חדו"א ב' - סיכום קורס

גירסה: 04.02.2018

טור הנדסי אינסופי

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1-q} \qquad (|q|<1) \tag{1}$$

טור הנדסי מתחלף

$$\sum_{n=0}^{\infty} a(-1)^n q^n = \frac{a}{1+q} \qquad (|q|<1) \tag{2}$$

טור טלסקופי: טור נקרא **טלסקופי** אם ניתן להציג אותו על ידי

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) \qquad \textbf{(סוג 1)}$$

או על ידי

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_n) \qquad \textbf{(סוג 2)}$$

עבור סדרה נתונה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. טור טלסקופי מתכנס אם ורק אם הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת. נוסחת סכום טור טלסקופי מסוג 1 היא:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) = a_1 - \lim_{n\to\infty} a_n \tag{3}$$

נוסחת סכום טור טלסקופי מסוג 2 היא:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) - a_1 \tag{4}$$

קריטריון ההתכנסות של קושי (Cauchy)

משפט 1:

הטור $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתכנס, אם ורק אם $\lim_{n,p\to\infty} \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k = 0$.

במילים אחרות: הטור $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתכנס אם ורק אם לכל $\epsilon > 0$ קיים N כך שלכל $n > N$, ולכל p,

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| < \epsilon \tag{5}$$

תנאי הכרחי להתכנסות טור (מבחן התבדרות)

משפט 2: אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אזי $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

לכן: אם הגבול לא קיים או אם הוא קיים אך אינו אפס, אז הטור מתבדר.

משפט 3: אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אז כל זנב שלו $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_n$ מתכנס ובנוסף לכך מתקיים

$$\lim_{n\to\infty} r_n = 0$$

כלומר, לכל $\epsilon > 0$ קיים מספר טבעי N כך שלכל $n > N$, מתקיים $|r_n| < \epsilon$.

משפט 4: הורדה, הוספה, או שינוי של מספר סופי של איברים בטור אינה משפיעה על התכנסותו או התבדרותו

משפט 5: אם c מספר ממשי קבוע שונה מאפס, אזי הטורים $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ו־ $\sum_{k=1}^{\infty} ca_k$ מתכנסים או מתבדרים ביחד. במקרה של התכנסות מתקיים השוויון

$$\sum_{k=1}^{\infty} ca_k = c\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

משפט 6: אם הטורים $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ו־ $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ מתכנסים אזי הטורים $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \pm b_k$ מתכנסים ובנוסף מתקיים השוויון

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \pm b_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \pm \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

משפט 7: **(מבחן השוואה ראשון)**

יהיו $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, שני טורים **חיוביים** נתונים. אם לכל מספר טבעי n החל ממקום מסוים מתקיים

$$a_n \le b_n$$

אזי

א. מההתכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ נובעת ההתכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

ב. מההתבדרות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ נובעת ההתבדרות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

משפט 8: (מבחן ההשוואה השני)

יהיו $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, שני טורים **חיוביים** נתונים. אם קיים הגבול

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k$$

א. אם $0 < k < \infty$ אז הטורים $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו־ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנסים או מתבדרים יחד.

ב. אם $k = 0$ אז

– מהתכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ נובעת התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

– מהתבדרות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ נובעת התבדרות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

ג. אם $k = \infty$ אז

– מהתכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ נובעת התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

– מהתבדרות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ נובעת התבדרות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

משפט 9: (מבחן השוואה שלישי)

יהיו $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו־ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טורים חיוביים ממש ($a_n > 0$, $b_n > 0$).

אם לכל n טבעי מתקיים

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

אזי

א. מהתכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ נובעת התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

ב. מהתבדרות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ נובעת התבדרות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

משפט 10: (מבחן המנה D'alembert)

יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור חיובי ממש ($a_n > 0$). אם לכל מספר טבעי n, החל ממקום מסוים, מתקיים

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \le q < 1$$

אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס. אם

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1$$

אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.

משפט 11: (הצורה הגבולית של מבחן המנה)

יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור חיובי ממש ($a_n > 0$). אם קיים הגבול

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$$

אזי

א. אם $L < 1$ אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס

ב. אם $L > 1$ אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר

ג. אם $L = 1$ אז לא ניתן לקבוע התכנסות או התבדרות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

משפט 12: מבחן השורש של קושי (Cauchy)

יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור חיובי נתון.

