-z})^2}{(e^z+e^{-z})^2}-(z-z_1)^2-\frac{6(z-z_1)(e^z-e^{-z})}{e^z+e^{-z}}+2\right]
\end{aligned}$$

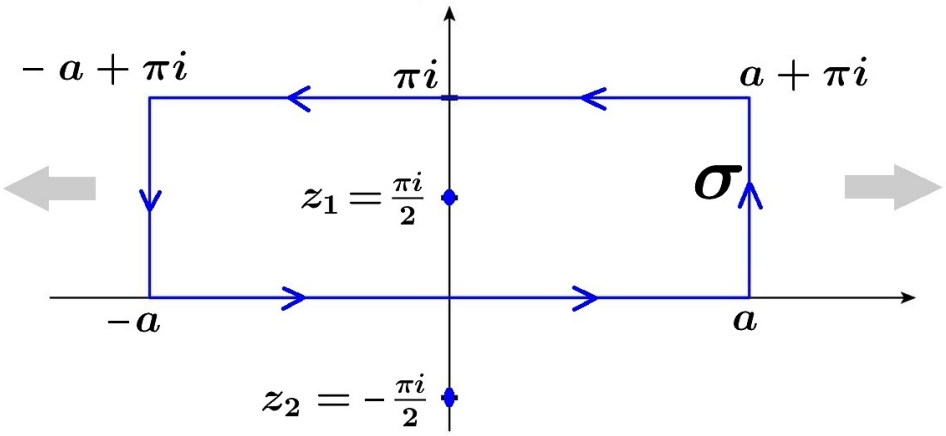
עם קצת טרחה אפשר לקבל

$$\lim_{z\to z_1}\frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{(z-z_1)^3}{(e^z+e^{-z})^3}\right]=-\frac{i}{8}$$

ולכן

$$\mathrm{Res}(f,z_1)=\lim_{z\to z_1}\frac{g(2)(z)}{2!}=-\frac{i}{16}$$

ג. נעשה שימוש במשפט השארית ובמסלול מלבני σ המתוארת בשירטוט 7.8.



איור 7.8: מסלול מלבני סביב הקוטב $z_1=\frac{\pi i}{2}$. כאשר a שואף לאינסוף מקבלים רצועה אינסופית בגובה π

יהי $a>0$ ממשי.

$$\sigma=[-a,a]+[a,a+\pi i]+[a+\pi i,-a+\pi i]+[-a+\pi i,-a]$$

נסמן את ארבעת האינטגרלים לאורך המסלול σ על ידי

$$I_1=\int_{-a}^{a}f(z)dz,\quad I_2=\int_{a}^{a+\pi i}f(z)dz,\quad I_3=\int_{a+\pi i}^{-a+\pi i}f(z)dz,\quad I_4=\int_{-a+\pi i}^{a}f(z)dz$$

לכן

$$\oint_{\sigma}f(z)dz=I_1+I_2+I_3+I_4=2\pi i\,\mathrm{Res}(f,z_1)=2\pi i\cdot-\frac{i}{16}=\frac{\pi}{8}$$

נחשב מהו הערך של כל אינטגרל כאשר $a\to\infty$

$$I_1=\int_{-a}^{a}f(z)dz=\int_{-a}^{a}\frac{dx}{(e^x+e^{-x})^3}\quad\xrightarrow[a\to\infty]{}\quad\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(e^x+e^{-x})^3}$$

האינטגרל לאורך הדופן הימנית של המלבן: $z=a+ti\ ,t\in[0,\pi]$

$$I_2=\int_{a}^{a+\pi i}\frac{dz}{(e^z+e^{-z})^3}=\int_{a}^{a+\pi i}\frac{dt}{(e^{a+ti}+e^{-a-ti})^3}=\int_{a}^{a+\pi i}\frac{dt}{(e^ae^{ti}+e^{-a}e^{-ti})^3}$$

על פי אי-שוויון המשולש

$$|e^ae^{ti}+e^{-a}e^{-ti}|\geq|e^ae^{ti}|-|e^{-a}e^{-ti}|=e^a-e^{-a}$$

ולכן באופן דומה נוכיח שגם האינטגרל לאורך הדופן השמאלית של המלבן שואף לאפס

$$|I_2| \le \int_a^{a+\pi i} \left|\frac{1}{(e^a e^{ti}+e^{-a}e^{-ti})^3}\right| dt \le \int_a^{a+\pi i} \frac{1}{(e^a-e^{-a})^3} dt = \frac{a}{(e^a-e^{-a})^3} \xrightarrow[a\to\infty]{\text{לופיטל}} 0$$

באופן דומה נוכיח שגם האינטגרל לאורך הדופן השמאלית של המלבן שואף לאפס

$$|I_4| \le \int_{-a+\pi i}^{-a} \left|\frac{1}{(e^{-a}e^{ti}+e^{a}e^{-ti})^3}\right| dt \le \int_{-a}^{-a+\pi i} \frac{1}{(e^a-e^{-a})^3} dt = \frac{a}{(e^a-e^{-a})^3} \xrightarrow[a\to\infty]{\text{לופיטל}} 0$$

נשאר לבדוק את האינטגרל לאורך הדופן העליונה של המלבן: $z = t + \pi i \ , t \in [\pi, -\pi]$

$$I_3 = \int_{a+\pi i}^{-a+\pi i} \frac{dz}{(e^z+e^{-z})^3} = \int_a^{-a} \frac{dt}{(e^{t+\pi i}+e^{-t-\pi i})^3} = \int_a^{-a} \frac{dt}{(-e^t-e^{-t})^3} = \int_{-a}^{a} \frac{dt}{(e^t+e^{-t})^3} = I_1$$

לסיכום, קיבלנו כי

$$\frac{\pi}{8} = \lim_{a\to\infty}[I_1+I_2+I_3+I_4] = \lim_{a\to\infty} 2\int_{-a}^{a} \frac{dt}{(e^t+e^{-t})^3} = 2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(e^t+e^{-t})^3}$$

לכן

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(e^t+e^{-t})^3} = \frac{\pi}{16}$$

7.6 כלי תוכנה ואפליקציות

הרשימה הבאה מפרטת מקורות עבור יישומונים (אפליקציות עבור טלפון סלולרי), וכלי תוכנה הזמינים ברשת, בהן ניתן להיעזר בכדי לשרטט גרפים של פונקציות ומשוואות, לבצע חישובים סימבוליים כגון חישוב אינטגרלים ופתרון משוואות.

- GeoGebra Graphing Calculator
- GeoGebra Neat Examples
- Desmos Graphing Calculator
- Desmos - Android App
- 3D Plot Grapher - Android App
- CalcPlot3D
- 3D Surface Plotter
- 3D Surface Plotter - Android App
- WolframAlpha Computational Intelligence
- Symbolab solver: Algebra, Calculus, Trigonometry, Equations Solver

- **Matlab Online**
- **Sympy Live (Python Programming)**
- **Plotly Matplotlib Library**
- **MIT Tech tools for teaching and learning**

זוהי רשימה חלקית בלבד וניתן למצוא ברשת האינטרנט עוד המון כלי תוכנה ויישומונים מעולים עבור לימוד חשבון דיפרנציאלי, פונקציות מרוכבות, ומתמטיקה בכלל. נשמח מאוד לקבל הצעות נוספות שראוי לכלול ברשימה הנ"ל.

מטרת הסעיף הנוכחי היא לתת טעימה קטנה מתוך השפע הגדול של כלי התוכנה וקוד הזמינים ברשת האינטרנט בעבור פתרון בעיות שונות בנושא פונקציות מרוכבות. במידת הצורך, ניתן למצוא כלי תוכנה וחבילות קוד נוספים, כמעט בכל אחד מהנושאים שכיסינו בחוברת, באמצעות מיומנויות חיפוש בשורת הפקודה של גוגל.

