פיתרון גיליון תרגילים 1
חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי ב'

מועד פירסום: 20.11.2017, שעה: 12:00

הערה: נא לקרוא בעיון את הפיתרונות לפני הדפסה. במידה ונפלו שגיאות כלשהם, או ניתן פיתרון חלקי, או חסר פיתרון לשאלה מסוימת נא להודיע לי בהקדם באמצעות קבוצת הוואטסאפ.

1. מצא את נוסחת האיבר הכללי של הטורים הבאים והוכח שהם מתבדרים

א. $1+3+5+7+9+11+13+\cdots$

ב. $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\cdots$

ג. $2+\frac{1}{2}+4+\frac{1}{4}+6+\frac{1}{6}+8+\frac{1}{8}+\cdots$

ד. $0.31+0.301+0.3001+0.30001+0.300001+\cdots$

פיתרון:

א. נוסחת הסכום החלקי היא $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n}2k+1$. זהו טור חשבוני שבו האיבר הראשון הוא $a=a_0=1$, וההפרש הוא $d=2$. על פי נוסחת הסכום של טור חשבוני סופי שהוכחנו בכיתה

$$S_n=\frac{(2a+nd)(n+1)}{2}=\frac{(2+2n)(n+1)}{2}=(n+1)^2$$

ברור כי $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)^2=\infty$, ולכן הטור מתבדר.

דרך קצרה יותר להוכיח את התבדרות הטור היא על פי מבחן ההתבדרות: תנאי הכרחי להתכנסות טור הוא קיום הגבול $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$. במקרה שלנו

$$a_n=2n+1$$

ולכן $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$. לכן הטור מתבדר.

ב. נוסחת האיבר הכללי של הטור היא $a_n=\frac{n}{n+1}$. הטור מתבדר על פי מבחן ההתבדרות

מאחר ו־$\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

ג. $2+\frac{1}{2}+4+\frac{1}{4}+6+\frac{1}{6}+8+\frac{1}{8}+\cdots$

נוסחת האיבר הכללי של הטור היא

$$a_n = \begin{cases} n+1, & n \text{ אי־זוגי} \\ \frac{1}{n}, & n \text{ זוגי} \end{cases}$$

יוצא שלכל k טבעי, $a_{2k-1} = 2k$, ולכן תת־הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתבדרת. מאחר ולסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ יש תת־סדרה מתבדרת $\{a_{2k-1}\}_{k=1}^{\infty}$, הרי שהסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ אינה מתכנסת לאפס, ולכן על פי מבחן ההתבדרות, הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.

ד. $0.31+0.301+0.3001+0.30001+0.300001+\cdots$

לא קשה לראות כי נוסחת האיבר הכללי כאן היא $a_n = 0.3+\frac{1}{10^{n+1}}$. לכן $\lim_{n\to\infty} a_n = 0.3$, ולכן על פי מבחן ההתבדרות הטור מתבדר.

2. בצע הזזת אינדקס כך שהטור $\sum_{n=8}^{\infty}\frac{2+n}{5-n}$ יתחיל ב־$n=4$.

פיתרון: הזזת אינדקס ב־k יחידות מתבצעת על ידי הוספת k לאינדקס הראשון בטור והחלפת n ב־$n-k$ באיבר הכללי. במקרה שלנו $k=-4$, ולכן התוצאה היא

$$\sum_{n=8}^{\infty}\frac{2+n}{5-n} = \sum_{n=8-4}^{\infty}\frac{2+(n+4)}{5-(n+4)} = \sum_{n=4}^{\infty}\frac{6+n}{1-n}$$

3. נתון כי נוסחת הסכום החלקי של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ היא $S_n = 1+(n^2+4n)e^{-2n}$. קבע האם הטור מתכנס או מתבדר? אם מתכנס, מצא את סכומו.

פיתרון: על פי ההגדרה, סכום הטור S הוא הגבול של סדרת סכומיו החלקיים $\lim_{n\to\infty} S_n$, אם הגבול קיים. במקרה שלנו

$$S = \lim_{n\to\infty} 1+(n^2+4n)e^{-2n} = 1+0 = 1$$

הביטוי $(n^2+4n)e^{-2n} = \frac{n^2+4n}{e^{2n}}$ שואף לאפס על ידי שימוש כפול בכלל של לופיטל

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+4n}{e^{2n}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+4x}{e^{2x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x+4}{2e^{2x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{4e^{2x}} = 0$$

לכן הטור מתכנס וסכומו הוא $S = 1$.

4. נתון כי נוסחת הסכום החלקי של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ היא $S_n = \frac{n}{\ln(n+5)}$. קבע האם הטור מתכנס או מתבדר. אם מתכנס, מצא את סכומו.

