חוברת תרגילים בקורס
חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי ב'

גירסה: 04.02.2018

הערה: זוהי גירסה מעודכנת ומקוצרת. כל התרגילים שלא כוסו בקורס הושמטו או סומנו בצבע אדום.

1. טורים מספריים

1. בדוק התכנסות בתנאי, התכנסות בהחלט, או התבדרות של הטורים הבאים

א. $\displaystyle\sum_{n=8}^{\infty}\frac{\ln(n^2)}{n}$

ב. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2^n}$

ג. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\sin 7n}{n^2+8n+1}$

ד. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}\ln n}$

ה. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!}{(3n)!}$

ו. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-\sin n)(1+\sin n)}{n^2+8n+1}$

ז. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5 5^n}{n!}$

ח. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{5n^2-2n+1}{3n^2+n-3}$

ט. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{4}{\left(\sqrt{n}\right)^3}$

י. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[7]{n^2}\sqrt[6]{n}}$

יא. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{(n+10)^2}$

יב. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$

יג. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\ln^3 n}}$

יד. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2n\ln\sqrt{n}}$

טו. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^3+4n^2+8}$

טז. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln n}$

יז. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\ln(n+5)}{2n+1}$

יח. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$

יט. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{\pi}{n}$

כ. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\cos\frac{\pi}{n}$

כא. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n^n}$

כב. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{3n+1}\right)^2$

כג. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3-\sin n}}$

כד. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n3^n}{n+4^n}$

כה. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\sqrt{n}}}{2^n}$

כו. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$

כז. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-\ln n}$

2. הוכח כי הטור $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^p n}$ מתכנס אם ורק אם $p>1$.

3. נכון או לא נכון

א. אם $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ מתכנס אז גם $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס

ב. הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\sin\frac{1}{n}$ מתבדר

ג. אם הטור מתבדר $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ אז גם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ מתבדר.

ד. הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos\frac{1}{n}$ מתבדר

ה. אם $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ טור חיובי מתכנס, אזי גם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{a_n}$ הוא טור חיובי מתכנס.

ו. אם $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ טור חיובי מתכנס, אזי גם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{\sqrt[n]{n}}$ הוא טור חיובי מתכנס.

ז. אם $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ טור חיובי מתכנס, אזי גם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ הוא טור חיובי מתכנס.

ח. הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p+7}$ מתכנס אם ורק אם $p>1$.

ט. אם $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ אז הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס

י. אם $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q^n$ הוא טור הנדסי שמתכנס לסכום $S=0.1$ אז $q=\frac{1}{11}$.

יא. לא ניתן להשתמש במבחן השורש בכדי לקבוע את התבדרות הטור ההרמוני $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$

יב. אם $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$, שני טורים מתכנסים בהחלט אז גם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ הוא טור מתכנס בהחלט.

יג. $\int_9^{\infty}\frac{1}{x^2+1}<\sum\limits_{n=9}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}<\int_8^{\infty}\frac{1}{x^2+1}$

יד. אם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס אז הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ חסומה.

טו. ניתן להשתמש במבחן האינטגרל בכדי לבדוק התכנסות הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n^2}$

טז. הטור $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{1+\arctan n}$ מתכנס

יז. אם הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ חסומה אז הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^2}$ מתכנס.

יח. אם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n+\frac{1}{n}\right)$ מתכנס אז גם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס.

יט. אם $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ טור חיובי ממש מתכנס, אז קיים הגבול $L = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, ובנוסף $L < 1$.

כ. $\sum\limits_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n^6} < 0.001$

כא. אם $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה חיובית, ואם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ הוא טור מתכנס, אז $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה מונוטונית יורדת.

2. סדרות פונקציות, טורי פונקציות, טורי חזקות

4. חקור התכנסות נקודתית והתכנסות במידה שווה של סדרת פונקציות בקטע הנתון

א. $f_n(x) = x^n$, $0 \le x \le \frac{1}{2}$

ב. $f_n(x) = x^n$, $0 \le x \le 1$

ג. $f_n(x) = x^n - x^{2n}$, $0 \le x \le 1$

ד. $f_n(x) = \dfrac{1}{n+x}$, $0 \le x < \infty$

ה. $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n}$, $-\infty < x < \infty$

5 הוכח את ההתכנסות במידה שווה של טורי הפונקציות הבאים בקטעים הנתונים תוך שימוש במבחן M של ווארשטראס

א. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{x^2+n^2}$, קטע: $(-\infty, \infty)$

ב. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{x+2^n}$, קטע: $(1, \infty)$

6. חשב את רדיוס התכנסות של טורי החזקות הבאים, ובדוק התכנסות בקצוות

א. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{6^{1-n}}{(-2)^{3-2n}} (x+5)^n$

