פיתרון גיליון תרגילים 4
חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי ב'

מועד פירסום: יום חמישי, 18.01.2018

הערה: נא לקרוא בעיון את הפיתרונות לפני הדפסה. במידה ונפלו שגיאות כלשהם, או ניתן פיתרון חלקי, או חסר פיתרון לשאלה מסוימת נא להודיע לי בהקדם באמצעות קבוצת הוואטסאפ.

.1 הוכח שאם $\vec{u}$, $\vec{v}$, וקטורים מקבילים (קו־ליניאריים) במרחב $\mathbb{R}^3$ אז $\vec{u}\times\vec{v}=\vec{0}$.

פיתרון: נסמן $\vec{u}=(x,y,z)$. על פי ההגדרה קיים סקלר α כל ש־

$$\vec{v}=\alpha\vec{u}=(\alpha x,\alpha y,\alpha, z)$$

לכן

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x & y & z\\ \alpha x & \alpha y & \alpha, z\end{vmatrix}=\alpha\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x & y & z\\ x & y & z\end{vmatrix}=0$$

כידוע דטרמיננטה שבה שתי שורות הן זהות מתאפסת.

.2 נתונים שני הוקטורים הבאים במרחב $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned}\vec{u} &= (1,0,2)\\ \vec{v} &= (0,-1,1)\end{aligned}$$

מצא וקטור $\vec{w}$ הניצב לשני הוקטורים $\vec{u}$, $\vec{v}$ ובנוסף מקיים $\|\vec{w}\|=2\sqrt{6}$. כמה וקטורים $\vec{w}$ כאלה יש?

פיתרון: נסמן $\vec{w}=(x,y,z)$. התנאים $\vec{u}\perp\vec{w}$, $\vec{v}\perp\vec{w}$, שקולים לכך ש־ $\vec{w}=\alpha(\vec{u}\times\vec{v})$. כלומר

$$\vec{w}=\alpha\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 1\end{vmatrix}=2\alpha\vec{i}-\alpha\vec{j}-\alpha\vec{k}$$

מהנתון $\|\vec{w}\| = 2\sqrt{6}$ נובע כי

$$\|\vec{w}\|^2 = 4\alpha^2 + \alpha^2 + \alpha^2 = 6\alpha^2 = 24$$

לכן $\alpha = \pm 2$, ולכן קיימים שני פיתרונות אפשריים עבור w

$$\begin{cases} w = 4\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k} \\ w = -4\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k} \end{cases}$$

3. הוכח כי שני המישורים הבאים ניצבים אחד לשני

$$\begin{aligned} x - 2y + 5z + 2 &= 0 \\ 7x + 6y + z - 2 &= 0 \end{aligned}$$

פיתרון: שני מישורים ניצבים אחד לשני אם ורק אם הוקטורים הנורמלים שלהם ניצבים אחד לשני

$$\begin{aligned} \vec{N_1} &= \vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k} \\ \vec{N_2} &= 7\vec{i} + 6\vec{j} + \vec{k} \end{aligned}$$

קל לראות כי $\vec{N_1} \cdot \vec{N_2} = 0$. כלומר $\vec{N_1} \perp \vec{N_2}$.

4. מצא את משוואת הישר העובר דרך הנקודה $(-4, 3, 0)$ ומקביל לישר

$$\begin{cases} x - 2y + z = 4 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$$

פיתרון: הנורמלים של שני המישורים הם

$$\begin{aligned} \vec{N_1} &= \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k} \\ \vec{N_2} &= 2\vec{i} + \vec{j} + 5\vec{k} \end{aligned}$$

וקטור הכיוון של הישר הוא המכפלה הוקטורית של שני הנורמלים של שני המישורים

$$\vec{u} = (\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}) \times (2\vec{i} + \vec{j} + 5\vec{k}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$$

נתון שהישר עובר דרך הנקודה $P(-4, 3, 0)$, ולכן ההצגה הקרטזית של הישר היא

$$x + 4 = \frac{y - 3}{3} = \frac{z}{5}$$

5. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות.

במידת האפשר, נסה לשרטט סקיצה של התחום על מישור ה־xy.

קבע האם התחום מהווה קבוצה פתוחה? סגורה? קשירה? פשוטת קשר? חסומה?

