פיתרון גיליון תרגילים 2

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי ב'

מועד פירסום: 17.12.2017, שעה: 12:00

הערה: נא לקרוא בעיון את הפיתרונות לפני הדפסה. במידה ונפלו שגיאות כלשהם, או ניתן פיתרון חלקי, או חסר פיתרון לשאלה מסוימת נא להודיע לי בהקדם באמצעות קבוצת הוואטסאפ.

1. בדוק התכנסות בהחלט, התכנסות בתנאי, או התבדרות של כל אחד מהטורים הבאים.

א. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n}}$ **ב.** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{4n\cos(n\pi)}{2n^2+1}$ **ג.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[7]{n^2}\sqrt[6]{n}}$

ד. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n\ln\sqrt{n}}$ **ה.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\ln(n+5)}{2n+1}$ **ו.** $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{\pi}{n}$

ז. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}e^{\sqrt{n}}}{2^n}$ **ח.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}{n}$

פיתרון:

א. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n}}$

הטור מתכנס על פי מבחן לייבניץ. הסדרה $a_n=\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ היא סדרה מונוטונית יורדת השואפת לאפס. הטור אינו מתכנס בהחלט כי הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}$$

מתבדר על פי מבחן טורי־p. לכן הטור שלנו מתכנס בתנאי.

ב. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{4n\cos(n\pi)}{2n^2+1}$

ראשית יש לשים לב לכך כי $\cos n\pi=(-1)^n$ ולכן מדובר בטור מחליף סימן. הסדרה

$a_n = \frac{4n}{2n^2+1}$ מונוטונית יורדת כי הנגזרת של הפונקציה $f(x) = \frac{4x}{2x^2+1}$ היא

$$f'(x) = \frac{4-8x^2}{(2x^2+1)^2} < 0 \qquad (x \geq 1)$$

שלילית עבור כל $x \geq 1$. לא קשה להוכיח שגם $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, ולכן מתקיימים כל תנאי מבחן לייבניץ להיתכנסות.

הטור אינו מתכנס בהחלט על ידי שימוש במבחן ההשוואה הגבולי של הטור $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{4n}{2n^2+1}$ עם הטור ההרמוני המתבדר $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$.

ג. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[7]{n^2}\sqrt[6]{n}}$

קל לראות ש־

$$a_n = \frac{1}{\sqrt[7]{n^2}\sqrt[6]{n}} = \frac{1}{n^{\frac{2}{7}} \cdot n^{\frac{1}{6}}} = \frac{1}{n^{\frac{2}{7}+\frac{1}{6}}} = \frac{1}{n^{\frac{19}{42}}}$$

לכן על פי מבחן טורי־p הטור שלנו מתבדר. מאחר ומדובר בטור חיובי, הוא אינו מתכנס בהחלט וכמובן אינו מתכנס בתנאי.

ד. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n\ln\sqrt{n}}$

הטור מתכנס על פי מבחן לייבניץ. ראשית כל יש לשים לב לכך ש־

$$a_n = \frac{1}{2n\ln\sqrt{n}} = \frac{1}{2n\ln n^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{n\ln n}$$

הסדרה $a_n = \frac{1}{n\ln n}$ מונוטונית יורדת כי הנגזרת של הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x\ln x}$ שלילית בקרן $[2,\infty)$

$$\forall x \geq 2: \quad f'(x) = \frac{-1-\ln x}{(x\ln x)^2} < 0$$

הטור אינו מתכנס בהחלט על פי מבחן האינטגרל: הוכחנו בכיתה כי האינטגרל $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\ln x}$ מתבדר על ידי שימוש בהצבה $u = \ln x$. לכן הטור שלנו מתכנס בתנאי.