ב. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2x-1)^n}{n^{3+n}}$

ג. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{n^2}{(2n)!} (x-1)^n$

ד. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(3n)!}{(2n-2)!} (6x-9)^n$

ה. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 8^{n+1}}{n+4}(x-7)^n$

ו. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{4^n}(x-2)^n$

ז. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n \sqrt{n}} x^n$

ח. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln n}{3^n}(x-1)^n$

ט. $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$

7. פתח את הפונקציה הנתונה לטור חזקות וקבע את רדיוס ההתכנסות של הטור

א. $f(x) = \frac{x}{1-8x}$

ב. $f(x) = \frac{8x}{1+16x^7}$

ג. $f(x) = \frac{x^7}{8+x^3}$

ד. $f(x) = \frac{x^2}{4-3x^2}$

8. פתח טור מקלורן עבור הנגזרת הראשונה של כל אחת מהפונקציות הבאות

א. $g(x) = \frac{x^{10}}{2-x^2}$

ב. $g(x) = \frac{9x^5}{1+3x^4}$

9. פתח טור מקלורן עבור האינטגרל של כל אחת מהפונקציות הבאות

א. $h(x) = \frac{7x}{3-6x}$

ב. $h(x) = \frac{x^4}{2+x^9}$

10. אם תחום ההתכנסות של טור חזקות $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ הוא הקטע $(-7, 19)$, מהו המרכז ורדיוס ההתכנסות שלו?

11. האם קיים טור חזקות שתחום ההתכנסות שלו הוא $(-7, \infty)$?

12. חשב את נוסחת טיילור של כל אחת מהפונקציות הבאות סביב הנקודה הנתונה

א. $f(x) = \sin x$ סביב הנקודה $x = \frac{3\pi}{2}$

ב. $f(x) = e^{2x}$ סביב הנקודה $x = 3$

ג. $f(x) = \sqrt{2+x}$ סביב הנקודה $x = 1$

ד. $f(x) = \sqrt{x}$ סביב הנקודה $x = 1$

ה. $f(x) = x^3 + 9x^2 - 10x + 2$ סביב הנקודה $x = 3$

13. חשב את נוסחת מקלורן של הפונקציה

א. $f(x)=\sin(x^4)$

ב. $f(x)=xe^{2x}$

ג. $f(x)=9x^4e^{-12x}$

ד. $f(x)=x^3\sin 2x$

ה. $f(x)=\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

ו. $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$

ז. $\cosh(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$

ח. $\sinh(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$

ט. $f(x)=\cos x^2$

י. $f(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt$

14. חשב את נוסחת מקלורן של הפונקציה $f(x)=\ln(1+x^2)$ על ידי שימוש בשוויון

$$\ln(1+x^2)=\int_0^x \frac{2t\,dt}{1+t^2}$$

15. על ידי שימוש בטור מקלורן של הפונקציה $\sin x$, חשב את הערך של $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{x}$ בקירוב של 10^{-6}.

16. על ידי שימוש בטור מקלורן של הפונקציה $\arctan x$, הוכח כי

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots=\frac{\pi}{4}$$

17. על ידי שימוש בטור מקלורן של הפונקציה $\cos x$, חשב את הערך של $\int_0^1 \frac{1-\cos x}{x^2}$ בקירוב של 10^{-6}.

18. על ידי שימוש בטור מקלורן של הפונקציה $f(x)=\sqrt{1+x}$, חשב את הערך של $\displaystyle\int_0^1\sqrt{1+x}$ בקירוב של 10^{-3}.

19. על ידי שימוש בטור מקלורן חשב את הערך של $\displaystyle\int_0^{1/3} x^2\arctan 2x$ בקירוב של 10^{-4}.

20. על ידי שימוש בטורי חזקות מתאימים, מצא את הסכום של שני הטורים הבאים

א. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{3^n}$ **ב.** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{5^n}$ **ג.** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{3^n}$

21. נכון או לא נכון?

א. אם הטור $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-3)^n$ מתכנס עבור $x=5$ אז הוא מתכנס גם בנקודה $x=0$.

ב. אם הטור $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x+3)^n$ מתכנס עבור $x=5$ אז הוא מתכנס גם בנקודה $x=0$.

ג. קיים טור חזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ שמתכנס רק עבור $x > 0$.

ד. אם $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ הוא טור מקלורן שרדיוס התכנסותו הוא R ($0 < R < \infty$), ואם הטור מתכנס בנקודת הקצה $x = -R$ אז הוא בהכרח מתכנס גם בנקודת הקצה $x = R$.

ה. אם $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ הוא טור מקלורן שרדיוס ההתכנסות שלו הוא R, אז גם רדיוס ההתכנסות של הטור $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x$ הוא R.

ו. אם $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ הוא טור טיילור של הפונקציה $f(x)$ אז $f''(x_0) = 2a_2$.

3. גאומטריה וקטורית במישור ובמרחב

22. נתונים שלושה וקטורים $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ המקיימים

$$\|\vec{u}\| = 1, \quad \|\vec{v}\| = 2, \quad \|\vec{w}\| = 3$$

ובנוסף מתקיים

$$\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$$

חשב את ערך הביטוי $\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w} + \vec{v}\cdot\vec{w}$

רמז: עיין בביטוי $\|\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}\|^2$.