א. $z = \sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{4 - y^2}$

ב. $z = \dfrac{\sin(x-y)}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$

ג. $z = \dfrac{\sin(x-y)}{y^2 - 4x^2}$

ד. $z = \ln(x^2 + y)$

ה. $z = \sqrt{\dfrac{1 + x + y}{1 - x - 2y}}$

ו. $z = \dfrac{1}{\ln(2 + x^2 + y^2)}$

ז. $z = \arcsin\left(\dfrac{x}{2}\right) \cdot \sqrt{x^2 - y^2 - 1}$

ח. $z = \sqrt{x - 1} + \arccos y$

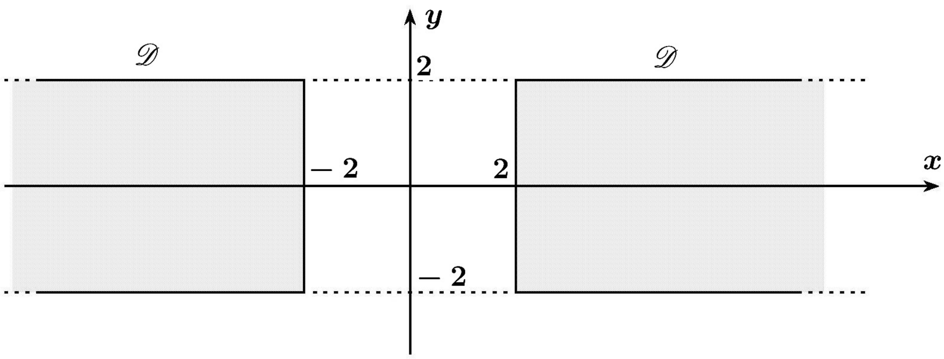
פיתרון:

א. הביטוי $\sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{4 - y^2}$ מוגדר אם ורק אם $x^2 - 4 \geq 0$ וגם $4 - y^2 \geq 0$. כלומר

$$(x \leq 2 \text{ or } x \geq 2) \text{ and } -2 \leq y \leq 2$$

השירטוט של התחום אינו קשה.

זהו תחום בלתי חסום, לא קשיר, ולכן גם אינו פשוט קשר.

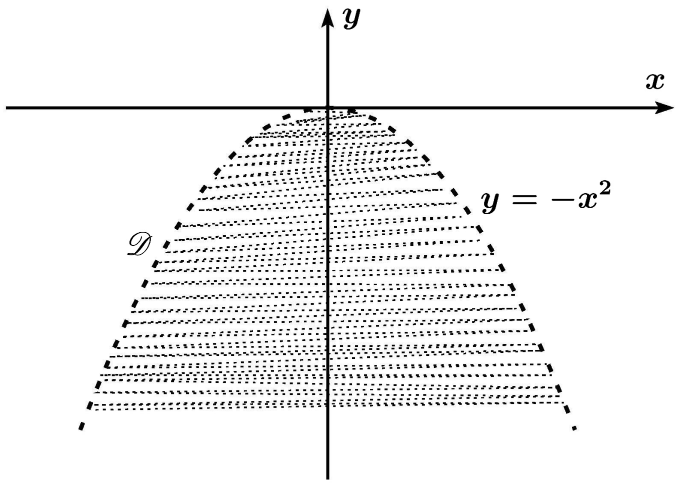


ב. כאן ברור שתחום ההגדרה הוא כל המישור הממשי $\mathbb{R}^2$. זהו תחום פשוט קשר, פתוח וסגור בו־זמנית! אך לא חסום

ג. תחום ההגדרה כאן הוא המישור $\mathbb{R}^2$ ללא הישרים $y = 2x$,$y = -2x$

$$\mathscr{D} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \neq 2x, \quad y \neq -2x \right\}$$

ד. פונקציית הלוגריתם מוגדרת רק עבור מספרים חיוביים ולכן $x^2 + y > 0$, או $y < -x^2$.
זהו התחום המישורי שנמצא מתחת לפרבולה ההפוכה $y = -x^2$, אך אינו כולל את הפרבולה עצמה.