ה. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\ln(n+5)}{2n+1}$

יש להשתמש במבחן לייבניץ. בסדרה החיובית שלנו היא $a_n = \frac{\ln(n+5)}{2n+1}$. זוהי סדרה

מונוטונית יורדת כי הפונקציה $f(x)=\frac{\ln(x+5)}{2x+1}$ מונוטונית יורדת בקרן $[1,\infty)$, כי הנגזרת שלה

$$f'(x)=\frac{\frac{2x+1}{x+5}-2\ln(x+5)}{(2x+1)^2}=\frac{2-\frac{9}{x+5}-2\ln(x+5)}{(2x+1)^2}$$

שלילית עבור כל $x>2$, כי $\ln 9>\ln e^2=2$, ואז המונה תמיד שלילי. אפשר גם להסתפק בעובדה ש־ $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=-\infty$, ולכן קיים מספר טבעי N כך שלכל $x>N$, $f'(x)$ שלילית, ולכן הסדרה מונוטונית יורדת החל מהאיבר a_N, שזה בהחלט מספיק עבור מבחן לייבניץ.

התנאי השני הדרוש למבחן לייבניץ הוא $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$. זה נובע מייד מהכלל של לופיטל

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x+5)}{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2(x+5)}=0$$

לכן הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\ln(n+5)}{2n+1}$ מתכנס על פי מבחן לייבניץ.

הטור אינו מתכנס בהחלט על פי מבחן ההשוואה מול הטור ההרמוני

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+5)}{2n+1}:\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\ln(n+5)}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+5)}{2+\frac{1}{n}}=\frac{\infty}{2+0}=\infty$$

אפשר להשתמש גם במבחן ההשוואה הראשון על ידי הוכחת אי־השוויון

$$\frac{n\ln(n+5)}{2n+1}>\frac{1}{3n}$$

ומאחר $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n}=\frac{1}{3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ נקבל שהטור שלנו גדול משליש הטור ההרמוני ולכן מתבדר. לכן הטור שלנו מתכנס בתנאי.

ו. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{\pi}{n}$

גם כאן יש להשתמש במבחן לייבניץ. בסדרה החיובית שלנו היא $a_n=\sin\frac{\pi}{n}$. זוהי סדרה מונוטונית יורדת כי הפונקציה $f(x)=\sin\frac{\pi}{x}$ מונוטונית יורדת בקרן $(2,\infty)$, כי הנגזרת שלה

$$f'(x)=-\frac{\pi}{x^2}\cdot\cos\frac{\pi}{x}$$

שלילית עבור כל $x > 2$, כי אז $0 < \frac{\pi}{x} < \frac{\pi}{2}$, כלומר הזווית נמצאת ברביע הראשון, ולכן הקוסינוס שלה חיובי, אך יש להכפיל בביטוי השלילי $-\frac{\pi}{x^2}$.

ברור כי $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\frac{\pi}{n} = 0$ (כי $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\pi}{n} = 0$). לכן על פי מבחן לליבניץ לטורים מחליפי סימן, הטור $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n \sin\frac{\pi}{n}$ מתכנס.

הטור אינו מתכנס בהחלט על פי מבחן ההשוואה עם הטור ההרמוני

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} n\sin\frac{\pi}{n} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\pi\sin x}{x} = \pi$$

ביצענו הצבה $\frac{\pi}{n} = x$, ולכן $\frac{\pi}{x} = n$, וכאשר $n \to \infty$, $x \to 0^+$. לכן הטור שלנו מתכנס בתנאי.

ז. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}e^{\sqrt{n}}}{2^n}$

הטור מתכנס בהחלט על פי מבחן השורש

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{e^{\sqrt{n}}}{2^n}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{\sqrt{n}}{n}}}{2} = \lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}}{2} = \frac{e^0}{2} = \frac{1}{2} < 1$$

ח. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}{n}$

הטור מתכנס בהחלט על פי מבחן ההשוואה מול טור־p כאשר $p = \frac{3}{2}$

$$|a_n| = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} \le \frac{1}{n(\sqrt{n}+\sqrt{n})} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

2. הוכח או הפרך על ידי דוגמא נגדית

א. אם $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ הוא טור חיובי מתכנס, אזי גם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{\sqrt[n]{n}}$ טור חיובי מתכנס.