23. הוכח שלכל שלושה וקטורים $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ במרחב $\mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} \vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w}) &= \vec{u}\times\vec{v} + \vec{u}\times\vec{w} \\ (\vec{v}+\vec{w})\times\vec{u} &= \vec{v}\times\vec{u} + \vec{w}\times\vec{u} \end{aligned}$$

24. הוכח שאם $\vec{u}$, $\vec{v}$, וקטורים מקבילים (קו־ליניאריים) במרחב $\mathbb{R}^3$ אז $\vec{u}\times\vec{v} = 0$.

25. חשב את שטח המשולש שקודקודיו (במרחב התלת־מימדי $\mathbb{R}^3$) הם

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

26. נתונים שני הוקטורים הבאים במרחב $\mathbb{R}^3$

$$\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\quad \vec{v}=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$$

מצא וקטור $\vec{w}$ הניצב לשני הוקטורים $\vec{u}$, $\vec{v}$ ובנוסף מקיים $\|\vec{w}\|=2\sqrt{6}$. כמה וקטורים $\vec{w}$ כאלה יש?

27. יהיו $\vec{u}$, $\vec{v}$, שני וקטורים במרחב $\mathbb{R}^3$ כך ש־ $\|\vec{u}\|=2$, $\|\vec{v}\|=4$, והזווית שביניהם היא $\theta=\frac{5\pi}{6}$. חשב את שטח המקבילית הנוצרת על ידי הוקטורים

$$\vec{w_1}=-\vec{u}+9\vec{v},\quad \vec{w_2}=-\vec{u}+\vec{v}$$

28. בדוק אילו מהנקודות הבאות נמצאות על המישור $x-2y+3z-5=0$:

$A(5,0,0)$, $B(-1,2,6)$, $C(3,0.5,1)$, $D(3,3,-1)$, $E(-6,-7,-1)$

29. האם הנקודות $A(2,1,-2)$, $B(1,2,1)$, $C(2,3,0)$, $D(5,0,-6)$ נמצאות כולן על אותו מישור?

30. עבור אילו ערכים של הפרמטר α ארבעת הנקודות הבאות במרחב $\mathbb{R}^3$ נמצאות על אותו מישור?

$$A=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}-1\\-1\\\alpha\end{pmatrix} D=\begin{pmatrix}1\\1-\alpha\\0\end{pmatrix}$$

31. יהיו $\vec{u}$, $\vec{v}$, שני וקטורי יחידה (אורך 1) במרחב $\mathbb{R}^3$. ידוע כי $(-\vec{u}+3\vec{v})\perp(2\vec{u}-\vec{v})$.

א. חשב את קוסינוס הזווית שבין הוקטורים $\vec{u}$, $\vec{v}$

ב. חשב את $\|2\vec{u}-\vec{v}\|^2+\|-\vec{u}+3\vec{v}\|^2$

32. הוכח כי שני וקטורים $\vec{u}$, $\vec{v}$, ניצבים אם ורק אם $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2$

33. מצא את קוסינוס הזווית שבין ציר z ובין הישר

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{4}=\frac{z}{4}$$

34. מצא את משוואת המישור העובר דרך הנקודה $P=(2,-1,5)$ וניצב למישורים

$$\begin{aligned} 3x-2y+z+7 &= 0 \\ 5x-4y+3z+1 &= 0 \end{aligned}$$

35. מצא את משוואת המישור העובר דרך הנקודות

$$A=(0,0,0), \quad B=(2,4,-3), \quad C=(4,-2,1)$$

36. מצא את משוואת המישור במרחב $\mathbb{R}^3$ שמכיל את ציר־z ועובר דרך הנקודה $P(2,2,2)$.

37. ידוע כי $\vec{u}\times\vec{v}=\vec{u}\times\vec{w}$. האם בהכרח $\vec{v}=\vec{w}$?

38. מצא את המרחק בין הישרים

$$L_1: \ \frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z}{-1}, \qquad L_2: \ \frac{x+2}{-2}=\frac{y+5}{3}=\frac{z-1}{-5}$$

39. מצא הצגה פרמטרית של הישר במרחב $\mathbb{R}^3$ העובר דרך הנקודות $P(3,-1,4)$, $Q(1,1,2)$.

40. מצא את משוואת הישר העובר דרך הנקודה $(-4,3,0)$ ומקביל לישר

$$\begin{cases} x-2y+z=4 \\ 2x+y-z=0 \end{cases}$$

41. מצא הצגה פרמטרית של הישר העובר דרך הנקודה $(3,4,-9)$ ומקביל לישר

$$\begin{cases} x=9-2t \\ y=5+7t \\ z=1-4t \end{cases}$$

42. מצא את משוואת הישר העובר דרך הנקודה $(1,2,-1)$ וניצב למישור $3x+4y-5z-8=0$.