א. אם החל ממקום מסוים איברי הטור מקיימים

$$\sqrt[n]{a_n} \le q < 1$$

אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

ב. אם החל ממקום מסוים איברי הטור מקיימים

$$\sqrt[n]{a_n} \ge 1$$

אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.

ג. אם קיים הגבול

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$$

אזי

- אם $L < 1$ אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס
- אם $L > 1$ אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר
- אם $L = 1$ אז לא ניתן לקבוע התכנסות או התבדרות

משפט 13: (מבחן האינטגרל)

יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור חיובי נתון, ותהי $f(x)$ הפונקציה הממשית המתאימה לסדרה a_n. אם $f(x)$ מונוטונית לא־עולה בתחום $x \ge 1$, אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ והאינטגרל המוכלל $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ מתכנסים יחד או מתבדרים יחד.

משפט 14: (מבחן טורי־p)
יהי p מספר ממשי קבוע. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ מתכנס אם ורק אם $p > 1$.

אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ הוא טור המקיים את תנאי מבחן האינטגרל, אז לכל n, השארית $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ מקיימת את אי־השוויון הבא

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x)\,dx < r_n < \int_{n}^{\infty} f(x)\,dx \tag{6}$$

התכנסות בהחלט והתכנסות בתנאי

הגדרה 1: נאמר שהטור $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ **מתכנס בהחלט** אם טור הערכים המוחלטים של איבריו $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ מתכנס.

הגדרה 2: נאמר שטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **מתכנס בתנאי** (או לא מתכנס בהחלט), אם הוא מתכנס אך טור הערכים המוחלטים $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ מתבדר.

משפט 15: טור מתכנס בהחלט, מתכנס.

משפט 16: (מבחן לייבניץ עבור טורים מחליפי סימן)
אם $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה חיובית, מונוטונית יורדת, ו־$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, אזי

א. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ מתכנס

ב. סכומו S מקיים: $0 < S < a_1$

ג. לכל n, השארית r_n מקיימת: $|r_n| < a_{n+1}$

הגדרה 3: נאמר שסדרת פונקציות $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ **מתכנסת נקודתית** לפונקציה $f(x)$ בתחום E, אם לכל נקודה x בתחום E מתקיים $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

הגדרה 4: נאמר שסדרת פונקציות $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ **מתכנסת במידה שווה** לפונקציה $f(x)$ בתחום E, אם לכל $\epsilon > 0$, קיים N (**התלוי בערך ϵ בלבד**) כך שלכל $n > N$ ולכל x בתחום E מתקיים:

$$|f(x) - f_n(x)| < \epsilon \tag{7}$$

משפט 17: סדרת פונקציות $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במידה שווה לפונקציה $f(x)$ בתחום E אם ורק אם

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in E} |f(x) - f_n(x)| = 0$$

משפט 18: אם סדרת פונקציות רציפות $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במידה שווה לפונקציה $f(x)$ בתחום E, אזי $f(x)$ רציפה בתחום E

הגדרה 5: תהי $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות בתחום E. הביטוי

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots$$

נקרא **טור פונקציות**

הגדרה 6: יהי $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ טור פונקציות המתכנס בתחום E. נאמר שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ **מתכנס במידה שווה** בתחום E אם סדרת הסכומים החלקיים שלו מתכנסת במידה שווה בתחום E.

משפט 19: **(קריטריון קושי)**
הטור $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס במידה שווה בתחום E_0 אם ורק אם לכל $\epsilon > 0$ קיים מספר טבעי N (התלוי ב־ϵ בלבד) כך שלכל $n > N$ ולכל מספר טבעי p מתקיים

$$\forall x \in E_0 : \quad \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| < \epsilon$$

לא נכלל בחומר אבל חשוב להכיר!

משפט 20: **מבחן ווירשטראס (Weirestrass M-Test) להתכנסות טור פונקציות**
יהי $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ טור פונקציות נתון בתחום E. אם קיים טור מספרים חיובי מתכנס $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, וקיים מספר טבעי N, כך שלכל $n > N$

$$\forall x \in E : \quad |f_n(x)| \le a_n \tag{8}$$

אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס במידה שווה ובהחלט בתחום E

לא נכלל בחומר אבל חשוב להכיר!