פיתרון: במקרה הנוכחי הסכום החלקי שואף לאינסוף ולכן הטור מתבדר. גם כאן אנו משתמשים בכלל של לופיטל

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\ln(n+5)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\ln(x+5)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{x+5}} = \lim_{x\to\infty} x+5 = \infty$$

5. בדוק התכנסות או התבדרות הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^{3+n}}{2^{2+3n}}$. אם הטור מתכנס, חשב את סכומו.

פיתרון: הטור מתכנס לסכום $\frac{250}{3}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^{3+n}}{2^{2+3n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^3 \cdot 5^n}{2^2 \cdot 2^{3n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{125 \cdot 5^n}{4 \cdot 8^n} = \frac{125}{4} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{8}\right)^n = \frac{125}{4} \cdot \frac{1}{1-\frac{5}{8}} = \frac{250}{3}$$

6. בדוק התכנסות או התבדרות הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n+2}$. אם הטור מתכנס, חשב את סכומו.

פיתרון: זהו טור טלסקופי שמתכנס לסכום 1.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n+2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots \\
&= \left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) + \cdots + \left(\cancel{\frac{1}{n+1}} - \frac{1}{n+2}\right) + \cdots \\
&= \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n+2} = 1
\end{aligned}$$

7. הוכח כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n)$ מתבדר.

רמז: בכל קטע $(2k\pi - \frac{\pi}{6}, 2k\pi + \frac{\pi}{6})$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, יש מספר שלם n.

פיתרון: נראה כי הסדרה $a_n = \cos n$ אינה מתכנסת לאפס ולכן על פי מבחן ההתבדרות, הטור מתבדר. נוכיח שלכל מספר טבעי k קיים מספר טבעי $n > k$ אשר עבורו $a_n \ge \frac{\sqrt{3}}{2}$. זה מוכיח בוודאות שהסדרה a_n אינה שואפת לאפס. ראשית כל נציין את הטענה הברורה

הבאה:

טענה: עבור כל זווית θ בתחום $2k\pi - \frac{\pi}{6} \le \theta \le 2k\pi + \frac{\pi}{6}$, מתקיים $\cos\theta \ge \frac{\sqrt{3}}{2}$.

עכשיו נקח מספר טבעי k כלשהו. האורך L של הקטע $[2k\pi - \frac{\pi}{6}, 2k\pi + \frac{\pi}{6}]$ הוא

$$L = \left(2k\pi + \frac{\pi}{6}\right) - \left(2k\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3} > 1$$

מאחר ואורך הקטע גדול מ־1 הוא חייב להכיל בתוכו מספר טבעי n (האפשרות האחרת היא שהוא יהיה כלול כולו בתוך קטע מהצורה $[n, n+1]$ ואז אורכו קטן מ־1 בסתירה לנתון). ברור ש־$n > k$ ועל פי הטענה $a_n = \cos n > \frac{\sqrt{3}}{2}$.

8. בדוק התכנסות או התבדרות של הטורים הבאים.

יש להגיש רק את פיתרון הסעיפים הזוגיים (ב', ד', ו', ...).

א. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n-3}{2n^5}$

ב. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{2+\cos^2(5n)}}{\sqrt{n^2-n-1}}$

ג. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{6^{-2n}(n-4)}{4^{3-2n}(2-n^2)}$

ד. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{5^{1-n}(n+1)}$

ה. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{9n-6}{2+4n}\right)^{\frac{n}{2}}$

ו. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^{5n+3}}{n^{1+n^2}}$

ז. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{n^2+3}$

ח. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{8n^7+4n^3}{(n^4+1)^2}$

ט. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(-2)^n(6n+1)}$

י. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}3n}{7n-5}$

יא. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n}}$

יב. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5n^2+8}$

יג. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$

יד. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n}{3n-1}\right)^{2n}$

טו. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{7^n+3^n}}{10n^2}$

טז. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+(-1)^n}{5^n}$

יז. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+5}}{n^2+8}$

יח. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{4n\cos(n\pi)}{2n^2+1}$

פיתרון:

א. הטור מתכנס על פי מבחן ההשוואה הראשון. ההשוואה תתבצע מול הטור המתכנס $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

$$\frac{4n-3}{2n^5} \le \frac{4n}{2n^5} = \frac{2}{n^4} \le \frac{2}{n^2}$$

ב. הטור מתבדר על ידי השוואה לטור המתבדר $\frac{1}{\sqrt{n^2-n-1}}$

$$\frac{\sqrt{2+\cos^2(5n)}}{\sqrt{n^2-n-1}} \geq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n^2-n-1}} \geq \frac{1}{\sqrt{n^2-n-1}}$$