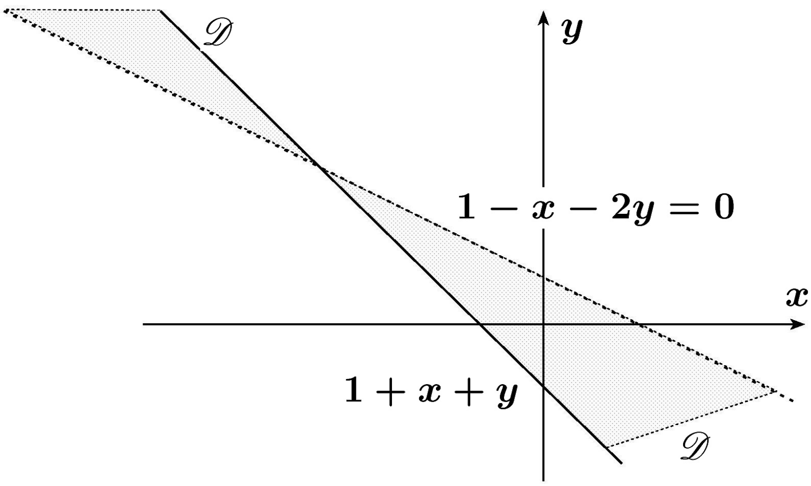
זהו תחום קשיר, פשוט קשר, אך לא חסום.

ה. הדרישה כאן היא

$$\frac{1+x+y}{1-x-2y} \geq 0, \qquad 1-x-2y \neq 0$$

לכן

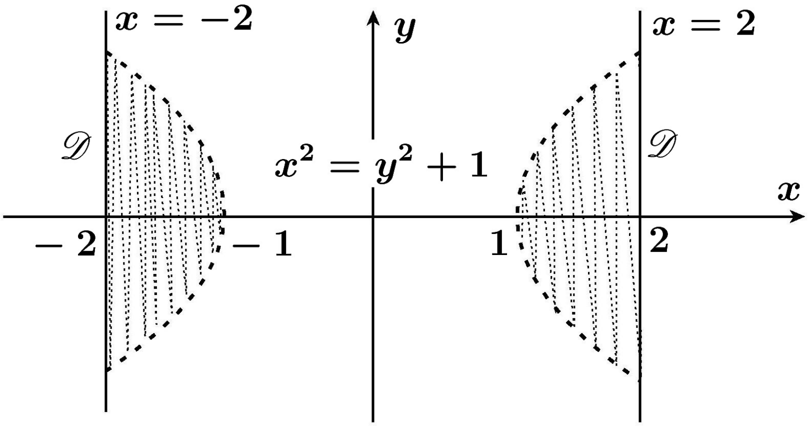
$$(1-x-2y>0 \text{ and } 1+x+y \geq 0) \text{ or } (1-x-2y<0 \text{ and } 1+x+y \leq 0)$$



ו. תחום ההגדרה כאן הוא כל המישור הממשי $\mathbb{R}^2$

ז. תחום ההגדרה של הפונקציה $\arcsin x$ הוא $[-1,1]$ ולכן הביטוי $\arcsin \frac{x}{2}$ מוגדר רק עבור $|x| \leq 2$. הביטוי $\sqrt{x^2-y^2-1}$ מוגדר עבור נקודות (x,y) המקיימות $x^2 \leq y^2+1$, לכן

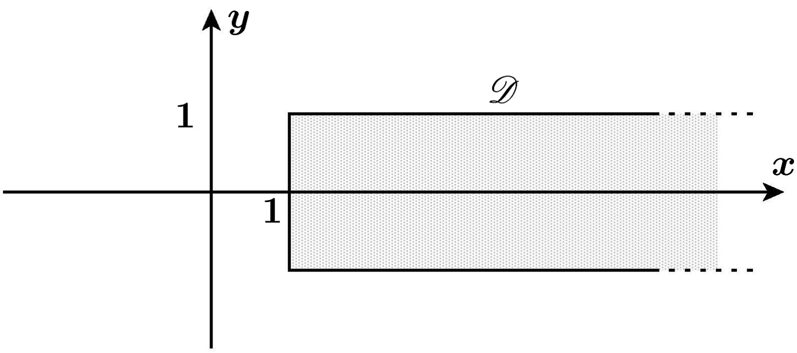
$$\mathscr{D} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 2 \text{ and } x^2 \leq y^2+1 \right\}$$



ח. הפונקציה $\arccos y$ מוגדרת בתחום $|y| \le 1$, והביטוי $\sqrt{x-1}$ מוגדר עבור $x \ge 1$.