43. מצא את המרחק בין הנקודה $P(-1,2,3)$ מהמישור $2x+y-2z+8=0$

44. נתונים שני ישרים

$$L_1: \ \frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z}{-1}, \qquad L_2: \ \frac{x+2}{-2}=\frac{y+5}{3}=\frac{z-1}{-5}$$

א. האם הם נחתכים?

ב. אם כן, מצא את נקודת החיתוך שלהם

45. נתון הישר $L : \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t + 2 \\ z = 1 - t \end{cases}$, והמישור $\pi : \ 3x - 2y + z = 3$.

קבע האם הישר L חותך את המישור π בנקודה אחת בדיוק? אם כן, מצא את נקודת החיתוך. אם לא, הוכח כי הישר מקביל למישור (או מוכל בתוכו).

46. מצא את משוואת המישור העובר דרך הנקודה $P(9, -8, -6)$ ומקביל למישור

$$10x + 7y - 5z - 4 = 0$$

47. הוכח כי ארבעת הנקודות הבאות נמצאות על אותו המישור, ומצא את משוואת המישור:

$A(2, 1, 1)$, $B(5, 5, 3)$, $C(-2, -5, 0)$, $D(-1, -3, -1)$.

48. הוכח כי שני המישורים הבאים ניצבים אחד לשני

$$\begin{aligned} x - 2y + 5z + 2 &= 0 \\ 7x + 6y + z - 2 &= 0 \end{aligned}$$

49. הוכח כי שני המישורים הבאים מקבילים

$$\begin{aligned} x - 2y + 5z + 2 &= 0 \\ -2x + 4y - 10z + 3 &= 0 \end{aligned}$$

50. מצא את משוואת המישור העובר דרך הנקודה $P(2, 3, 1)$ וניצב לישר

$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - 4t \\ z = 7 + 2t \end{cases}$$

51. מצא את משוואת המישור העובר דרך הנקודה $P(3, -2, -3)$ וניצב לישר

$$\begin{cases} x = 3 - t \\ y = 1 + 5t \\ z = 6t \end{cases}$$

52. הוכח כי שני הישרים הבאים מתלכדים

$$L_2 : \begin{cases} x = 3 - 9t \\ y = 5 - 6t \\ z = -13 + 12t \end{cases} \qquad L_1 : \begin{cases} x = -3 + 3t \\ y = 1 + 2t \\ z = -5 - 4t \end{cases}$$

.53 הוכח כי שני הישרים הבאים מקבילים אך אינם מתלכדים

$$L_1: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 3t \\ z = 1 - 2t \end{cases} \qquad L_2: \begin{cases} x = 8 + 2t \\ y = -4 + 6t \\ z = 3 - 4t \end{cases}$$

.54 א. הוכח כי שני הישרים הבאים מקבילים

ב. הוכח כי שני הישרים אינם מתלכדים

ג. מצא את משוואת המישור הכולל את שני הישרים

$$L_1: \begin{cases} x = -3 - t \\ y = 2 + 3t \\ z = 1 - 2t \end{cases} \qquad L_2: \begin{cases} x = -2t \\ y = -1 + 6t \\ z = 3 - 4t \end{cases}$$

.4 תחום הגדרה, גבולות, רציפות, נגזרות חלקיות

.55 מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות.

במידת האפשר, נסה לשרטט סקיצה של התחום על מישור ה־xy.

קבע האם התחום מהווה קבוצה פתוחה? סגורה? קשירה? פשוטת קשר? חסומה?

א. $z = \sqrt{1 - x - y}$

ב. $z = \sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{4 - y^2}$

ג. $z = \dfrac{\sin(x-y)}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$

ד. $z = \dfrac{\sin(x-y)}{y^2 - 4x^2}$

ה. $z = \ln(x^2 + y)$

ו. $z = \sqrt{\dfrac{1 + x + y}{1 - x - 2y}}$

ז. $z = \sqrt{\dfrac{1 - x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}$

ח. $z = \ln\left[(1 + 2x + y)(x^2 + y^2 - 4)\right]$

ט. $z = \dfrac{1}{\ln(2 + x^2 + y^2)}$

י. $z = \arcsin\left(\dfrac{x}{2}\right) \cdot \sqrt{x^2 - y^2 - 1}$

יא. $z = \sqrt{x - 1} + \arccos y$

56 נסה לצייר (תלת־מימד!) את החלק של המישור $2x + 3y + z = 7$ הנמצא בשמינית הראשונה של $\mathbb{R}^3$: $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

57 מצא את הרדיוס ומרכז הכדור $x^2 + y^2 + z^2 - x + 2y + \frac{1}{4} = 0$.