למשתמשי שפת Python מומלץ להשתמש בשרת האינטרנט **SymPy** אליו ניתן להגיע דרך הקישור הבא:

http://live.sympy.org

דוגמה 22: נחשב למשל את האינטגרל שבדוגמא 14 ובתרגיל 10 שבסוף הפרק. נקבל אומנם פתרון סופי בלבד, אבל זה מועיל בכדי לאמת את הפתרון המלא.

```
from sympy import *
t = Symbol('t')
f1 = 1/(5+4*cos(t))
integrate(f1, (t,0,pi))
=> pi/3
f2 = 1/(13+5*cos(t))
integrate(f2, (t,0,2*pi))
=> pi/6
```

דוגמה 23: חבילת **SymPy** מאפשרת גם חישוב סימבולי של אינטגרלים מוכללים. נחשב למשל את האינטגרלים מדוגמאות 16, 17.

```
from sympy import *
x = Symbol('x')
```

 © Samy Zafrany (mail@samyzaf.com)

```
f1 = 1/(x**4+4)
integrate(f1, (x,0,oo))
=> pi/8
f2 = sin(x)/(x**2+4*x+5)
Integral(f2, (x, -oo, oo)).evalf()
=> -1.0509
float(-pi*sin(2)/np.e)
=> -1.0508999052769497
```

דוגמה 24: דוגמאות נוספות מתוך התרגילים שבסוף הפרק

```
from sympy import *
f = 1/((x**2+1)*(x**2+4))
integrate(f, (x,-oo,oo))
=> pi/6
f = (x**4+1)/(x**6 + 1)
integrate(f, (x,0,oo))
=> 2*pi/3
f = (x*sin(2*x))/(x**2 + 9)
integrate(f, (x,0,oo))
=> sqrt(pi)*(-sqrt(pi)*sinh(6) + sqrt(pi)*cosh(6))/2
r = integrate(f, (x,0,oo))
simplify(r)
=> pi*exp(-6)/2
f = (1-cos(x))/(x**2)
integrate(f, (x,0,oo))
=> pi/2
f = sin(x**2)
integrate(f, (x,0,oo))
=> sqrt(2)*sqrt(pi)/4
f = cos(x**2)
integrate(f, (x,0,oo))
=> sqrt(2)*sqrt(pi)/4
```

דוגמה 25: חבילת **SymPy** מאפשרת גם חישוב שורשים של פולינומים מעל שדה המספרים המרוכבים:

```
f = z**6-5*z**4+3*z**2-1
roots = solve(f, z)
[abs(r)<1 for r in roots]
=> [False, False, True, True, True, True]
[complex(r) for r in roots]
=>  [(-2.0893132875215477+0j),
     (2.0893132875215477+0j),
     (-0.6308768323858478+0.2839376416543773j),
     (-0.6308768323858478-0.2839376416543773j),
     (0.6308768323858478+0.2839376416543773j),
     (0.6308768323858478-0.2839376416543773j)]
=> 4 roots in disk |z|<1
f = z**9 +5*z**2 + 3
roots = solve(f, z)
Roots = [complex(r) for r in roots]
f = z**9 +5*z**2 + 3
[r.real>0 and r.imag>0 for r in Roots]
=> [False, False, False, False, False, False, True, False, True]
=> Only 2 root in quadrant I
```

דוגמה 26: בכדי לחשב שארית, קטבים, ופירוק לשברים חלקיים של פונקציה רציונלית $\frac{P(z)}{Q(z)}$ יש להשתמש בחבילת **scipy**. פולינום $P(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n$ מיוצג על ידי מערך $(a_0,a_1,\ldots,a_n)$. למשל הפולינום z^2+1 מיוצג על ידי המערך $(1,0,1)$, והפולינום z^4+1 מיוצג על ידי המערך $(1,0,0,0,1)$. לכן חישוב השאריות והקטבים של הפונקציה הרציונלית $\frac{z^2+1}{z^4+1}$ יתבצע על ידי הקוד הבא

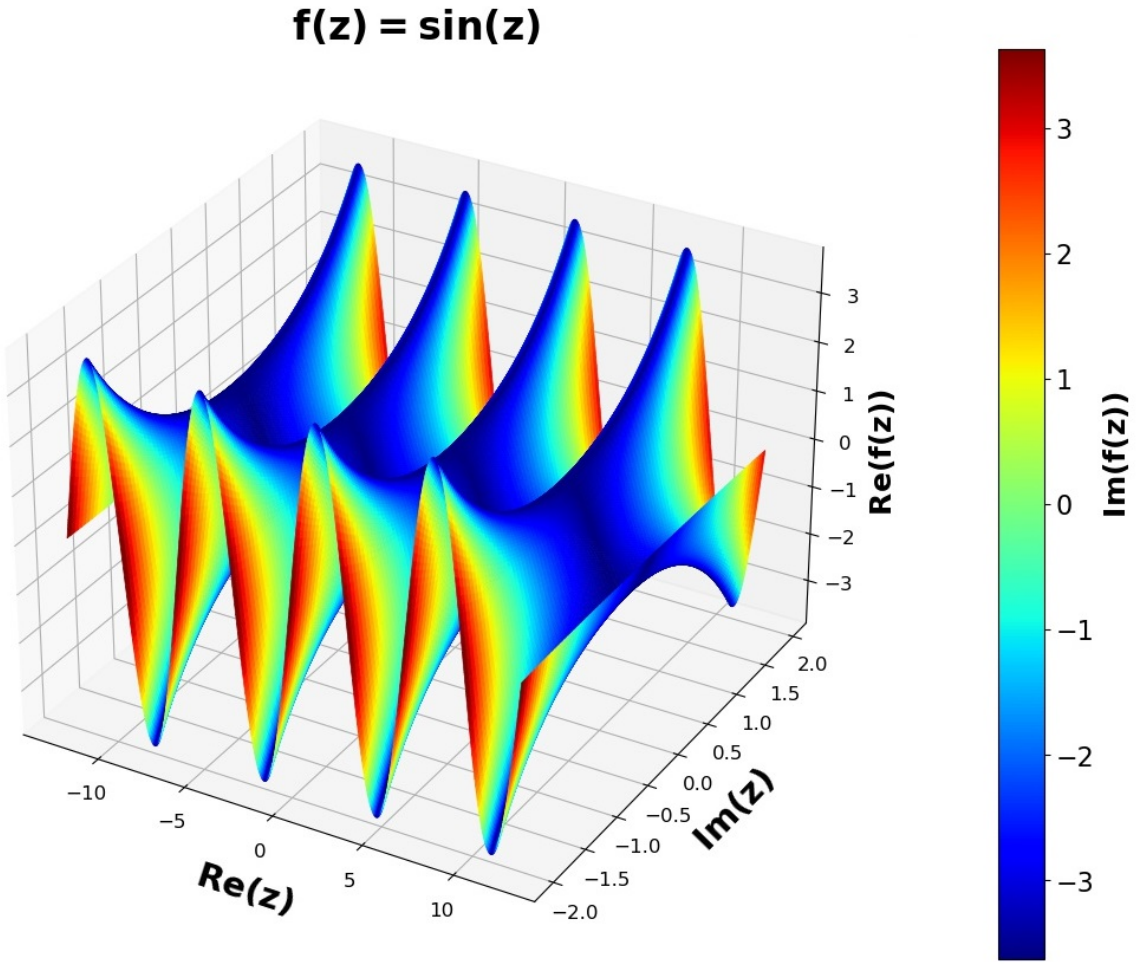
```
from scipy.signal import residue
residue((1,0,1), (1,0,0,0,1))
=>
(array([-5.88784672e-17-0.35355339j, -5.88784672e-17+0.35355339j,
         9.81307787e-17-0.35355339j,  9.81307787e-17+0.35355339j]),
 array([ 0.70710678+0.70710678j,  0.70710678-0.70710678j,
```

 © Samy Zafrany (mail@samyzaf.com)

```
       -0.70710678+0.70710678j, -0.70710678-0.70710678j]),
 array([], dtype=float64))
```

התוצאה היא שלושה מערכים: מערך ראשון הוא רשימת השאריות המתאימות לכל אחד מהקטבים. המערך השני הוא רשימת הקטבים, והמערך השלישי הוא הפולינום שמתקבל כמנת החלוקה. מהתוצאה אנחנו למדים כי יש ארבעה קטבים פשוטים, ושמנת החלוקה היא אפס, כי מעלת הפולינום שבמונה קטנה ממעלת הפולינום במכנה.

דוגמה 27: באמצעות החבילה הגרפית **matplotlib** ניתן לשרטט גרפים ארבע-מימדיים של פונקציות מרוכבות. ציר-x וציר-y מייצגים את החלק הממשי והמדומה של הארגומנט $z = x + iy$. ציר-z מייצג את החלק הממשי של ערך הפונקציה $\mathrm{Re}\,(f(z))$, והחלק המדומה $\mathrm{Im}\,(f(z))$ מיוצג על ידי צבע מתוך מפת צבעים שניתן לקבוע מראש. בשרטוט 7.9 רואים כיצד נראה הגרף של $f(z) = \sin(z)$.