משפט 21: אם $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות חסומות בתחום E, ואם הטור

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

מתכנס במידה שווה בתחום E, אז הסכום $S(x)$ חסום בתחום E.

משפט 22: אם $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות רציפות בתחום E, ואם הטור

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

מתכנס במידה שווה בתחום E, אז הסכום $S(x)$ רציף בתחום E.

משפט 23: אם טור הפונקציות $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס במידה שווה בקטע הסגור $[a,b]$, ואם $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות רציפות בקטע $[a,b]$ אזי $S(x)$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ ובנוסף

$$\int_a^b S(x)\,dx = \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx \tag{9}$$

משפט 24: אם טור הפונקציות $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס במידה שווה בקטע הסגור $[a,b]$, ואם $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות אינטגרביליות בקטע $[a,b]$ אזי גם $S(x)$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ ובנוסף

$$\int_a^b S(x)\,dx = \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx \tag{10}$$

לא נכלל בחומר אבל חשוב להכיר!

משפט 25: יהי $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ טור מתכנס במידה שווה בקטע הסגור $[a,b]$. אם כל הפונקציות $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ גזירות ברציפות בקטע $[a,b]$, ואם טור הנגזרות $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ מתכנס במידה שווה בקטע $[a,b]$, אזי

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$$

הגדרה 7: טור פונקציות מהצורה

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0)^1 + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$$

נקרא **טור חזקות**. הנקודה x_0 נקראת **מרכז הטור**, והקבועים $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ נקראים **מקדמי הטור**.

משפט 26: (נוסחת קושי־האדאמר)
רדיוס ההתכנסות של טור החזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ הוא

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

(בהנחה שהגבול קיים והמקדמים לא מתאפסים)

משפט 27: (נוסחת המנה לחישוב רדיוס התכנסות)
רדיוס ההתכנסות של טור החזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ הוא

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

(בהנחה שהגבול קיים והמקדמים לא מתאפסים)

משפט 28: יהי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ טור חזקות בעל רדיוס התכנסות R

א. אם $R=0$ אז הטור מתכנס בנקודה $x=x_0$ בלבד

ב. אם $R=\infty$ אז הטור מתכנס במידה שווה בכל קטע סגור סופי $[a,b]$

ג. אם $0<R<\infty$ אז הטור מתכנס במידה שווה בכל קטע סגור $[a,b]$ המקיים

$$x_0-R<a<b<x_0+R$$

משפט 29: יהי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ טור חזקות בעל רדיוס התכנסות $0<R<\infty$, שתחום התכנסותו E.

א. אם $E=[x_0-R,\ x_0+R]$ אז הטור מתכנס במידה שווה בכל הקטע E

ב. אם $E=(x_0-R,\ x_0+R]$ אז הטור מתכנס במידה שווה בכל תת־קטע $[a,\ x_0+R]$, כאשר $x_0-R<a<x_0+R$

ג. אם $E=[x_0-R,\ x_0+R)$ אז הטור מתכנס במידה שווה בכל תת־קטע $[x_0-R,\ b]$, כאשר $x_0-R<b<x_0+R$

ד. אם $E=(x_0-R,\ x_0+R)$ אז הטור מתכנס במידה שווה וגם **בהחלט** בכל תת־קטע $[a,\ b]$, כאשר $x_0-R<a<b<x_0+R$

משפט 30: יהי $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ טור חזקות בעל רדיוס התכנסות R. אזי $f(x)$ היא פונקציה רציפה בכל נקודה x, $-R<x<R$. אם הטור מתכנס בנקודה $x=R$, אז $f(x)$ רציפה משמאל בנקודה זו. אם הטור מתכנס בנקודה $x=-R$, אז $f(x)$ רציפה מימין בנקודה זו.