הטור $\frac{1}{\sqrt{n^2-n-1}}$ מתבדר על ידי השוואה גבולית מול הטור ההרמוני

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2-n-1}} : \frac{1}{n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2-n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n\sqrt{1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-0-0}} = 1\end{aligned}$$

ג. נפשט את נוסחת האיבר הכללי

$$a_n = \frac{6^{-2n}(n-4)}{4^{3-2n}(2-n^2)} = \frac{36^{-n}(n-4)}{64\cdot 16^{-n}(2-n^2)} = \frac{16^n(n-4)}{64\cdot 36^n(2-n^2)} = \frac{n-4}{64(2-n^2)}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^n$$

הטור מתכנס כי הוא מתכנס בהחלט על ידי השוואה גבולית עם הטור ההנדסי $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^n$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n-4}{64(2-n^2)}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^n\right] : \left(\frac{4}{9}\right)^n &= \lim_{n\to\infty}\frac{n-4}{64(2-n^2)} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n}}{64(\frac{2}{n}-n)} \\ &= \frac{1-0}{64(0-\infty)} = \frac{1}{-\infty} = 0\end{aligned}$$

ד. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{5^{1-n}(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)5^n}{5(n+1)}$$

הטור מתבדר כי האיבר הכללי שלו שואף לאינסוף (על פי מבחן ההתבדרות).

ה. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{9n-6}{2+4n}\right)^{\frac{n}{2}}$

הטור מתבדר על פי מבחן השורש

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{9n-6}{2+4n}\right)^{\frac{n}{2}}} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{9n-6}{2+4n}\right)^{\frac{n}{2}}\right]^{\frac{1}{n}} \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{9n-6}{2+4n}\right)^{\frac{1}{2}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{9n-6}{2+4n}} \\ &= \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{9-\frac{6}{n}}{\frac{2}{n}+4}} = \frac{\sqrt{9-0}}{\sqrt{0+4}} = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

מאחר והגבול $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\frac{3}{2}>1$, הטור מתבדר על פי מבחן השורש.

ו. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^{5n+3}}{n^{1+n^2}}$

הטור מתכנס על פי מבחן השורש

$$a_n=\frac{10^{5n+3}}{n^{1+n^2}}=\frac{10^{5n}\cdot 1000}{n\cdot n^{n^2}}=\frac{10000^n\cdot 1000}{n\cdot n^{n^2}}$$

לכן

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{10000\sqrt[n]{1000}}{\sqrt[n]{n}\cdot n^n}=\frac{10000\cdot 1}{1\cdot\infty}=0$$

ז. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5}{n^2+3}$

הטור מתכנס על פי מבחן ההשוואה מול הטור $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

ח. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{8n^7+4n^3}{(n^4+1)^2}$

הטור מתבדר על ידי השוואה גבולית מול הטור ההרמוני

$$\lim_{n\to\infty}\frac{8n^7+4n^3}{(n^4+1)^2}:\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{8n^8+4n^4}{(n^4+1)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{8+\frac{4}{n^4}}{(1+\frac{1}{n^4})^2}=8$$

ט. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(-2)^n(6n+1)}$

הטור מתכנס בהחלט על ידי השוואה לטור ההנדסי $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$.

דרך נוספת: הטור מתכנס על פי מבחן לייבניץ עבור טורים מתחלפים.

י. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}3n}{7n-5}$

הטור מתבדר על ידי מבחן ההתבדרות כי האיבר הכללי שלו אינו שואף לאפס

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^{n+1}3n}{7n-5}=\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^{n+1}3}{7-\frac{5}{n}}$$

לסדרה יש שני גבולות חלקיים: $\frac{3}{7}$ עבור תת־הסדרה של האיברים האי־זוגיים, $-\frac{3}{7}$ עבור תת הסדרה של האיברים הזוגיים. לכן לסדרה עצמה אין גבול, ולכן הטור מתבדר.

יא. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n}}$

הטור מתכנס על פי מבחן לייבניץ לטורים מחליפי סימן

יב. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{5n^2+8}$

הטור מתבדר על פי מבחן ההתבדרות כי

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{5n^2+8}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{5+\frac{8}{n^2}}=\frac{1}{5}$$

יג. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=\lim_{n\to\infty}n^{-\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}e^{-\frac{\ln n}{n}}=e^{-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}}=e^0=1$$

את הגבול $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=0$ ניתן להוכיח על ידי שימוש בכלל לופיטל