איור 7.9: גרף "ארבע-מימדי" של $f(z) = \sin z$, "המימד הרביעי" $\mathrm{Im}\,(f(z))$ מיוצג על ידי צבע

הקוד Python הדרוש ליצירת הגרף הוא

```
import matplotlib.pyplot as plt # graphing module
```

 © Samy Zafrany (mail@samyzaf.com)

```
from matplotlib import cm       # colormap module
import numpy as np              # numeric module
fig = plt.figure()
ax = fig.gca(projection='3d')
a = 4 ; b = 2 ; dx = 0.05 ; dy = 0.05
X = np.arange(-a*3.14, a*3.14, dx)
Y = np.arange(-b, b, dy)
X, Y = np.meshgrid(X, Y)
R = np.sin(X + 1j*Y)
Z = R.real
T = R.imag
N = np.abs(T/T.max())  # normalize 0..1
plt.title(' $\mathbf{f(z)=sin(z)}$', fontsize=18)
plt.xlabel(' $\mathbf{Re(z)}$', fontsize=18)
plt.ylabel(' $\mathbf{Im(z)}$', fontsize=18)
surf = ax.plot_surface(
    X, Y, Z, rstride=1, cstride=1,
    facecolors=cm.jet(N),
    linewidth=0.5, edgecolors='0.5',
    antialiased=True, shade=False,
)
m = cm.ScalarMappable(cmap=cm.jet, norm=surf.norm)
m.set_array(T)
p = plt.colorbar(m)
p.set_label(' $\mathbf{Im(f(z))}$', fontsize=18)
fig.set_size_inches(12,10)
plt.savefig('sine1.jpg', bbox_inches='tight')
plt.show()
```

דוגמאות נוספות של קוד Python עבור פונקציות מרוכבות ניתן למצוא ברשת האינטרנט על ידי הקלדת מילים מתאימות בשורת החיפוש של גוגל. בתחילת הסעיף הצגנו כמה דוגמאות לתוכנות ואפליקציות לביצוע חישובים סימבוליים, שמתפתחות ומתעדכנות על בסיס יומי, ולכן רק חיפוש טוב עשוי להניב תוצאות מעודכנות.

7.7 תם אך לא נשלם

החוברת יצאה לאור בחודש מאי 2021, ומאז עברה לא מעט שינויים ותיקונים. תודה לכל התלמידים ששלחו הערות והצעות שיפור לגירסאות המוקדמות של החוברת. ככל הנראה יידרש עוד מאמץ לשיפור ושכלול החוברת. נשמח מאוד לקבל הערות, תיקונים, והצעות שיפור (דואר אלקטרוני נמצא בתחתית כל דף). פתרונות מלאים של תרגילים יתקבלו בשמחה ובברכה, ובמידה ויצטברו לכדי כמות משביעת רצון, יתפרסמו בחוברת פתרונות מתאימה.

תרגילים לפרק 7

1. תהי $f(z)$ פונקציה אנליטית בתחום D, ובעלת מספר סופי של שורשים בתחום D (הספירה על פי ריבוי). הוכח כי קיימת פונקציה אנליטית $g(z)$ ללא שורשים בתחום D, ופולינום $P(z)$, כך ש־$f(z)=g(z)P(z)$, עבור כל $z\in D$.

2. תהי $f(z)$ פונקציה אנליטית בתחום D, ותהי $z_0\in D$. נתון כי $f^{(n)}(z_0)=0$ לכל $n\geq 1$. הוכח כי f היא פונקציה קבועה על D.

3. תהי $f(z)$ פונקציה שלמה המקיימת $|f(z)|\leq a+b|z|^n$, עבור כל $z\in\mathbb{C}$. הוכח כי f היא פולינום ממעלה קטנה או שווה n.

4. תהי $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}_\infty$ פונקציה מרומורפית בעלת מספר סופי של קטבים, ונניח כי קיימים קבועים ממשיים $c,R>0$, ומספר טבעי n, כך ש־$|f(z)|\leq c|z|^n$, לכל $|z|>R$. הוכח כי f חייבת להיות פונקציה רציונלית.

הדרכה: יש לשים לב כי טווח הפונקציה הוא $\mathbb{C}_\infty$, ולכן בנקודות קוטב z, $f(z)=\infty$. נסה להיעזר בתרגיל 3.

5. לגבי כל אחת מהפונקציות הבאות, מצא את הנקודות הסינגולריות שלה ואת הסוג שלהן. רשום את החלק העיקרי של הפונקציה בכל אחת מהנקודות הסינגולריות שמצאת, וחשב את השארית בכל נקודה סינגולרית

א. $\frac{1}{\cos^2 z}$ **ב.** $(1-z^3)e^{1/z}$ **ג.** $\frac{\sin z}{z^{2021}}$ **ד.** $\frac{e^z}{1-z^2}$ **ה.** $\frac{1}{\sin^2 z}$

ו. $\frac{1-\cos z}{z^2}$ **ז.** $\frac{e^z}{z(z-1)^2}$ **ח.** $(1-z^2)\sin\frac{1}{z}$ **ט.** $\frac{e^z}{z^{2021}}$ **י.** $\frac{\cos z}{z^2-z^3}$

6. תהי $f(z)=\frac{\sin z}{\cos^3 z-1}$. מצא את סוג הסינגולריות של הנקודה $z=0$ וחשב את השארית של f בנקודה $z=0$.

7. הוכח כי הנקודה $z=0$ היא נקודה סינגולרית לא-מבודדת של $f(z)=\dfrac{1}{\sinh^2(\frac{1}{z})}$.

8. הוכח כי הטור $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(n+z)}$ מתכנס לפונקציה מרומורפית, מצא את קבוצת הקטבים שלה, ואת הסדר של כל קוטב.

9. נתונה הפונקציה $f(z)=\frac{1}{(2\cos z-2+z^2)^2}$. הוכח כי $z=0$ הוא קוטב של f, ומצא את הסדר שלו.

הדרכה: עדיף לעבוד עם הפונקציה $1/f(z)$.

10. חשב את האינטגרל $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dt}{13+5\cos t}$.

תשובה: $\frac{\pi}{6}$



11. תהי z_0 נקודה סינגולרית מבודדת של $f(z)$ אשר אינה סליקה. הוכח כי z_0 נקודה סינגולרית עיקרית של $e^{f(z)}$.

12. תהי z_0 נקודה סינגולרית מבודדת של $f(z)$. ידוע כי הפונקציה $g(z)=(z-z_0)^nf(z)$ חסומה בסביבה נקובה של z_0. הוכח כי z_0 היא נקודה סינגולרית סליקה של f או קוטב מסדר n של f.



13. הוכח: אם z_0 קוטב מסדר n של $f(z)$, אז z_0 קוטב מסדר $n+1$ של $f'(z)$.



14. תהי $f(z)$ פונקציה אנליטית ב־$\mathbb{C}$ פרט למספרים הטבעיים $z=n$. נתון כי f חסומה. הוכח כי f חייבת להיות פונקציה קבועה.

רמז: תרגיל 12. גם טענה 7.10 בעמוד 294 עשויה לעזור.



15. האם קיימת פונקציה אנליטית המקיימת $f(\frac{1}{2n})=f(\frac{1}{2n+1})=\frac{1}{2n}$ לכל מספר טבעי n?

הדרכה: עבור שוב על תרגיל 7.1 בתחילת הפרק.



16. תן דוגמא לפונקציה $f(z)$ אשר יש לה נקודה סינגולרית סליקה בנקודה $z=0$, קוטב מסדר 5 בנקודה $z=-i$, ונקודה סינגולרית עיקרית בנקודה $z=3$.



17. תן דוגמא לפונקציה $f(z)$ אשר יש לה קוטב מסדר 2 בנקודה $z=-i$, ושתי נקודות סינגולריות עיקריות בנקודה $z=i$, ובנקודה $z=2$.

18. הוכח או הפרך על ידי דוגמא נגדית: אם z_0 קוטב של $f(z)$, ונקודה סינגולרית עיקרית של $g(z)$, אז z_0 היא קוטב של $f(z)g(z)$.