משפט 31: (אינטגרציה של טור חזקות)
יהי $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ טור חזקות בעל רדיוס התכנסות R. אזי לכל נקודה $|x|<R$, מתקיים

א. $$\int_0^x f(t)\,dt=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n\right)dt=\sum_{n=0}^{\infty}\tfrac{a_n}{n+1}x^{n+1}$$

ב. לשני הטורים $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\tfrac{a_n}{n+1}x^{n+1}$ אותו רדיוס התכנסות R.

ג. אם הטור $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ מתכנס בנקודת הקצה $x=R$, אז גם הטור $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\tfrac{a_n}{n+1}x^{n+1}$ מתכנס בנקודה זו.

ד. כנ"ל לגבי נקודת הקצה $x=-R$.

משפט 32: (גזירה של טור חזקות)
יהי $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ טור חזקות בעל רדיוס התכנסות R. אזי לכל נקודה $|x|<R$, מתקיים

א. $$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$$

ב. לשני הטורים $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$ אותו רדיוס התכנסות R.

ג. אם הטור $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ מתכנס בנקודת הקצה $x=R$, אז גם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$ מתכנס בנקודה זו.

ד. כנ"ל לגבי נקודת הקצה $x=-R$.

משפט 33: (נגזרות גבוהות של טור חזקות)
יהי $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ טור חזקות בעל רדיוס התכנסות R, $R>0$. אזי לסכום $f(x)$ יש נגזרת מכל סדר בכל נקודה x, $|x-x_0|<R$. את הנגזרת מסדר k של $f(x)$ ניתן לקבל על ידי גזירת הטור איבר איבר k פעמים. בנוסף לכך, קיים הקשר הבא בין הנגזרת מסדר k והמקדם a_k של הטור

$$a_k=\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

משפט 34: (יחידות טור חזקות)
אם שני טורי חזקות

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$
$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n$$

מקיימים $f(x) = g(x)$ עבור כל x בקטע פתוח $(x_0 - r, x_0 + r)$, עבור $r > 0$, אזי לכל n טבעי, $a_n = b_n$.

הגדרה 8: תהי $f(x)$ פונקציה מוגדרת סביב נקודה x_0. כלומר קיים $0 < r \leq \infty$, כך שהפונקציה $f(x)$ מוגדרת בקטע $(x_0 - r, x_0 + r)$. נאמר כי $f(x)$ ניתנת לפיתוח לטור חזקות בקטע $(x_0 - r, x_0 + r)$, אם קיים טור חזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ כך ש־

$$\forall x \in (x_0 - r, x_0 + r): \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

משפט 35: (תנאי הכרחי לקיום טור חזקות)
אם פונקציה $f(x)$ ניתנת לפיתוח לטור חזקות סביב נקודה x_0, אז

א. תחום ההגדרה של $f(x)$ חייב להיות סימטרי מסביב x_0 (פרט לקצות הקטע)

ב. לפונקציה $f(x)$ יש נגזרת רציפה מכל סדר בכל נקודה פנימית של תחום ההגדרה

משפט 36: (נוסחת טיילור)
תהי $f(x)$ פונקציה גזירה $n+1$ פעמים בסביבת הנקודה $x = x_0$, ותהי x נקודה כלשהיא בסביבה זו. אזי קיימת נקודה c בין x_0 ו־ x כך ש־

$$f(x) = f(x_0) + \tfrac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \tfrac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \tfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x)$$

כאשר

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

נקראת **נוסחת השארית של לגרנז'.**

משפט 37: (קיום טור חזקות)
תהי $f(x)$ פונקציה גזירה ברציפות אינסוף פעמים בסביבה $(x_0 - r, x_0 + r)$ של הנקודה x_0. לכל n טבעי, תהי $R_n(x)$ נוסחת השארית של לגרנז', המתאימה לנוסחת טיילור של $f(x)$ סביב x_0. אזי $f(x)$ ניתנת לפיתוח לטור חזקות בסביבת x_0 אם ורק אם

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

עבור כל x בסביבה $(x_0 - r, x_0 + r)$.