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\frac{0}{1}=0$$

יד. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n}{3n-1}\right)^{2n}$

נוכיח כי האיבר הכללי של הטור אינו שואף לאפס, ולכן הטור מתבדר על פי מבחן

ההתבדרות. לשם כך נשתמש בנוסחה

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

ונשתמש בשוויון $2n = \frac{2}{3}(3n-1)+\frac{2}{3}$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n}{3n-1}\right)^{2n} &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(3n-1)+1}{3n-1}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n-1}\right)^{2n} \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n-1}\right)^{\frac{2}{3}(3n-1)+\frac{2}{3}} \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n-1}\right)^{\frac{2}{3}(3n-1)} \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n-1}\right)^{\frac{2}{3}} \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{3n-1}\right)^{3n-1}\right]^{\frac{2}{3}} \cdot \left(1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3n-1}\right)^{\frac{2}{3}} \\
&= \left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n-1}\right)^{3n-1}\right]^{\frac{2}{3}} \cdot (1+0)^{\frac{2}{3}} \\
&= e^{\frac{2}{3}}
\end{aligned}$$

טו. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[n]{7^n+3^n}}{10n^2}$

פיתרון 1: הטור מתכנס על ידי השוואה מול הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2}$

$$\frac{\sqrt[n]{7^n+3^n}}{10n^2} \le \frac{\sqrt[n]{7^n+7^n}}{10n^2} = \frac{\sqrt[n]{2\cdot 7^n}}{10n^2} = \frac{7\sqrt[n]{2}}{10n^2} \le \frac{7\cdot 2}{10n^2} \le \frac{2}{n^2}$$

ידוע כי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2}$ מתכנס, ולכן על פי מבחן ההשוואה הראשון הטור מתכנס.

פיתרון 2: על פי מבחן ההשוואה הגבולי

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{7^n+3^n}}{10n^2}:\frac{1}{n^2} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{7^n+3^n}}{10n^2}\cdot\frac{n^2}{1}=\frac{1}{10}\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{7^n+3^n}\\ &= \frac{1}{10}\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{7^n\left(1+\left(\frac{3}{7}\right)^n\right)}\\ &= \frac{1}{10}\cdot\lim_{n\to\infty}7\sqrt[n]{1+\left(\frac{3}{7}\right)^n}\\ &= \frac{7}{10}\end{aligned}$$

טז. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3+(-1)^n}{5^n}$

מדובר בסכום של שני טורים הנדסיים מתכנסים, ולכן הטור מתכנס

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3+(-1)^n}{5^n}=3\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{5}\right)^n=3\cdot\frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}+\frac{-\frac{1}{5}}{1+\frac{1}{5}}=3\cdot\frac{\frac{1}{5}}{\frac{4}{5}}+\frac{-\frac{1}{5}}{\frac{6}{5}}=\frac{7}{12}$$

יז. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+5}}{n^2+8}$

הטור מתכנס בהחלט על ידי השוואה מול $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

יח. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5 5^n}{n!}$

הטור מתכנס על פי מבחן המנה

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^5 5^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{n^5 5^n}{n!} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^5 5^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^5 5^n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{5(n+1)^5}{(n+1)n^5} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{5}{n+1} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^5}{n^5} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{5}{n+1} \cdot \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^5 \\
&= 0 \cdot (1+0)^5 = 0 < 1
\end{aligned}$$

יט. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{4n\cos(n\pi)}{2n^2+1}$

הטור מתכנס על פי מבחן לייבניץ לטורים מחליפי סימן. יש לוודא שהטור עומד בכל תנאי המבחן:

- הטור מחליף סימן: לכל $n = 2k$ זוגי, $\cos n\pi = \cos 2k\pi = 1$, ולכן כל איבר זוגי בטור חיובי. אם $n = 2k+1$ אי־זוגי, $\cos n\pi = \cos(2k+1)\pi = -1$, ולכן כל איבר אי־זוגי בטור שלילי.
- הסדרה $\frac{4n}{2n^2+1}$ מונוטונית יורדת: נוכיח כי הפונקציה $f(x) = \frac{4x}{2x^2+1}$ מונוטונית יורדת בקרן $[2,\infty)$. לשם כך יספיק להוכיח כי $f'(x) < 0$ לכל x בקרן $[2,\infty)$ (כזכור מחדו"א 1, אם הנגזרת שלילית אז הפונקציה יורדת)

$$f'(x) = \frac{4(2x^2+1) - 4x\cdot 4x}{(2x^2+1)^2} = \frac{-16x^2+1}{(2x^2+1)^2}$$

המונה $-16x^2+1$ הוא שלילי לכל $x > \frac{1}{4}$, ולכן הנגזרת שלילית בקרן $[2,\infty)$. לכן הערך המוחלט של האיבר הכללי של הטור היא סדרה מונוטונית יורדת.

- התנאי האחרון הוא שהערך המוחלט של האיבר הכללי שואף לאפס

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n}{2n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{2n+\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{\infty+0}=0$$