19. הוכח או הפרך על ידי דוגמא נגדית: אם $f(z)$ פונקציה אנליטית בעיגול הסגור הנקוב D: $0 < |z| \leq 1$. ואם הפונקציה $z^n f(z)$ אינה חסומה ב־D, עבור כל מספר טבעי n, אז $z = 0$ היא נקודה סינגולרית עיקרית של f.

20. תהי $f(z)$ פונקציה שלמה. נתון כי לכל נקודה $z \in \mathbb{C}$ קיים טבעי n כך ש־$f^{(n)}(z) = 0$. הוכח כי f היא פולינום.

הדרכה: הראה כי בתוך עיגול היחידה יש אינסוף נקודות שונות z_k אשר $f^{(n)}(z_k) = 0$ עבור אותו מספר טבעי n. יש להשתמש בעקרון שובך היונים של תורת הקבוצות. יש להעזר במשפט הזהות (משפט 7.6).

21. תהי $f(z)$ פונקציה שלמה המקיימת $f(n) = n$ לכל מספר טבעי n, ובנוסף

$$\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = \infty$$

הוכח כי $f(z) = z$.

22. הוכח כי עבור כל זוג ממשיים $a, b \in \mathbb{R}$, המקיימים $a > |b|$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b\cos\theta} = \frac{2\pi}{a^2 - b^2}$$

23. אם $f(z)$ פונקציה שלמה שאין לה גבול באינסוף, אז $z = 0$ היא נקודה סינגולרית עיקרית של הפונקציה $g(z) = f(\frac{1}{z})$.

הדרכה: יהי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ הטור טיילור של $f(z)$ סביב הנקודה $z = 0$. אזי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}$ הוא הטור לורן של $f(\frac{1}{z})$. אי-קיום גבול באינסוף גורר כי $f(z)$ אינה פולינום (ראה טענה 3.18 בעמוד 111). לכן אינסוף מקדמי a_n אינם מתאפסים. ראה גם טענה 7.9 בעמוד 294.

24. תהי $f : \mathbb{C} - \overline{\mathbb{D}}(0, r) \to \mathbb{C}$ פונקציה אנליטית מעל המישור המחורר $|z| > r$. נאמר כי הנקודה $z = \infty$ היא שורש בעל ריבוי m של f, אם הנקודה $z = 0$ היא קוטב מסדר m של הפונקציה $g(z) = f(1/z)$. הוכח כי במקרה כזה הטור לורן של f סביב $z = 0$ הוא טור חזקות שליליות בלבד $\sum_{n=-m}^{-\infty} a_n z^n$, כך ש־$a_{-m} \neq 0$, ושהטור מתכנס על כל המישור המחורר $|z| > r$.

הארה: תרגיל זה ביחד עם תרגיל 82 מאירים דואליות מעניינת בין הנקודה $z = 0$ והנקודה $z = \infty$. במובן עמוק, שתי נקודות אלה הן תמונת ראי אחת של השניה באמצעות פונקציית "השיקוף" $1/z$. במובן הזה, טור לורן הוא "תמונת ראי" של טור מקלורן, וקוטב הוא תמונת ראי של שורש. מומלץ לפתור שני תרגילים אלה בסמיכות.

25. הוכח: לא קיימת פונקציה אנליטית $f(z)$ בעיגול היחידה הנקוב $0 < |z| < 1$ כך שלנגזרת שלה $f'(z)$ יש קוטב פשוט בנקודה $z = 0$.

הדרכה: פתור קודם את תרגיל 37 בפרק 4.

26. הוכח כי $\oint_{|z|=4} \frac{e^z\,dz}{(z^2+\pi^2)^2} = \frac{i}{\pi}$.

27. חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\oint_{|z|=3} \frac{e^z}{\sinh z}dz$ **ב.** $\oint_{|z|=3} \frac{e^z}{(z+2)^2\sin z}dz$ **ג.** $\oint_{|z-\pi|=1} \frac{e^z}{\sin z\cdot\cos z}dz$

28. חשב את האינטגרל

$$\oint_{|z|=2} \frac{z^{2021}\,dz}{z^{2021}+z^{2020}+z^{2019}+1}$$

הדרכה: הוכח כי כל השורשים של $z^{2021}+z^{2020}+z^{2019}+1$ נמצאים בתוך המעגל $|z|=2$. לכן אם נחליף את המסלול $|z|=2$ באינטגרל בכל מסלול $|z|=R$, $R>2$, ערך האינטגרל לא יישתנה. יש לתת ל־R לשאוף לאינסוף.

29. הוכח כי

$$\oint_{|z|=1} e^{\frac{z+1}{z}}\,dz = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!(n+1)!}$$

30. העזר במשפט השארית בכדי לספק פיתרון יותר קצר לתרגיל 39 בפרק 6.

רמז: הוכח כי $\operatorname{Res}\left(\frac{1}{f(z)-f(z_0)},z_0\right)=\frac{1}{f'(z_0)}$.

31. הוכח כי $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{\pi}{6}$.

הדרכה: שימוש במשפט השארית על חצי מעגל עליון. יש שני קטבים פשוטים בחצי המישור העליון: $z=i,2i$. האינטגרל על חצי המעגל העליון שואף לאפס על פי הערכה פשוטה של האינטגרל הקווי.

32. נניח שלפונקציה מרומורפית $f(z)$ יש נקודה סינגולרית מבודדת z_0. הוכח כי z_0 היא גם נקודה סינגולרית מבודדת של $f'(z)$, וחשב את $\operatorname{Res}(f',z_0)$.

33. חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x^4+1}dx$ **ב.** $\int_0^{\infty}\frac{x^4+1}{x^6+1}dx$ **ג.** $\int_0^{\infty}\frac{x^2}{x^6+1}dx$

ד. $\int_0^{\infty}\frac{x\sin 2x}{9+x^2}dx$ **ה.** $\int_0^{\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}dx$ **ו.** $\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{x}(x+1)(x+4)}dx$

תשובה: ב. $\frac{2\pi}{3}$, ג. $\frac{\pi}{6}$, ד. $\frac{\pi}{2e^6}$, ה. $\frac{\pi}{2}$, ו. $\frac{\pi}{6}$

34. הוכח כי $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}dx = \sqrt{2}\pi$.

35. חשב את זוג האינטגרלים $\int_0^{\infty}\sin(x^2)\,dx$, $\int_0^{\infty}\cos(x^2)\,dx$.

הדרכה: חשב את האינטגרל $\oint_\sigma e^{iz^2}dz$ על היקף הגיזרה $0\le\operatorname{Arg}(z)\le\frac{\pi}{4}$, $|z|\le r$. **תשובה:** $\frac{\sqrt{2}\sqrt{\pi}}{4}$.

36. הוכח כי לכל מספר טבעי n

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=n}\frac{dz}{z^2\sin z}=\frac{1}{6}+2\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k^2\pi^2}$$

הסק מכך את נוסחת הסכום הבאה

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$$

37. נתונה הפונקציה $f(z)=\dfrac{\cot\pi z}{z^2+a^2}$, $a\neq 0$ ממשי.

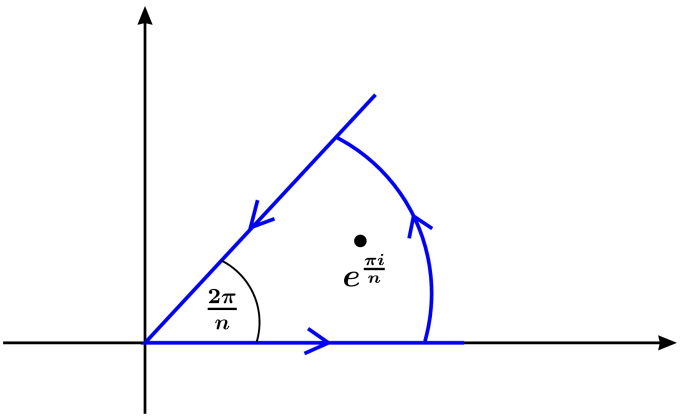
א. מצא את הקטבים של הפונקציה

ב. הוכח כי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+a^2}=\frac{\pi}{2a}\coth(\pi a)-\frac{1}{2a^2}$

הדרכה: $f(z)=\frac{\cos\pi z}{(z^2+a^2)\sin\pi z}$. יש אינסוף קטבים. הפעל את משפט השארית על מלבן $[-N-0.5,N+0.5]\times[-b,b]$ שמקיף מספר סופי של קטבים ונפח אותו לאינסוף. **תשובה: א.** $\pm a$, $n\in\mathbb{Z}$, קטבים פשוטים.