נוסחת המקדם הכללי בפיתוח של פונקציה $y=f(x)$ לטור טיילור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ סביב הנקודה x_0

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \tag{11}$$

נוסחאות מקלורן שימושיות

$$\begin{aligned}
e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} &&= 1 + x + \tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^3}{3!} + \cdots \\
\sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \ \tfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} &&= x - \tfrac{x^3}{3!} + \tfrac{x^5}{5!} - \tfrac{x^7}{7!} + \cdots \\
\cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \ \tfrac{x^{2n}}{(2n)!} &&= 1 - \tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^4}{4!} - \tfrac{x^6}{6!} + \cdots \\
\arctan x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \ \tfrac{x^{2n+1}}{2n+1} &&= x - \tfrac{x^3}{3} + \tfrac{x^5}{5} - \tfrac{x^7}{7} + \cdots \\
\ln(1+x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \ \tfrac{x^n}{n} &&= x - \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^3}{3} - \tfrac{x^4}{4} + \cdots \\
(1+x)^\alpha &= \sum_{n=0}^{\infty} \tbinom{\alpha}{n} x^n &&= 1 + \alpha x + \tfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \tfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots, (\alpha \in \mathbb{R}) \\
\tfrac{1}{1-x} &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n &&= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \\
\tfrac{1}{1+x} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n &&= 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots
\end{aligned} \tag{12}$$

גאומטריה וקטורית

הוקטור הנוצר בין נקודה $P(x_1,y_1,z_1)$ לנקודה $P(x_2,y_2,z_2)$ הוא:

$$\overrightarrow{PQ} = (x_2 - x1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$$

מכפלה פנימית

$$(x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) \cdot (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 \tag{13}$$

משמעות גאומטרית: ההיטל של הוקטור $\vec{u}$ על הוקטור $\vec{v}$ מתקבל על ידי חלוקת מכפלתם הפנימית באורך של $\vec{v}$. קוסינוס הזווית בין שני הוקטורים (סימון: $\cos(\vec{u},\vec{v})$) מתקבל על ידי חלוקת המכפלה הפנימית של שני הוקטורים במכפלת אורכיהם.

מכפלה וקטורית

$$(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k})\times(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k})=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix} \tag{14}$$

<u>משמעות גאומטרית:</u> הוקטור $\vec{u}\times\vec{v}$ ניצב לשני הוקטורים $\vec{u}$, $\vec{v}$, ואורכו $\|\vec{u}\times\vec{v}\|$ שווה לשטח המקבילית הנוצרת על ידי שני הוקטורים.

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= \vec{v}\cdot\vec{u}\\ \vec{u}\cdot\vec{v} &= \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta\\ \cos\theta &= \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}\\ \|\vec{u}\|^2 &= \vec{u}\cdot\vec{u}\end{aligned} \tag{15}$$

נוסחת ההיטל של הוקטור $\vec{u}$ על הוקטור $\vec{v}$: $\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$

$$\begin{aligned}\|\vec{u}\times\vec{v}\| &= \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\sin\theta\\ \vec{u}\times\vec{v} &= -\vec{v}\times\vec{u}\\ (\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w} &= \vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}\\ (\vec{u}+\vec{v})\times\vec{w} &= \vec{u}\times\vec{w}+\vec{v}\times\vec{w}\end{aligned} \tag{16}$$

מכפלה מעורבת (נפח מקבילון הנוצר על ידי שלושה וקטורים במרחב)

$$(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k})\cdot[(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k})\times(x_3\vec{i}+y_3\vec{j}+z_3\vec{k})]=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix} \tag{17}$$

משוואת המישור בעל וקטור נורמל $\vec{N}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$ שמכיל נקודה $P(x_0,y+0,z_0)$

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0 \tag{18}$$

הצגה קרטזית של ישר במרחב בעל וקטור כיוון $\vec{u}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$ ומכיל נקודה $P(x_0,y_0,z_0)$

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c} \tag{19}$$

הצגה פרמטרית של ישר במרחב בעל וקטור כיוון $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ ומכיל נקודה $P(x_0, y_0, z_0)$

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} , \qquad -\infty < t < \infty \tag{20}$$

שני וקטורים $\vec{u}$, $\vec{v}$ נקראים **מקבילים** או **קו־ליניאריים** אם קיים סקלר c כך ש־ $\vec{u} = c\vec{v}$ (או $\vec{v} = c\vec{u}$).
סימון: $\vec{v} \parallel \vec{u}$. שני וקטורים $\vec{u}$, $\vec{v}$ נקראים **ניצבים** או **אורתוגונליים** אם הזווית שנוצרת ביניהם היא $90°$.
סימון: $\vec{u} \perp \vec{v}$.
משפט: $\vec{u} \perp \vec{v}$ אם ורק אם $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

שני ישרים במרחב התלת־מימדי $\mathbb{R}^3$ נקראים **מקבילים** אם וקטורי הכיוון שלהם מקבילים. שני ישרים שאינם נחתכים ואינם מקבילים נקראים **מצטלבים**.