58. נתונות ששת הפונקציות הבאות

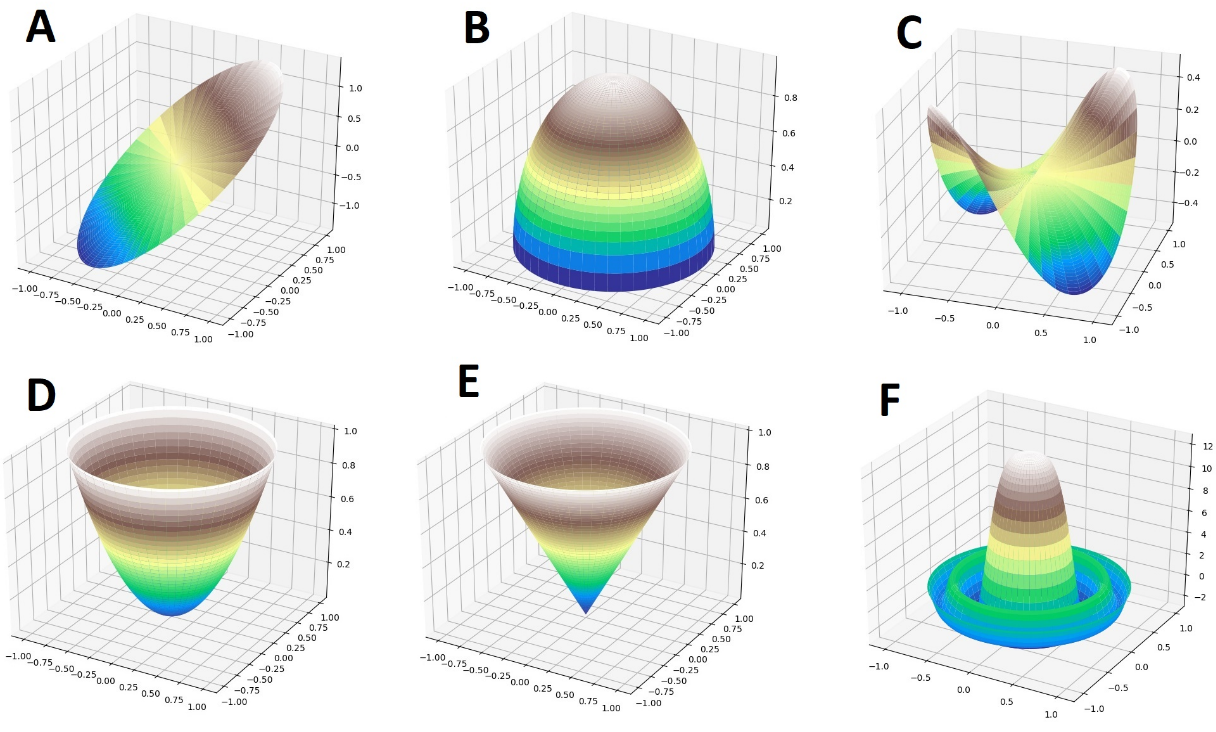
$$f_1(x,y) = x^2+y^2 \qquad f_4(x,y) = x+y$$

$$f_2(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \qquad f_5(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

$$f_3(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2} \qquad f_6(x,y) = \frac{\sin 4\pi(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$$

שכולן מוגדרות על התחום המישורי $\mathscr{D} = \{\,(x,y)\,|\,0 < x^2+y^2 < 1\}$.

בצע התאמה בין כל פונקציה ובין המשטח התלת־מימדי המתאים לה



איור 1: התאם את ששת הפונקציות לששת המשטחים התלת־מימדיים

משטח	פונקציה
	$f_1(x,y) = x^2+y^2$
	$f_2(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$
	$f_3(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$
	$f_4(x,y) = x+y$
	$f_5(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$
	$f_6(x,y) = \frac{\sin 4\pi(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

59 חשב את הגבולות הכפולים

א. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$ **ב.** $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$

ג. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin xy}{x}$ **ד.** $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} (x^2+y^2)e^{-(x+y)}$

60 חשב את הגבולות הבאים אם הם קיימים. במידה והגבול לא קיים, הסבר מדוע.

א. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$ **ב.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \dfrac{\sqrt{9+x^4+(y-2)^2}-3}{x^4y+y(y-2)^2}$

ג. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2+5y^4}{7x^2+2y^4}$ **ד.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^4+y^4}$

ה. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{x^2+5y^2}$ **ו.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^3y}{x^6+y^2}$

61 האם ניתן להגדיר את הפונקציות הבאות בנקודה $(0,0)$ כך שהן תמשכנה להיות רציפות בנקודה $(0,0)$?

א. $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ **ב.** $f(x,y)=\dfrac{x+y}{x^3+y^3}$

ג. $f(x,y)=\sin\dfrac{1}{xy}$ **ד.** $f(x,y)=\dfrac{3}{x^2+y^2}$

ה. $f(x,y)=\dfrac{y^2+2x}{y^2-2x}$

62 הראה שעבור הפונקציה $f(x,y)=\frac{x-y}{x+y}$ מתקיימים שני השוויונים הבאים

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0} f(x,y)\right] &= 1\\ \lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0} f(x,y)\right] &= -1\end{aligned}$$

האם $f(x,y)$ רציפה בנקודה $(0,0)$?