הוכחה: הטענה נכונה. הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{\sqrt[n]{n}}$ מתכנס על פי מבחן ההשוואה: מאחר ולכל n טבעי, $\sqrt[n]{n} > 1$

$$\frac{a_n}{\sqrt[n]{n}} \le a_n$$

ב. אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ הוא טור מתכנס בהחלט אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ מתכנס.

הוכחה: הטענה נכונה על פי מבחן ההשוואה. מאחר והטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, נובע כי

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

לכן קיים מספר טבעי N כך שלכל $n > N$, $|a_n| < 1$. לכן לכל $n > N$, $a_n^2 < |a_n|$. לכן על פי מבחן ההשוואה הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ מתכנס. מאחר וזהו טור חיובי, הוא גם מתכנס בהחלט.

ג. אפשר להשתמש במבחן האינטגרל בכדי לבדוק את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{4+\cos n\pi}$

הפרכה: הטענה אינה נכונה. מבחן האינטגרל דורש כי האיבר הכללי של הטור היא סדרה מונוטונית יורדת לאפס, אבל על פי כלל הסנדביץ' הסדרה $a_n = \frac{\ln n}{4+\cos n\pi}$ שואפת לאינסוף:

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}:\ -1 \le \cos n\pi \le 1 \quad &\Longrightarrow\ \forall n \in \mathbb{N}:\ 3 \le 4+\cos n\pi \le 5 \\ &\Longrightarrow\ \forall n \in \mathbb{N}:\ \tfrac{\ln n}{5} \le \tfrac{\ln n}{4+\cos n\pi} \end{aligned}$$

מאחר ו־$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{5} = \infty$, יוצא ש־$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{4+\cos n\pi} = \infty$, ולכן מבחן האינטגרל אינו ישים כאן.

ד. אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, שני טורים מתכנסים בהחלט אז גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ הוא טור מתכנס בהחלט.

הוכחה: הטענה נכונה. מההתכנסות של שני הטורים נובע שקיים N טבעי כך שלכל $n > N$, $|a_n| < 1$. לכן לכל $n > N$, $|a_n b_n| < |b_n|$. לכן על פי מבחן ההשוואה הטור $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$ מתכנס. כלומר הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס בהחלט.

ה. $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n^6} < 0.001$

הוכחה: הטענה נכונה. על פי הנוסאות הנלוות למבחן האינטגרל (ראה שיעור 4 בעמוד 53)

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n^6} \le \int_3^{\infty} \frac{dx}{x^6} = \frac{1}{5\cdot 3^5} = \frac{1}{1215} < 0.001$$

ו. $\int_{10}^{\infty}\frac{1}{x^2+1} < \sum_{n=9}^{\infty}\frac{1}{n^2+1} < \int_{9}^{\infty}\frac{1}{x^2+1}$

הפרכה: הטענה אינה נכונה. רואים את זה ברור בתרשים 4.4 שבשיעור 4 בשקפים של הקורס. התרשים מתייחס למקרה $n=1$ אבל ברור שהוא נכון גם עבור $n=9$

$$\int_{9}^{\infty}\frac{1}{x^2+1} \le \sum_{n=9}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$$

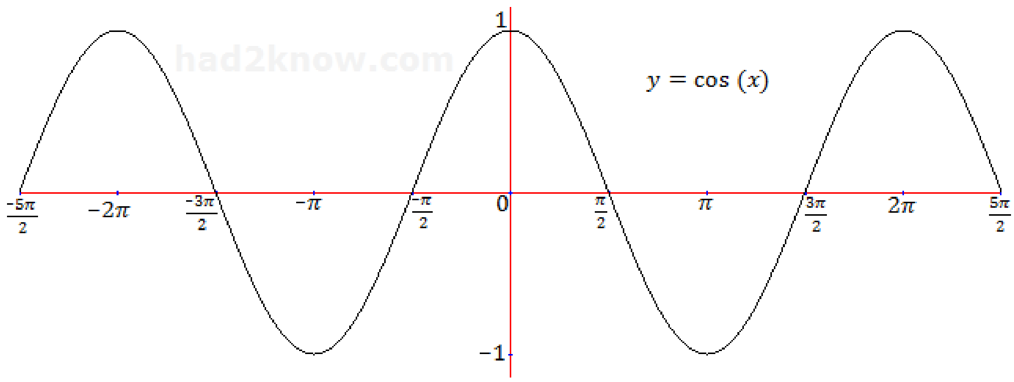
לכן הטענה $\int_{9}^{\infty}\frac{1}{x^2+1} < \sum_{n=9}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$ אינה נכונה.