38. חשב את האינטגרל $\int_0^\infty\frac{dx}{1+x^n}$ עבור כל מספר טבעי $n\geq 2$.

הדרכה: השתמש במסלול המתואר בשרטוט 7.10. **תשובה:** $\frac{\pi/n}{\sin(\pi/n)}$.



איור 7.10: המסלול σ עבור תרגיל 38

39. חשב את האינטגרל

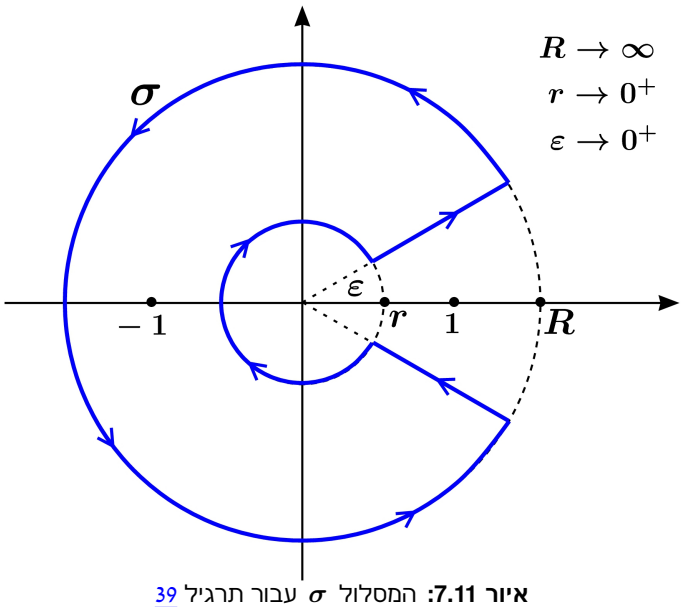
$$\int_0^\infty\frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$$

תשובה: π

הדרכה: השתמש במסלול σ המתואר בשרטוט 7.11, כאשר $0<r<1<R$. יש לחשב אינטגרל של $f(z)=\frac{1}{z^{1/2}(1+z)}$ לאורך המסלול σ. יש לבחור ענף אנליטי של $z^{1/2}$ במישור המחורץ $\mathbb{C}-[0,\infty)$. יש לבדוק מה קורה כאשר $R\to\infty$, $r\to 0^+$, והזווית $\varepsilon\to 0^+$? ל־$f(z)$ יש קוטב פשוט בנקודה $z=-1$.

40. חשב את האינטגרל

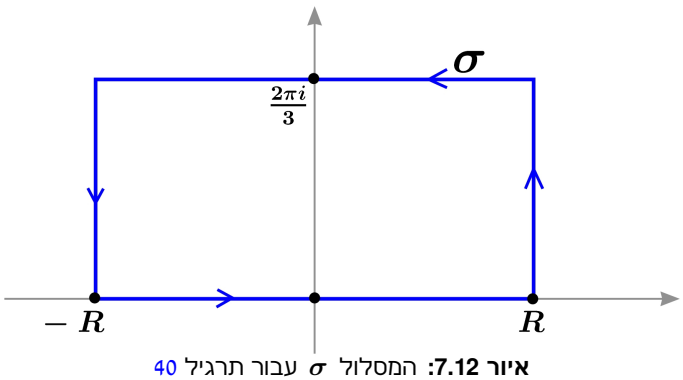
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^x\,dx}{1+e^{3x}}$$



איור 7.11: המסלול σ עבור תרגיל 39

תשובה: $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$

הדרכה: השתמש במסלול σ המתואר בשרטוט 7.12. יש לחשב אינטגרל של $f(z)=\frac{e^z}{1+e^{3z}}$ לאורך המסלול σ. יש להראות שהאינטגרל לאורך שלושת הצלעות העליונות של המלבן שואף לאפס כאשר $R \to \infty$.



איור 7.12: המסלול σ עבור תרגיל 40

41. לכל מספר טבעי $n \geq 2$, ולכל מספר ממשי $a > 0$, חשב את האינטגרל

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt[n]{x}\,dx}{x^2+a^2}$$

הדרכה: יש להשתמש במסלול דומה לזה שבשרטוט 7.6. יש לבחור ענף אנליטי מתאים של $f(z)=z^{1/n}$.

42. הוכח כי $\int_0^\infty x^{4n+3}e^{-x}\sin x\,dx = 0$, לכל $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

הדרכה: יש להשתמש באינטגרל קווי לאורך שפת הגזרה $0 \leq |z| \leq r$, $0 \leq \mathrm{Arg}(z) \leq \pi/4$

43. הוכח כי עבור כל מספר טבעי חיובי n

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\cos(n\theta-\sin\theta)\,d\theta = \frac{2\pi}{n!}$$

הדרכה: לאחר נקודת השבירה, אפשר לגגל: Whittaker and Watson, Modern Analysis, 6.21.

44. הוכח כי עבור כל מספר מרוכב $z \in \mathbb{C}$, אם $\mathrm{Re}\,(z) > 0$ אז

$$\int_0^\infty \left(e^{-t} - e^{-tz}\right)\frac{dt}{t} = \log z$$

הדרכה: לאחר נקודת שבירה, אפשר לגגל: Whittaker and Watson, Modern Analysis, 6.22.

45. יהי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ טור חזקות בעל רדיוס התכנסות $R = 1$, כך שכל הנקודות על העיגול $|z| = 1$ אשר עבורן הוא אינו מתכנס הן קטבים פשוטים. הוכח: סדרת המקדמים $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ חסומה.

46. תהי $f(z)$ פונקציה שלמה המקבלת ערכים ממשיים רק על הציר הממשי. השתמש בעקרון הארגומנט בכדי להוכיח שיש ל־f לכל היותר שורש אחד.

47. תהי $f(z)$ פונקציה אנליטית על עיגול היחידה $|z| < 1$, כך ש־$|f(z)| \le 1$ לכל z בעיגול היחידה. הוכח: אם $z = 0$ הוא שורש בעל ריבוי m של f, אז $|f(z)| \le |z|^m$.

48. נניח שלפונקציה $f(z)$ יש שורש יחיד בלבד z_0, בעל ריבוי 1, בתוך מעגל σ. הוכח כי

$$z_0 = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\sigma}\frac{zf'(z)}{f(z)}dz$$

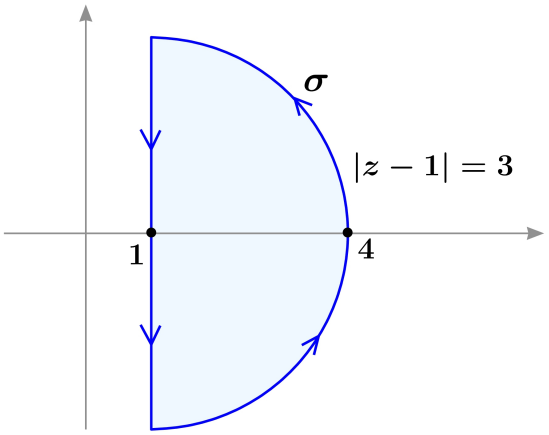
49. יהי σ מסלול חיובי סביב החצי הימני של העיגול $|z-1| = 3$ (ראה שרטוט 7.13). תהי $f(z)$ פונקציה שלמה ללא שורשים על המסלול σ, המקיימת

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\sigma}\frac{zf'(z)}{f(z)}dz = 3, \quad \frac{1}{2\pi i}\oint_{\sigma}\frac{z^2f'(z)}{f(z)}dz = \frac{5}{2}$$

מצא את השורשים של f בתוך המסלול σ.

50. יהי D תחום הכולל בתוכו את עיגול היחידה הסגור $|z| \le 1$, ותהי f פונקציה מרומורפית אשר יש לה מספר סופי של קטבים פשוטים $z_1, z_2, \ldots, z_k$, על מעגל היחידה $|z| = 1$. יהי $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ הטור מקלורן של f בתחום $|z| < 1$. הוכח כי קיים $M > 0$ ממשי כך ש־$|a_n| \le M$, עבור כל n.