.63 ידוע שלפונקציה $f(x,y)=\frac{\sqrt{1+3x^2+y^2}-1}{3x^2+y^2}$ יש נקודת אי־רציפות סליקה בנקודה $(0,0)$.
כיצד יש להגדיר את $f(0,0)$ כך שהפונקציה $f(x,y)$ תהיה רציפה בנקודה $(0,0)$?

.64 חשב את הנגזרות החלקיות הראשונות של הפונקציות הבאות

א. $z = e^{x^2+y^2}$

ב. $z = \arctan \frac{y}{x}$

ג. $f(r,\theta) = r^4 \cos^2 \theta$

ד. $z = \sqrt{xy + \frac{x}{y}}$

.65 חשב את הדטרמיננטה $\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}$ כאשר $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

.66 נתונה הפונקציה $f(x,y) = \sqrt[3]{x^2 y}$. בדוק את קיום הנגזרות החלקיות $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, בנקודות $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$.

.67 נתונה הפונקציה $f(x,y) = \sqrt[5]{xy^2}$. בדוק את קיום הנגזרות החלקיות f_x, f_y בנקודה $(0,0)$.

.68 נתונה הפונקציה $w = f(u,v) = \frac{u}{v} + \frac{v}{u}$. חשב את $\frac{\partial w}{\partial u}$, $\frac{\partial w}{\partial v}$.

.69 הוכח שהפונקציה $z = \sqrt{x}\sin\frac{y}{x}$ מקיימת את המשוואה

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{2}$$

.70 הוכח שהפונקציה $z = \ln(x^2 + xy + y^2)$ מקיימת את המשוואה

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 2$$

71 האם הפונקציה $z = \sqrt[3]{xy^2}$ דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$?

.72 חשב דיפרנציאל מסדר ראשון של

א. $z = \sin^2 x + \cos^2 y$

ב. $z = x^y$

.73 עשה שימוש במושג הדיפרנציאל בכדי לחשב בקירוב את הערך של הביטוי $1.04^{2.02}$

.74 עשה שימוש במושג הדיפרנציאל בכדי לחשב בקירוב את הערך של הביטוי

$$\ln(\sqrt{1.04} + \sqrt[3]{0.97} - 1)$$

75. עשה שימוש במושג הדיפרנציאל בכדי לחשב בקירוב את הערך של הביטוי

$$\sqrt{1.02^3 + 1.97^3}$$

76. נתונות הפונקציות: $u = e^{x-2y}$,$x = \sin t$,$y = t^3$. חשב את $\frac{du}{dt}$.

77. נתונות הפונקציות: $z = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$,$x = \cos\theta$,$y = \sin\theta$. חשב את $\frac{dz}{d\theta}$ בנקודה $\theta = \frac{\pi}{2}$.

78. נתונות הפונקציות: $z = \ln(x^2 + y^2)$,$x = st$,$y = \frac{s}{t}$. חשב את $\frac{\partial z}{\partial s}$, $\frac{\partial z}{\partial t}$.

79. נתונות הפונקציות: $z = u^v$,$u = x\cos y$,$v = y\sin x$. חשב את $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

80. נתונות הפונקציות: $z = \ln(u^2 + v^2)$,$u = e^{x+y^2}$,$v = x^2 + y^2$. חשב את $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

81. נתונה הפונקציה $u(x,y) = (x^2 + y^2)^\alpha$. מצא עבור אילו ערכים של הפרמטר α מתקיים השוויון

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

82. נתון כי $u(x,y) = f\left(\frac{y}{x}\right)$ כאשר $f(t)$ היא פונקציה גזירה ברציפות. הוכח כי

$$xu_x + yu_y = 0$$

משטחים תלת־מימדיים

83. מצא את משוואת המישור המשיק למשטח $z = x^2 + y^2$ בנקודה $(1, -2, 5)$.

84. מצא את משוואת המישור המשיק למשטח $z = 2x^2 + y^2$ בנקודה $(1, 2, 6)$.

85. מצא את משוואת המישור המשיק למשטח $z = \sin x \cos y$ בנקודה $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{1}{2})$.

תשובות סופיות

.1 **א.** מתבדר **ב.** מתבדר **ג.** מתכנס **ד.** מתבדר **ה.** מתכנס **ו.** מתכנס
ז. מתכנס **ח.** מתבדר **ט.** מתכנס **י.** מתבדר **יא.** מתכנס **יב.** מתכנס
יג. מתכנס **יד.** מתבדר **טו.** מתכנס בהחלט **טז.** מתכנס בתנאי
יז. מתכנס בתנאי **יח.** מתבדר **יט.** מתכנס בתנאי **כ.** מתבדר
כא. מתכנס בהחלט **כב.** מתבדר **כג.** מתכנס **כד.** מתכנס **כה.** מתכנס
כו. מתכנס **כז.** מתכנס