ז. ניתן להשתמש במבחן האינטגרל בכדי לבדוק התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n}$

הפרכה: הטענה אינה נכונה. מבחן האינטגרל דורש שהאיבר הכללי של הטור

$$a_n = \frac{\cos n}{n}$$

תהיה סדרה חיובית, אבל קל מאוד למצוא מספרים טבעיים n אשר עבורם $\cos n < 0$. למשל $\cos 2 = -0.4161$. למעשה יש אינסוף איברים שליליים בסדרה $\cos n$ כפי שניתן ללמוד מהגרף המחזורי של $\cos x$!



איור 1: הגרף המחזורי של $\cos x$

כל אחד מהקטעים $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, $[\frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}]$, $[\frac{9\pi}{2}, \frac{11\pi}{2}]$, ..., מכיל מספרים טבעיים n, שעבורם $\cos n < 0$. באופן כללי, בכל קטע מהצורה $\left[\frac{(4k+1)\pi}{2}, \frac{(4k+3)\pi}{2}\right]$, יש לפחות מספר טבעי אחד n עבור $\cos n < 0$ (כי אורך הקטע גדול מ־1!). לכן הסדרה $\cos n$ אינה מתאימה עבור מבחן לייבניץ.

ח. אם $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה חיובית, ואם $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ הוא טור מתכנס, אז $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה מונוטונית יורדת ששואפת לאפס.

הפרכה: הטענה אינה נכונה. למשל $a_n = \frac{1+\sin^2\frac{n\pi}{2}}{n^2}$. הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ מתכנס בהחלט על פי מבחן ההשוואה כי

$$\frac{1+\sin^2\frac{n\pi}{2}}{n^2} \le \frac{2}{n^2}$$

אבל הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ אינה מונוטונית כי הביטוי $1+\sin^2\frac{n\pi}{2}$ מקבל ערכים מחזוריים: $1, 2, 1, 2, \ldots$

3. חקור התכנסות נקודתית והתכנסות במידה שווה של סדרת פונקציות בקטע הנתון. מצא את הפונקציה הגבולית (אם היא קיימת) בתחום ההתכנסות הרשום בצד שמאל.

א. $f_n(x) = x^n$, $\quad 0 \le x \le \frac{1}{2}$

פיתרון: בכיתה הוכחנו כי סדרת הפונקציות x^n מתכנסת נקודתית לפונקציה הגבולית $f(x) = 0$ בכל הקטע $[0,1)$. מאחר והקטע $[0,\frac{1}{2}]$ נכלל בקטע זה, הטענה נכונה גם עבורו. נוכיח כי הסדרה מתכנסת במידה שווה בקטע $[0,\frac{1}{2}]$ על ידי מבחן הסופרמום. ברור כי לכל x בקטע $[0,\frac{1}{2}]$ מתקיים

$$x^n \le \frac{1}{2^n}$$

ולכן

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0\le x\le\frac{1}{2}} |x^n - 0| \le \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n} = 0$$

לכן על פי מבחן הסופרמום, סדרת הפונקציות $f_n(x) = x^n$ מתכנסת במידה שווה לפונקציית האפס בקטע $[0,\frac{1}{2}]$.