51. יהיו $P(z)$, $Q(z)$, שני פולינומים לא קבועים כך ש־$\deg(P) \le \deg(Q) - 2$, וכך שכל



איור 7.13: המסלול σ עבור תרגיל 49

השורשים של Q פשוטים. הוכח כי

$$\sum_{Q(z)=0} \frac{P(z)}{Q'(z)} = 0$$

מדובר בסכום סופי: המשתנה z רץ מעל השורשים של Q בלבד.

הדרכה: העזר במשפט השארית מעל מעגל $|z| = R$, עבור R מספיק גדול, והערכת גודל האינטגרל $\left|\oint_{|z|=R} \frac{P(z)}{Q(z)}\right|$ כאשר $R \to \infty$.

52. חשב את מספר השורשים של $f(z) = 3e^z - z$ בעיגול היחידה הסגור $|z| \leq 1$.

53. חשב את מספר השורשים של $f(z) = z^6 - 5z^4 + 3z^2 - 1$ בעיגול היחידה הסגור $|z| \leq 1$.

תשובה: 4

54. חשב את מספר השורשים של $f(z) = 2z^5 - 6z^2 + z + 1$ בטבעת $1 \leq |z| < 2$.

תשובה: 3

55. חשב את מספר השורשים של $f(z) = z^9 + 5z^2 + 3$ ברביע הראשון של $\mathbb{C}$.

הדרכה: הפעל את עקרון הארגומנט על רבע מעגל $|z| \leq r$, $0 \leq \mathrm{Arg}(z) \leq \frac{\pi}{2}$, ותן ל־$r$ לשאוף לאינסוף. **תשובה:** 2.

56. הוכח כי לכל ממשי $r > 0$, קיים טבעי N, כך שלכל $n \geq N$, לפולינום

$$P(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \cdots + \frac{z^n}{n!}$$

אין שורשים בעיגול $\mathbb{D}(0, r)$.

57. הוכח: אם כל השורשים של הפולינום $P(z)$ נמצאים בחצי מישור נתון, אז גם השורשים של $P'(z)$ נמצאים שם.



58. תהי $f(z)$ פונקציה אנליטית בתחום D. הוכח: אם f חד-חד-ערכית ב־D אז לנגזרת שלה $f'(z)$ אין שורשים ב־D.

59. קבע מהו מספר הפתרונות של המשוואה $z-2-e^{-z}=0$ בחצי המישור הימני $\mathrm{Re}\,(z)>0$.

הדרכה: הוכח כי יספיק להתבונן בחצי העיגול הימני של העיגול $|z|<3$, ואז להפעיל את משפט רושה.



60. תהי $f(z)$ פונקציה מרומורפית אשר אין לה המשכה אנליטית לפונקציה שלמה. הוכח כי הפונקציה $g(z)=e^{f(z)}$ אינה פונקציה מרומורפית.

הדרכה: יש להוכיח כי לפונקציה g יש נקודה סינגולרית עיקרית.



61. תהי $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ סדרה יורדת ממש של מספרים ממשיים חיוביים.

א. הוכח כי $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ היא פונקציה אנליטית על עיגול היחידה $|z|<1$.

ב. הוכח כי לכל סכום חלקי $\sum_{n=1}^{m}a_nz^n$ אין שורשים בעיגול היחידה.

ג. הוכח כי לפונקציה $f(z)$ אין שורשים בעיגול היחידה.

ד. מהן הנקודות על המעגל $|z|=1$ שבהן הטור מתכנס?

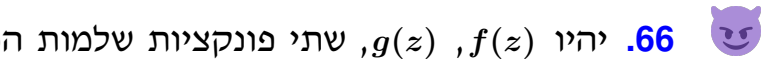
הדרכה: סעיף ד' עשוי להיות קשה. יש להבחין בין המקרה בו הטור $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ מתכנס למקרה בו הטור מתבדר.

62. יהי $c\in\mathbb{C}$, $|c|>e$, ויהי n מספר טבעי חיובי. הוכח כי לפונקציה $f(z)=cz^n-e^z$ יש בדיוק n שורשים שונים בתוך העיגול $|z|<1$.

63. יהי $a\neq 0$ מספר ממשי. הוכח כי למשוואה $ze^z=a$ יש אינסוף פתרונות.

64. הוכח שאם $0<|a|<1$, n מספר טבעי חיובי, אז למשוואה $(z-1)^ne^z=a$ יש בדיוק n שורשים, שכל אחד מהם בעל ריבוי 1, וכולם נמצאים בחצי המישור הימני $\mathrm{Re}\,(z)>0$.

65. הוכח כי הפונקציה $f(z)=z+\frac{1}{z}$ מקבלת כל ערך לא-ממשי פעם אחת בדיוק מעל העיגול $|z|\leq 1$. איזה ערכים ממשיים מתקבלים יותר מפעם אחת?



66. יהיו $f(z)$, $g(z)$, שתי פונקציות שלמות המקיימות

$$f\left(\frac{1}{n+1}\right)g\left(\frac{1}{2n+3}\right)=0$$

עבור כל מספר טבעי n. הוכח כי או ש־f זהותית אפס, או ש־g זהותית אפס.

67. תהי $f(z)$ פונקציה מרומורפית מעל $\mathbb{C}$ בעלת מספר סופי של קטבים $z_1,z_2,\ldots,z_n$.

נתון כי $\lim_{|z|\to\infty} f(z)=0$. הוכח כי

$$\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}(z_k,f)=\lim_{z\to\infty} zf(z)$$

68. יהי z_0 שורש מריבוי 2 של פונקציה אנליטית $g(z)$, ותהי $f(z)$ פונקציה אנליטית בנקודה z_0, $f'(z_0)\neq 0$. הוכח את הנוסחה הבאה

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f(z)}{g(z)},z_0\right)=\frac{2f'(z)}{g'(z)}-\frac{2f(z_0)g''(z_0)}{3[g'(z_0)]^2}$$

69. עשה שימוש בנוסחה שקיבלת בתרגיל 68 בכדי לחשב את השארית של $f(z)=\frac{\cos z}{[\operatorname{Log}(z)-1]^2}$ בנקודה $z=e$.

70. הוכח את המשפט היסודי של האלגברה באמצעות משפט רושה.

הדרכה: אם $P(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n$ פולינום ממעלה n, לצורך שימוש במשפט רושה, קח $f(z)=a_nz^n$, $g(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_{n-1}z^{n-1}$, ומצא $R>0$ מספיק גדול כך שתנאי משפט רושה יתקיימו על המעגל $|z|=R$. בכדי לבצע השוואה בין גודלי פולינומים מומלץ לעיין בהוכחת טענות 3.18, 3.19 (עמוד 111).

71. תהי $f:D\to\mathbb{C}$ פונקציה אנליטית לא-קבועה מעל קבוצה פתוחה D. תהי $z_0\in D$ שורש של f. הוכח כי קיים ממשי $r>0$ כך ש־$f(z)\neq 0$ לכל z על המעגל $|z-z_0|=r$. כלומר: סביב כל שורש של f, קיים מעגל שבו f אינה מתאפסת.

הדרכה: הנח בשלילה שאין מעגל כזה, ואז לכל n מספיק גדול, המעגל $|z-z_0|=\frac{1}{n}$ יכיל נקודה z_n שבה $f(z_n)=0$. קבל סתירה למשפט 7.4.

72. תהי $f(z)$ פונקציה אנליטית בתחום D, ותהי $z_0\in D$, כך ש־$f'(z_0)=0$. הוכח כי f אינה חד-חד-ערכית בכל סביבה של z_0.

הדרכה: במילים אחרות, לכל $r>0$, קיימים $z_1,z_2\in\mathbb{D}(z_0,r)$ כך ש־$f(z_1)=f(z_2)$. העזר בתרגיל 58.

73. הוכח שלכל $\varepsilon>0$, לפונקציה $f(z)=\frac{1}{z+i}+\sin z$ אינסוף שורשים ברצועה $|\operatorname{Im}(z)|<\varepsilon$.

74. האם קיימת פונקציה אנליטית על עיגול היחידה $|z|<1$ כך ש־$\lim_{|z|\to 1}|f(z)|=\infty$?

הדרכה: יש ל־f מספר סופי של שורשים בתוך העיגול (למה?). הגדר $g(z)=f(z)/(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n)$, כך ש־$g$ אין שורשים, ועדיין $\lim_{|z|\to 1}|g(z)|=\infty$. חקור את הפונקציה $1/g(z)$. העזר בעקרון המקסימום.