לכן

$$\mathscr{D} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1 < x < \infty \text{ and } |y| \le 2 \right\}$$



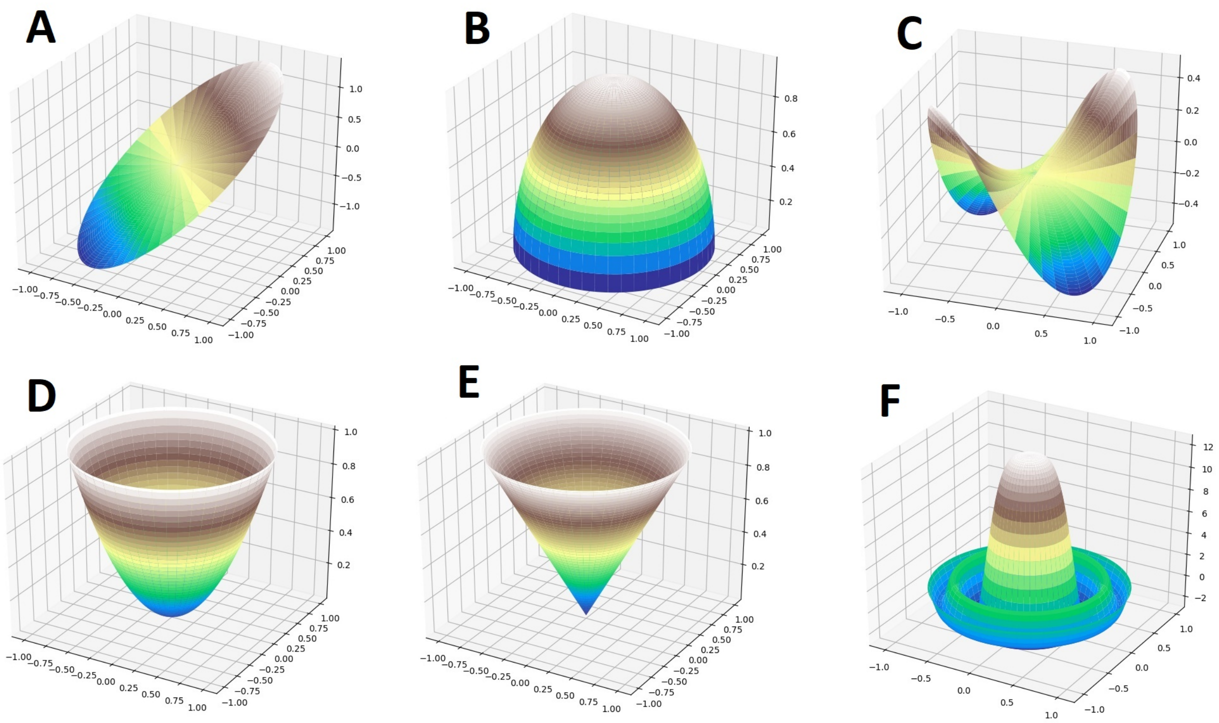
6. נתונות ששת הפונקציות הבאות

$$f_1(x,y) = x^2 + y^2 \qquad f_2(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \qquad f_3(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$$

$$f_4(x,y) = x + y \qquad f_5(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \qquad f_6(x,y) = \frac{\sin 4\pi(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$$

שכולן מוגדרות על התחום המישורי $\mathscr{D} = \{ (x,y) \,|\, 0 < x^2+y^2 < 1 \}$.

בצע התאמה בין כל פונקציה ובין המשטח התלת־מימדי המתאים לה



פיתרון: בכדי לבצע התאמה בין פונקציה למשטח, יש לקחת בחשבון תכונות כגון האם הפונקציה חיובית על כל תחום ההגדרה? ולכן המשטח חייב להימצא מעל למישור ה־xy. את החרוט האליפטי וההיפרבולואיד האליפטי אנחנו מכירים כבר מהמצגת שראינו בשיעור. פונקציות מחזוריות כמו $\sin$ מייצרות משטחים גליים, וכדומה.

פונקציה	משטח
$f_1(x,y) = x^2 + y^2$	D
$f_2(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$	E
$f_3(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$	B
$f_4(x,y) = x + y$	A
$f_5(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$	C
$f_6(x,y) = \frac{\sin 4\pi(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$	F