.2 מתכנס אם ורק אם $p > 1$ על פי מבחן האינטגרל

.3 **א.** לא נכון **ב.** נכון **ג.** נכון **ד.** נכון **ה.** לא נכון **ו.** נכון **ז.** נכון
ח. נכון **ט.** לא נכון **י.** נכון **יא.** נכון **יב.** נכון **יג.** נכון **יד.** נכון
טו. לא נכון **טז.** לא נכון **יז.** נכון **יח.** נכון **יט.** לא נכון **כ.** נכון
כא. לא נכון

.4 **א.** מתכנס במידה שווה
ב. מתכנס נקודתית לפונקציה $\begin{cases} 0, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$. אין התכנסות במידה שווה.
ג. מתכנס נקודתית לאפס. $\sup_{0\le x\le 1} |x^n - x^{2n}| = \frac{1}{4}$. אין התכנסות במ"ש.
ד. $\lim_{x\to\infty} f_n(x) = 0$. יש התכנסות במ"ש בקטע $(0, \infty)$
ה. $\left|\frac{\sin nx}{n}\right| \le \frac{1}{n}$. יש התכנסות במ"ש. **ו.** נכון

.6 **א.** $R = \frac{3}{2}$, מתבדר בשתי הקצוות **ב.** $R = \infty$ **ג.** $R = \infty$
ד. $R = 0$. מתכנס במרכז בלבד. **ה.** $R = \frac{1}{8}$, מתכנס מימין, מתבדר משמאל
ו. $R = 4$, מתבדר בשתי הקצוות **ז.** $R = 2$, מתבדר מימין, מתכנס משמאל
ח. $R = 3$, מתבדר מימין, מתבדר משמאל **ט.** $R = 1$, מתכנס מימין ומשמאל

.7 **א.** $\sum_{n=0}^{\infty} 8^{n-1}x^n$, $R = \frac{1}{8}$ **ב.** $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{4n+3}x^{7n+1}$, $R = \frac{1}{2^{\frac{4}{7}}}$
ג. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{3n+3}}x^{3n+7}$, $R = \frac{1}{2}$ **ד.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n}{4^{n+1}}x^{2n+2}$, $R = \frac{4}{3}$

.8 **א.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+10}{2^{n+1}}x^{2n+9}$ **ב.** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n(4n+5)3^{n+2}x^{4n+4}$

.9 **א.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{7\cdot 2^n}{3(n+2)}x^{n+2}$ **ב.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(9n+5)2^{n+1}}x^{9n+5}$

.10 $x_0 = 6$, $R = 13$

11. לא. אין לקטע $(-7,\infty)$ מרכז ורדיוס התכנסות.

12. **א.** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k)!}\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)^{2k}$ **ב.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n e^3}{n!}(x-3)^n$

ג. $\sqrt{2+x}=\sqrt{2}\sqrt{1+\frac{x}{2}}$. יש להחליף את x ב־ $\frac{x}{2}$ בטור של $(1+x)^{\frac{1}{2}}$

ד. $\sqrt{x}=\sqrt{1+(x-1)}$. יש להחליף את x ב־ $x-1$ בטור של $(1+x)^{\frac{1}{2}}$

ה. $2+71(x-3)+18(x-3)^2+(x-3)^3$

13. **א.** $\sin^4 x=\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)!}x^{8k+4}$ **ב.** $xe^{2x}=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}x^{n+1}$

ג. $9x^4e^{-12x}=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\cdot 9\cdot 12^n}{n!}x^{n+4}$ **ד.** $x^3\sin 2x=\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}2^{2k}}{(2k+1)!}x^{2k+1}$

ה. $\ln\frac{1+x}{1-x}=\ln(1+x)-\ln(1-x)=\sum_{k=0}^{\infty} -2x^{2k+1}$ **ו.** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n+1}$

ז. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!}x^{2k}$ **ח.** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!}x^{2k+1}$ **ט.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{4n}$ **י.** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)(tk+1)!}t^{2k+1}$

14. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+2}x^{2n+2}$ (רמז: מצא את טור מקלורן של $\frac{2t}{1+t^2}$ על ידי טור הנדסי מתחלף)

15. 0.946083

17. 0.486385

18. 1.2135

19. 0.003

20. **א.** $\frac{3}{4}$ **ב.** $\frac{15}{32}$ **ג.** 3

21. **א.** לא נכון. למשל אם $R=2.1$. **ב.** נכון **ג.** לא נכון

ד. לא נכון (למשל הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$) **ה.** נכון (נובע מנוסחת האדמאר) **ו.** נכון

22. -7

25. $\frac{\sqrt{62}}{2}$

26. קיימים שני פיתרונות: $\vec{w}_1=(4,-2,-2)$, $\vec{w}_2=(-4,2,2)$

27. 32

28. A, C, E

29. לא (נפח המקבילון הנוצר על ידי ארבעת הנקודות שונה מאפס)