ב. $f_n(x) = x^n(1-x^n)$, $\quad 0 \le x \le 1$

פיתרון: קל להוכיח כי סדרת הפונקציות מתכנסת נקודתית לפונקציית האפס על כל הקטע הסגור $[0,1]$. עבור $0 < x < 1$ זה פשוט

$$\lim_{n\to\infty} x^n(1-x^n) = \lim_{n\to\infty} x^n - \lim_{n\to\infty} x^{2n} = 0 - 0 = 0$$

עבור $x=0$ או $x=1$ הביטוי $x^n(1-x^n)$ מתאפס לכל n טבעי ולכן גם הגבול מתאפס. נחשב את

$$\sup_{0\le x\le 1}|x^n(1-x^n)-0| = \sup_{0\le x\le 1} x^n(1-x^n)$$

על ידי מציאת המקסימום המוחלט של הפונקציה $f_n(x)=x^n(1-x^n)$ בקטע $[0,1]$. כאמור, הפונקציה מתאפסת בקצוות וחיובית בתוך הקטע, ולכן המקסימום חייב להתקבל בנקודה קריטית $f_n'(x)=0$

$$f_n'(x)=(x^n-x^{2n})'=nx^{n-1}-2nx^{n-1}=nx^{n-1}(1-2x^n)=0$$

מאחר ו־x היא נקודה פנימית, $nx^{n-1}\neq 0$, ולכן נקודת המקסימום המוחלט היא שמתקבלת מקיימת $1-2x^n=0$, ולכן

$$x=\frac{1}{\sqrt[n]{2}}$$

הערך של הפונקציה $f_n(x)$ בנקודה זו הוא

$$f_n(x)=x^n-x^{2n}=\left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)^n-\left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)^{2n}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

לכן

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{0\le x\le 1}|x^n(1-x^n)-0|=\lim_{n\to\infty}\sup_{0\le x\le 1}x^n(1-x^n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

לכן על פי מבחן הסופרמום, סדרת הפונקציות $f_n(x)=x^n(1-x^n)$ אינה מתכנסת במידה שווה בקטע $[0,1]$.

ג. $f_n(x)=\dfrac{1}{n+x}$, $\quad 0<x<\infty$

פיתרון: קל לראות שגם כאן סדרת הפונקציות מתכנסת נקודתית לפונקציית האפס על כל הקרן $(0,\infty)$

$$0\le\frac{1}{n+x}\le\frac{1}{n}$$

לכן מכלל הסנדביץ' נובע

$$0 \le \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+x} \le \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

כלומר

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+x} = 0$$

לכל n טבעי, $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\sup_{0<x<\infty} \left| \frac{1}{n+x} - 0 \right| = \sup_{0<x<\infty} \frac{1}{n+x} = \frac{1}{n}$$

ולכן

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0<x<\infty} \left| \frac{1}{n+x} - 0 \right| = \lim_{n\to\infty} \sup_{0<x<\infty} \frac{1}{n+x} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

לכן על פי מבחן הסופרמום, סדרת הפונקציות $\frac{1}{n+x}$ מתכנסת במידה שווה לפונקציית האפס על הקרן $(0, \infty)$.

ד. $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n}$, $\quad -\infty < x < \infty$

פיתרון: קל לראות שגם כאן סדרת הפונקציות מתכנסת נקודתית לפונקציית האפס על כל הקטע $(-\infty, \infty)$. לכל n טבעי, וכל x ממשי

$$0 \le \sin nx \le 1$$

לכן

$$0 \le \frac{\sin nx}{n} \le \frac{1}{n}$$

לכן מכלל הסנדביץ' נובע

$$0 \le \lim_{n\to\infty} \frac{\sin nx}{n} \le \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

כלומר

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin nx}{n} = 0$$

לכל n טבעי, $n=1,2,3,\ldots$

$$\sup_{0<x<\infty}\left|\frac{\sin nx}{n}-0\right|=\sup_{0<x<\infty}\frac{|\sin nx|}{n}=\frac{1}{n}$$

ולכן

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{0<x<\infty}\left|\frac{\sin nx}{n}-0\right|=\lim_{n\to\infty}\sup_{0<x<\infty}\frac{|\sin nx|}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

לכן על פי מבחן הסופרמום, סדרת הפונקציות $\frac{\sin nx}{n}$ מתכנסת במידה שווה לפונקציית האפס על הקטע $(-\infty,\infty)$.