75. הוכח את **משפט ההעתקה הפתוחה**: אם $f:D\to\mathbb{C}$ פונקציה אנליטית לא-קבועה מעל קבוצה פתוחה D, אז גם התמונה $f(D)$ קבוצה פתוחה.

הדרכה: תהי $z_0\in D$. יש להוכיח כי $f(z_0)$ נקודה פנימית של $f(D)$. כלומר קיים $t>0$ כך ש־$\mathbb{D}(f(z_0),t)\subseteq f(D)$. ללא הגבלת הכלליות אפשר להניח כי $f(z_0)=0$ (אחרת נחליף את f בפונקציה $g(z)=f(z)-f(z_0)$). על פי תרגיל 71 קיים

$r>0$ כך ש־f לא מתאפסת על המעגל $|z-z_0|=r$. נקח $r=\frac{1}{2}\operatorname{Min}_{|z-z_0|=r}f(z)$. הוכח כי $D(0,r)\subseteq f(D)$ (יש להיעזר בעקרון המינימום).

76. על ידי שימוש במשפט ההעתקה הפתוחה שבתרגיל 75, הוכח את עקרון המקסימום עבור פונקציה הרמונית ממשית: פונקציה ממשית הרמונית $u(x,y)$ מעל קבוצה פתוחה $S\subseteq\mathbb{R}^2$ לא תקבל מקסימום מקומי בתוך נקודה פנימית של S.

הדרכה: הנח בשלילה כי u מקבלת מקסימום מקומי M בנקודה פנימית $z_0=x_0+iy_0$. על פי משפט 4.13 (עמוד 141), קיימת פונקציה אנליטית $f:S\to\mathbb{C}$ כך ש־$\operatorname{Re}(f)=u(x,y)$. הראה כי f אינה העתקה פתוחה כי $f(z_0)=M+iv(x_0,y_0)$, וכל סביבה של הנקודה $w=M+iv(x_0,y_0)$ אינה כלולה בתמונה $f(S)$.

77. הוכח: אם $f:D\to\mathbb{C}$ פונקציה אנליטית לא-קבועה מעל קבוצה פתוחה וקשירה D, אז גם התמונה $f(D)$ קבוצה פתוחה וקשירה.

הדרכה: יספיק להוכיח קשירות מסילתית. כל מסלול ב־D עוברת למסלול ב־$f(D)$.

78. הוכח: לא קיימת העתקה קונפורמית חד-חד-ערכית ועל מעיגול היחידה הנקוב $0<|z|<1$ לטבעת $1<|z|<2$.

הדרכה: נסמן $A=\{z\in\mathbb{C}:\ 1<|z|<2\}$. הנח בשלילה שקיימת $f:\dot{\mathbb{D}}(0,1)\to A$ כנ"ל. הוכח כי $z=0$ נקודה סינגולרית סליקה (כי $\lim_{z\to0}zf(z)=0$). חקור את ההרחבה של f, $g:\overline{\mathbb{D}}(0,1)\to\overline{A}$.

79. תהי $f(z)$ פונקציה אנליטית בסביבת עיגול היחידה הסגור $|z|\le1$. נתון כי f חד-חד-ערכית על המעגל $|z|=1$. הוכח כי f חד-חד-ערכית בתוך העיגול $|z|<1$. נסח טענה כללית יותר לכל תחום פשוט קשר D, ובדוק אם ניתן להכליל את ההוכחה שלך גם עבור המקרה הכללי.

הדרכה: שלב 1: הראה שתמונת מעגל היחידה σ הוא מסלול ז'ורדן. שלב 2: העזר במשפט ההעתקה הפתוחה (תרגיל 75) בכדי להראות ש־$f(\mathbb{D}(0,1))$ חייב להיות הפנים של $f(\sigma)$. בשלב היאוש, ניתן למצוא פיתרון בקישור: hw9sol.pdf.

80. הוכח את **משפט Casorati-Weierstrass**: אם z_0 נקודה סינגולרית עיקרית של פונקציה $f(z)$, אז התמונה של כל סביבה נקובה $\dot{\mathbb{D}}(z_0,r)$ היא קבוצה צפופה ב־$\mathbb{C}$.

הדרכה: תזכורת: קבוצה D **צפופה** בקבוצה E אם כל נקודה $z\in E$, היא גבול של סדרת נקודות $z_n\in D$. רעיון: נניח בשלילה שהתמונה $U=f(\dot{\mathbb{D}}(z_0,r))$ אינה צפופה ב־$\mathbb{C}$. אז קיימת נקודה w_0 ומספר ממשי $r>0$ כך ש־$\mathbb{D}(w_0,r)\cap U=\emptyset$. כלומר לכל $z\in\dot{\mathbb{D}}(z_0,\varepsilon)$, $|f(z)-w_0|\ge r$. לכן לכל $z\in\dot{\mathbb{D}}(z_0,\varepsilon)$, $\left|\frac{1}{f(z)-w_0}\right|\le\frac{1}{r}$. לכן $\frac{1}{f(z)-w_0}$ חסומה בסביבת הנקודה z_0, ולכן על פי טענה 7.10, z_0 נקודת סינגולריות סליקה של $\frac{1}{f(z)-w_0}$.

81. יהי $P(z)$ פולינום לא קבוע. הוכח כי למשוואה $P(z)=e^z$ יש אינסוף פתרונות שונים.

הדרכה: נסה להיעזר במשפט Casorati-Weierstrass (ראה תרגיל 80).

82. תהי $f(z)$ פונקציה שלמה. נאמר כי הנקודה $z=\infty$ היא נקודה סינגולרית עיקרית של f, אם $z=0$ היא נקודה סינגולרית עיקרית של $f(1/z)$. הוכח: פונקציה שלמה $f(z)$ היא פולינום אם ורק אם $z=\infty$ אינה נקודה סינגולרית עיקרית של f.

הדרכה: נגדיר את הפונקציה $g(z)=f(1/z)$. אם $f(z)$ היא פולינום אז $\lim_{z\to\infty}f(z)=\infty$, ולכן $\lim_{z\to 0}g(z)=\infty$. על סמך משפט Casorati-Weierstrass (ראה תרגיל 80) $z=0$ אינה יכולה להיות נקודה סינגולרית עיקרית של g (למה?). כיוון שני: אם $z=\infty$ אינה נקודה סינגולרית עיקרית של f, אז $z=0$ אינה נקודה סינגולרית עיקרית של g, ולכן על פי טענה 7.9 הטור מקלורן של g סביב הנקודה $z=0$ מכיל מספר סופי של חזקות שליליות, ולכן הטור טיילור של f סופי (למה?). כלומר f היא פולינום. מומלץ לפתור תרגיל זה בסמיכות לתרגיל 24. חשוב לקרוא את ההארה לתרגיל 24 בנוגע לדואליות בין הנקודה $z=0$ והנקודה $z=\infty$. מקורות נוספים: math.stackexchange.1, math.stackexchange.2.

83. תהי $f(z)$ פונקציה מרומורפית מעל $\mathbb{C}$, כך ש־$\lim_{z\to\infty}f(z)=\infty$. הוכח כי f היא בהכרח פונקציה רציונלית.

הדרכה: שים לב כי זו זוהי הכללה של תרגיל 4, אשר לא ניתן לקבל ללא משפט Casorati-Weierstrass (ראה תרגיל 80). הניסוח אינו מציין אם מספר הקטבים סופי או אינסופי, אך קיום הגבול $\lim_{z\to\infty}f(z)=\infty$ מחייב כי קיים $R>0$ כך ש־$f(z)$ מוגדרת על כל התחום $|z|>R$. (ראה הגדרה 3.6 בעמוד 110). לכן כל הקטבים של f חייבים להימצא בעיגול $|z|\le R$, ולכן מספרם הוא סופי (למה?). העזר בנוסחה (7.9) של טענה 7.23 (עמוד 311), וכמובן יש להעזר במשפט Casorati-Weierstrass.

84. תהי $f(z)$ פונקציה שלמה המקיימת $|f(z)|=1$ מעל מעגל היחידה $|z|=1$. הוכח כי f חייבת להיות פולינום.