30. $\alpha=2,-2$

.31 **א.** $\cos(\vec{u},\vec{v}) = \frac{5}{7}$ **ב.** $\frac{55}{7}$

.33 $\frac{2}{3}$

.34 $-2x - 4y - 2z + 10 = 0$

.35 $x + 7y + 10z = 0$

.36 $-x + y = 0$

.37 לא. למשל $\vec{u} = \vec{i}$, $\vec{v} = \vec{i}$, $\vec{w} = 3\vec{i}$

.38 $\frac{10}{\sqrt{212}}$

.39 $x = 3 - 2t$, $y = -1 + 2t$, $z = 4 - 2t$

.40 $x = -4 + t$, $y = 3 + 3t$, $z = 5t$

.41 $x = 3 - 2t$, $y = 4 + 7t$, $z = -9 - 4t$

.42 $x = 1 + 3t$, $y = 2 + 4t$, $z = -1 - 5t$

.43 $\frac{2}{3}$

.44 הישרים אינם נחתכים

.45 הישר פוגש את המישור בנקודה $P(5,5,-2)$

.46 $10x + 7y - 5z = 64$

.47 $8x - 5y - 2z - 9 = 0$

.50 $3x - 4y + 2z + 4 = 0$

.51 $-x + 5y + 6z + 31 = 0$

.54 $4y + 6z - 14 = 0$

.55 **א.** $\mathscr{D} = \{\,(x,y) \mid x + y \le 1\}$, תחום פשוט קשר, סגור, ולא חסום

ב. $\mathscr{D} = \{\,(x,y) \mid (x \le -2 \text{ or } x \ge 2) \text{ and } -2 \le y \le 2\}$, תחום סגור, לא קשיר, לא חסום

ג. $\mathscr{D} = \mathbb{R}^2$, תחום פשוט קשר, סגור ופתוח בו־זמנית,

ד. $\mathscr{D} = \{\,(x,y) \mid y \ne 2x \text{ and } y \ne -2x\}$, תחום פתוח, לא קשיר, לא חסום

ה. $\mathscr{D} = \{\,(x,y) \mid y > -x^2\}$, תחום פתוח, פשוט קשר, לא חסום

ו. $\mathscr{D} = \{\,(x,y)\,|\,(x+y \geq -1 \text{ and } x+2y<1) \text{ or } (x+y \leq -1 \text{ and } x+2y>1)\}$,
תחום חצי־פתוח, לא קשיר, לא חסום

ז. $\mathscr{D} = \{\,(x,y)\,|\,0 < x^2+y^1 \leq 1\}$, תחום חצי־סגור, קשיר, חסום, אינו פשוט קשר

ח.
$\mathscr{D} = \{\,(x,y)\,|\,(1+2x+y>0 \text{ and } x^2+y^2-4>0) \text{ or } (1+2x+y<0 \text{ and } x^2+y^2-4<0\}$,
תחום פתוח, לא קשיר, לא חסום

ט. $\mathscr{D} = \mathbb{R}^2$, תחום פשוט קשר, סגור ופתוח בו־זמנית, לא חסום

י. $\mathscr{D} = \{\,(x,y)\,|\,x^2 \geq y^2+1 \text{ and } |x| \leq 2\}$, תחום סגור, לא קשיר, חסום

יא. $\mathscr{D} = \{\,(x,y)\,|\,x \geq 1 \text{ and } |y| \leq 1\}$, תחום סגור, פשוט קשר, לא חסום

.58 $f_1 : D$, $f_2 : E$, $f_3 : B$, $f_4 : A$, $f_5 : C$, $f_6 : F$

.60 **א.** 0 **ב.** $\frac{1}{12}$ **ג.** לא קיים גבול **ד.** 0 **ה.** לא קיים גבול
ו. לא קיים גבול

.61 **א.** לא **ב.** לא **ג.** לא **ד.** לא **ה.** לא

.63 $\frac{1}{2}$

.64 **א.** $f_x = 2xe^{x^2+y^2}$, $f_y = 2ye^{x^2+y^2}$ **ב.** $f_x = -\frac{y}{x^2+y^2}$, $f_y = \frac{x}{x^2+y^2}$
ג. $f_r = 4r^3\cos^2\theta$, $f_\theta = -r^4\sin 2\theta$ **ד.** $f_x = \frac{y^2+1}{2\sqrt{xy^3+xy}}$, $f_y = \frac{xy^2-x}{2\sqrt{xy^5+xy^3}}$

.65 r

.66 $f_x(0,0)=0$, $f_y(0,0)=0$, $f_x(1,0)=0$, $f_y(1,0)$ לא קיים,
$f_x(0,1)$ לא קיים, $f_y(0,1)=0$

.67 $f_x(0,0)=0$, $f_y(0,0)=0$

.68 $f_u = \frac{1}{v} - \frac{v}{u^2}$, $f_v) = -\frac{u}{v^2} + \frac{1}{u}$

.72 **א.** $dz = \sin(2x)dx - \sin(2y)dy$ **ב.** $dz = yx^{y-1}dx + x^y\ln(x)dy$

.73 1.08

.74 0.01

.75 2.95

.81 $\alpha = 0$, $\alpha = 1$

.85 $z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(x-\frac{\pi}{4}) - \frac{1}{2}(y-\frac{\pi}{4})$