חשבון דיפרנציאלי בשני משתנים

תחום הגדרה $\mathscr{D}$ של פונקציה עם שני משתנים $f(x,y)$:

$$\mathscr{D} = \{\, (x,y) \mid \text{הפונקציה } f(x,y) \text{ מוגדרת} \,\}$$

ϵ-סביבה: $\left\{ (x,y) \mid \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \epsilon \right\}$
ϵ-תיבה: $\{\, (x,y) \mid |x-x_0| < \epsilon,\ \ |y-y_0| < \epsilon \}$
נקודה פנימית של התחום $\mathscr{D}$: קיימת ϵ-סביבה של (x_0, y_0) שכלולה בתחום $\mathscr{D}$.
נקודה חיצונית של התחום $\mathscr{D}$: קיימת ϵ-סביבה של (x_0, y_0) שכלולה במשלים לתחום $\mathscr{D}$.
נקודת שפה: נקודה שאינה פנימית ואינה חיצונית
תחום פתוח: זהו תחום שבו כל נקודה ששייכת לו היא פנימית
תחום סגור: זהו תחום שבו כל נקודות השפה כלולות בתוכו
תחום חצי־פתוח חצי־סגור: חלק מנקודות השפה שייכות ל־ $\mathscr{D}$ וחלק אינו שייך ל־ $\mathscr{D}$
תחום קשיר: בין כל שתי נקודות A, B, בתוך התחום קיימת מסילה המחברת את הנקודה A לנקודה B, כך שכל המסילה בשלמותה כלולה בתחום $\mathscr{D}$.
תחום פשוט קשר: תחום קשיר ללא חורים
תחום חסום: קיים דיסק או מלבן שמכיל את כל התחום

פרבולואיד פשוט: $z = x^2 + y^2$
כדור ברדיוס R שמרכזו בנקודה (x_0, y_0, z_0): $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2$
אליפסואיד קנוני: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = R^2$

הגדרה 9: (גבול) לפונקציה $f(x,y)$ יש גבול L בנקודה (x_0, y_0) אם (x_0, y_0) נקודה פנימית של תחום ההגדרה, ולכל $\epsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל נקודה (x,y) בסביבת־δ של (x_0, y_0), $|f(x,y) - L| < \epsilon$.

משפט 38: (Heine) לפונקציה $f(x,y)$ יש גבול L בנקודה (x_0, y_0) אם ורק אם לכל סדרת נקודות $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$, אם $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (x_0, y_0)$, אז $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = L$.

הגדרה 10: (רציפות בנקודה)
פונקציה $f(x,y)$ **רציפה בנקודה** (x_0,y_0) אם
א. (x_0,y_0) נקודה פנימית של תחום ההגדרה
ב. $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$.

הגדרה 11: (רציפות בתחום)
פונקציה $f(x,y)$ נקראת **רציפה בתחום** $\mathscr{D}$ אם היא רציפה בכל נקודה של $\mathscr{D}$.

משפט 39: אם $f(x,y)$ היא פונקציה אלמנטרית המוגדרת בסביבת הנקודה (x_0,y_0) אזי $f(x,y)$ רציפה בנקודה (x_0,y_0) . כלומר: $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$

מסקנה: פונקציה אלמנטרית רציפה בכל נקודה פנימית של תחום ההגדרה שלה.

משפט 40: סכום, הפרש, או כפל של פונקציות רציפות נותן פונקציה רציפה. מנה של פונקציות רציפות רציפה בכל נקודה שבה המכנה אינו מתאפס.