הדרכה: התבונן בפונקציה $g(z)=1\Big/\overline{f(1/\overline{z})}$. הוכח כי g אנליטית במישור הנקוב $\mathbb{C}-\{0\}$, וש־$f(z)=g(z)$ על מעגל היחידה $|z|=1$. על סמך משפט הזהות, $f(z)=g(z)$ עבור כל $z\in\mathbb{C}$. אבל f שלמה, לכן בהכרח $z=0$ נקודה סינגולרית סליקה של g. אין ל־f שורשים מלבד אולי $z=0$, כי אם $z\neq 0$ שורש, אז על סמך הסמטריה $f(z)=1\Big/\overline{f(1/\overline{z})}$, $\overline{z}$ הוא קוטב של f בסתירה לכך ש־f שלמה. אם $z=0$ אינו שורש של f אז בהכרח f קבועה. אם $z=0$ הוא שורש של f אז הוכח כי $\lim_{z\to\infty}f(z)=\infty$, ולכן f היא פולינום.

85. מצא את כל הפונקציות $f(z)$ המקיימות $|f(z)|=1$ על מעגל היחידה $|z|=1$.

הדרכה: על סמך תרגיל 84 f חייבת להיות פולינום. נשאר לבדוק רק באיזה סוג של פולינומים מדובר? על סמך השיקולים שפגשנו בתרגיל 84, לכל פולינום כזה יש רק שורש יחיד $z=0$, ולכם הוא חייב להיות מהצורה az^n (למה?), עבור מקדם $a\in\mathbb{C}$. התנאי $|f(z)|=1$ גורר ש־$|a|=1$.

86. תהי $f(z)$ פונקציה אנליטית על עיגול היחידה $|z|<1$. נתון כי f קבועה על המעגל $|z|=\frac{1}{2}$. הוכח כי קיים לפחות שורש אחד של f בעיגול $|z|<\frac{1}{2}$.

87. יהי p מספר ממשי, ותהי $f(z)$ פונקציה שלמה המקיימת

$$\int_0^{2\pi}\left|f(re^{it})\right|dt\le r^p$$

עבור כל $r>0$. הוכח כי f חייבת להיות פולינום.

88. יהיו $f(z)$, $g(z)$ שתי פונקציות שלמות אשר ההרכבה שלהן $f(g(z))$ היא פולינום. הוכח כי שתי הפונקציות $f(z)$, $g(z)$ הן פולינומים. מה תוכל לומר על המעלה של $f(g(z))$ ביחס למעלת שתי הפונקציות?

הדרכה: העזר בפיתרון תרגיל 82. לאחר נקודת השבירה אפשר להציץ בקישור הבא: proving-fz-and-gz-are-polynomials

89. הוכח: אם $f(z)$ פונקציה שלמה וחד-חד-ערכית אז f היא בהכרח פולינום ליניארי: $f(z) = az + b$.

הדרכה: ללא הגבלת הכלליות הנח כי $f(0) = 0$. על פי משפט ההעתקה הפתוחה (תרגילים 75, 77), התמונה של עיגול היחידה $U = f(\mathbb{D}(0,1))$ היא קבוצה פתוחה שמכילה את $z = 0$ כנקודה פנימית. כלומר קיים $r > 0$ כך ש־$\mathbb{D}(0,r) \subseteq U$. לכן f, עבור כל z שמחוץ לעיגול היחידה $|f(z)| > r$. לכן $1/f(z)$ חסומה על המישור המחורר $|z| > 1$. ועכשיו משפט ליוביל ... הראה כי $f(z) = az$ עבור קבוע a.
דרך שנייה: הפעל את משפט Casorati-Weierstrass (תרגיל 80) על הפונקציה $g(z) = f(1/z)$. עבור גם על תרגיל 82.

90. תהי $f(z)$ פונקציה אנליטית בעיגול פתוח $|z - z_0| < r$. נתון כי z_0 הוא שורש מבודד של f. הוכח כי קיימת נקודה z בעיגול כך ש־$\mathrm{Re}\,(f(z)) > 0$.

הדרכה: במחשבה נוספת, ייתכן שסמל הגולגולת לבעייה הזו לא מוצדק. לא בדוק עדיין, אבל ייתכן שקו מחשבה בכיוון פונקציות הרמוניות יוביל לפיתרון אלגנטי. אם $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, אז על סמך משפט 4.12, $u(x,y)$ פונקציה הרמונית, ולכן אמורה לקבל מינימום ומקסימום על השפה.

קישור לפתרונות

7.8 מפתח סימון תרגילים

 תרגיל תות. אמור להיות קליל. לא להציץ בהדרכה  !

 תרגיל דובדבן. אמור להיות קליל. לא להציץ בהדרכה  !

 תרגיל עוגת שוקולד. אמור להיות קל. (Piece of cake).

 תרגיל עוגת גבינה. אמור להיות קל.

 תרגיל גביע גלידה. רמת קושי נמוכה.

 תרגיל עוגת שכבות. רמת קושי נמוכה.

 תרגיל קסום. טריק קטן של שורה או שתיים.

 כנ"ל

 הפתרון כרוך בשליפת ארנבת מכובע קוסמים. אמור להיות קצר ואלגנטי.
בתנאי שעולים על הטריק ... 

 כנ"ל

 תרגיל מגניב. אמור ללכת בצורה חלקה ומהנה (אם לא, אתם בבעייה ...).

 סימן עידוד לפיתרון תרגיל לא שיגרתי.

 בראבו. ציון לשבח. משימת הוכחה תאורטית לא טריביאלית ראויה לשבח.
כדאי לנסות לבד קודם. במידת הצורך, מומלץ להעזר בשיטוט אינטרנטי.

 תרגיל מסוכן. רמת קושי 1.

 תרגיל יותר מסוכן. רמת קושי 2.

 אלוף מי שפותר. רמת קושי 3. אבל רק אם לא מציצים בהדרכה .

 מלך מי שפותר. רמת קושי 3. בתנאי שלא מציצים בהדרכה .

 תרגיל מפרך. חפירה ארוכה ומתישה, אבל אין ברירה, ככה לומדים!

 קשה באימונים, קל בקרב. לא הכי מעניין, אבל מסייע מאוד לפיתוח שרירי המוח.

 עוד יותר קשה באימונים, עוד יותר קל בקרב.

🏋🏿 קשה באימונים, קל בקרב. לא הכי מעניין, אבל מסייע מאוד לפיתוח שרירי המוח.

💩 תרגיל מחורבן, אבל אין ברירה. מומלץ להשאיר לסוף (עלול להעכיר את האווירה).

🥴 רמת קושי לא ברורה. עשוי להפתיע.

☹️ עדיין לא פתרתי ולא רואה אפילו כיוון, אבל התרגיל אמור להיות ברמת קושי סבירה.

🥴 תרגיל תמהוני. רמת קושי לא ברורה או קשה לכימות. הכל אפשרי.

😈 תרגיל שטני. נדרשת מידה לא מבוטלת של ערמומיות בשביל לפתור.

😈 תרגיל שטני. נדרשת מידה לא מבוטלת של נכלוליות בשביל לפתור.

🔥 תרגיל אש. דרגת קושי בין 1 ל־3. קשה לכמת.

🤯 תרגיל מכעיס. ייתכן ורמת הקושי קצת מוגזמת, אבל לא לוותר (להציץ בהדרכה).

😱 תרגיל מעצבן. יוצר רושם של חציית גבול החוצפה שבדרישה לפתור תרגיל כזה. לא לקחת ללב. להתגבר על הכעס, לקחת נשימה ארוכה, לשנס מותניים ולפתור!

😱 תרגיל מפחיד. לא להכנע לפניקה. ברוב המקרים השד לא כל כך נורא.

😎 תרגיל אקדמי. מומלץ במיוחד עבור סטודנטים שמתכננים קריירה אקדמית. ארוכת טווח (מאסטר ודוקטוראט!).

💀 תרגיל קטלני, אבל מומלץ לעשות מאמץ מיוחד. לומדים מהנסיון גם כשלא פותרים.

☠️ תרגיל קטלני. לבעלי עצבי ברזל בלבד. לא נורא אם לא פותרים. העיקר המאמץ.

☠️ תרגיל קטלני. לבעלי עצבי פלדה בלבד. אין חובה לפתור.

🪦 תרגיל סופני רמה 1. לבעלי עצבי פלטינה בלבד. אין חובה לנסות.

🪦 תרגיל סופני רמה 2. לבעלי עצבי פלוטוניום בלבד. לא מומלץ לנסות.