גיליון תרגילים 2
חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי ב'

מועד הגשה: יום חמישי, 07.12.2017

1. בדוק התכנסות בהחלט, התכנסות בתנאי, או התבדרות של כל אחד מהטורים הבאים.

א. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n}}$ **ב.** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{4n\cos(n\pi)}{2n^2+1}$ **ג.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[7]{n^2}\sqrt[6]{n}}$

ד. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n\ln\sqrt{n}}$ **ה.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\ln(n+5)}{2n+1}$ **ו.** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{\pi}{n}$

ז. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}e^{\sqrt{n}}}{2^n}$ **ח.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}{n}$

2. הוכח או הפרך על ידי דוגמא נגדית

א. אם $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ טור חיובי מתכנס, אזי גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{\sqrt[n]{n}}$ הוא טור חיובי מתכנס.

ב. אם $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ הוא טור מתכנס בהחלט אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ מתכנס.

ג. אפשר להשתמש במבחן האינטגרל בכדי לבדוק את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{4+\cos n\pi}$

ד. אם $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$, שני טורים מתכנסים בהחלט אז גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ הוא טור מתכנס בהחלט.

ה. $\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{n^6}<0.001$

ו. $\displaystyle\int_{10}^{\infty}\frac{1}{x^2+1}<\sum_{n=9}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}<\int_{9}^{\infty}\frac{1}{x^2+1}$

ז. ניתן להשתמש במבחן האינטגרל בכדי לבדוק התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n}$

ח. אם $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה חיובית, ואם $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ הוא טור מתכנס, אז $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה מונוטונית יורדת ששואפת לאפס.

3. חקור התכנסות נקודתית והתכנסות במידה שווה של סדרת פונקציות בקטע הנתון. מצא את הפונקציה הגבולית (אם היא קיימת) בתחום ההתכנסות הרשום בצד שמאל.

א. $f_n(x) = x^n$, $\quad 0 \le x \le \frac{1}{2}$

ב. $f_n(x) = x^n(1 - x^n)$, $\quad 0 \le x \le 1$

ג. $f_n(x) = \dfrac{1}{n + x}$, $\quad 0 < x < \infty$

ד. $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n}$, $\quad -\infty < x < \infty$