הגדרה 12: (נגזרות חלקיות)
תהי $f(x,y)$ פונקציה המוגדרת בסביבת הנקודה (x_0,y_0) .
הנגזרת החלקית לפי x מוגדרת על ידי הגבול (אם הוא קיים וסופי)

$$f_x(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

באופן דומה, **הנגזרת החלקית לפי** y מוגדרת על ידי הגבול (אם הוא קיים וסופי)

$$f_y(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

משפט 41: אם $f(x,y)$ היא פונקציה אלמנטרית המוגדרת בסביבת הנקודה (x_0,y_0) אזי לפונקציה $f(x,y)$ יש נגזרות חלקיות לפי x ולפי y בנקודה (x_0,y_0) .

מסקנה: לפונקציה אלמנטרית יש נגזרות חלקיות בכל נקודה פנימית של תחום ההגדרה שלה.

הגדרה 13: (דיפרנציאביליות)
פונקציה $f(x,y)$ נקראת **דיפרנציאבילית בנקודה** (x_0,y_0) אם קיימים קבועים A, B, ופונקציות $\alpha(\Delta x,\Delta y)$, $\beta(\Delta x,\Delta y)$, כך שבסביבה מסוימת של הנקודה (x_0,y_0) מתקיים

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)=f(x_0,y_0)+A\Delta x+B\Delta y+\alpha(\Delta x,\Delta y)\Delta x+\beta(\Delta x,\Delta y)\Delta y$$

ובנוסף לכך $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\alpha(\Delta x,\Delta y)=0$, $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\beta(\Delta x,\Delta y)=0$

משפט 42: אם לפונקציה $f(x,y)$ יש נגזרות חלקיות רציפות בסביבת הנקודה (x_0,y_0), אז $f(x,y)$ דיפרנציאבילית בנקודה (x_0,y_0) והקבועים A, B הם למעשה הנגזרות החלקיות של f בנקודה (x_0,y_0)

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \qquad B = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$$

מסקנה: אם לפונקציה $z = f(x,y)$ יש נגזרות חלקיות רציפות בסביבת הנקודה (x_0,y_0), אז לגרף של $f(x,y)$ קיים מישור משיק בנקודה (x_0,y_0,z_0), כאשר $z_0 = f(x_0,y_0)$, ומשוואת המישור המשיק נתונה על ידי

$$z = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) \tag{21}$$

או באופן שקול

$$z - z_0 = f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) \tag{22}$$

במונחים של דיפרנציאל ניתן לרשום

$$dz = f_x dx + f_y dy \tag{23}$$

הוקטור הנורמל למישור המשיק הוא

$$\vec{N} = f_x(x_0,y_0)\vec{i} + f_y(x_0,y_0)\vec{j} - \vec{k} \tag{24}$$

הרכבת פונקציות וכלל השרשרת

דוגמא: אם $z = f(x,y)$, $x = g(s,t)$, $y = h(s,t)$, אז ההרכבה של f עם g, h, היא

$$z = F(s,t) = f(g(s,t), h(s,t))$$

יוצא שהמשתנה z תלוי בעקיפין במשתנים s, t.

משפט 43: **(כלל השרשרת)**

אם הפונקציות $g(s,t)$, $h(s,t)$ דיפרנציאביליות בנקודה (s_0,t_0), ואם הפונקציה $f(x,y)$ דיפרנציאבילית בנקודה (x_0,y_0), $x_0 = g(s_0,t_0)$, $y_0 = h(s_0,t_0)$, אז שני השוויונים הבאים מתקיימים בנקודה (s_0,t_0)

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial s} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \\ \frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} \end{aligned}$$

נציין כי המשפט האחרון הוא רק דוגמא אחת מתוך רבות לכלל השרשרת שחל על הרכבות של פונקציות בעלות מספר משתנים. באופן דומה ניתן לנסח כלל שרשרת עבור $z = f(x,y)$, $x = g(t)$, $y = h(t)$. או

עבור: $w = f(x,y,z)$ כאשר המשתנים x, y, z, עשויים להיות תלויים באחד, שניים או יותר משתנים, וכדומה.

נגזרות מסדר גבוה (לא נכלל בחומר אבל חשוב להכיר!)

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

משפט 44: אם שתי הנגזרות המעורבות f_{xy} , f_{yx} רציפות בסביבת הנקודה (x_0, y_0) אז $f_{xy}(x_0,y_0) = f_{yx}(x_0,y_0)$.