חדו"א ב'

פיתרון מבחן סופי, מועד א', סמסטר א' תשע"ח, 7.02.2018

שאלה 1: [14%]

בדוק התכנסות בתנאי, התכנסות בהחלט, או התבדרות של הטורים הבאים

א. $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \sin\frac{\pi}{n}$ **ב.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^3+1}}$

פיתרון:

א. נסמן $a_n=\sin\frac{\pi}{n}$. אזי a_n היא סדרה חיובית ומונוטונית יורדת החל מהאיבר $n=2$, כי הפונקציה $f(x)=\sin x$ היא פונקציה מונוטונית עולה בקטע $[0,\frac{\pi}{2}]$, והסדרה $\frac{\pi}{n}$ יורדת לאפס. כמו־כן, $\lim_{n\to\infty}a_n=0$, כי $\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}=0$, $\sin x$ רציפה בנקודה $x=0$, ו־ $\sin 0=0$ (משפט היינה של חדו"א 1).

מכאן שהטור $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n a_n$ מקיים את תנאי משפט לייבניץ ולכן הוא מתכנס.

הטור אינו מתכנס בהחלט. נשווה את הטור $\sum_{n=2}^{\infty}\sin\frac{\pi}{n}$ עם הטור ההרמוני $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\pi}{n}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}=\lim_{x\to 0+}\frac{\sin x}{x}=1$$

ביצענו הצבה $\frac{\pi}{n}=x$. על פי מבחן ההשוואה השני סעיף א' (משפט 8), שני הטורים מתכנסים יחד או מתבדרים יחד. מאחר והטור ההרמוני מתבדר, גם הטור שלנו מתבדר.

לסיכום קיבלנו כי הטור $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{\pi}{n}$ מתכנס בתנאי.

ב. נשתמש במבחן ההשוואה הראשון עבור טורים חיוביים

$$\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^3+1}}\le\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^3}}=\frac{n^{\frac{1}{3}}}{n^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{n^{\frac{3}{2}-\frac{1}{3}}}=\frac{1}{n^{\frac{7}{6}}}$$

הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{7}{6}}}$ מתכנס על פי מבחן טורי־p (ראה משפט 14), ולכן הטור שלנו מתכנס. ההתכנסות היא גם בהחלט כי הטור חיובי (כל טור חיובי שמתכנס הוא אוטומטית מתכנס בהחלט).

שאלה 2: [12%]

הסבר מדוע הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}$ מתכנס, וחשב את סכומו ברמת דיוק של 3 ספרות אחרי הנקודה העשרונית (10^{-3}), באמצעות סכום חלקי מינימלי. הסבר מדוע תשובתך נכונה על סמך נוסחאות ומשפטים מתאימים.

פיתרון: הטור מתכנס על פי מבחן טורי־p. במקרה הנוכחי $p = 6 > 1$ ולכן על פי מבחן זה הטור מתכנס.

זהו טור חיובי אשר האיבר הכללי שלו היא סדרה מונוטונית יורדת ולכן ניתן להשתמש במבחן האינטגרל בכדי להעריך כל שארית שלו. יש למצוא n מינימלי שעבורו מובטח לנו כי שארית הטור $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^6}$, תקיים $r_n < 10^{-3}$. לשם כך נשתמש בנוסחה (6) (מסקנה של מבחן האינטגרל)

$$r_n < \int_n^{\infty} f(x)\,dx$$

כאשר במקרה שלנו $f(x) = \frac{1}{x^6}$. נחשב את האינטגרל האחרון

$$\int_n^{\infty}\frac{1}{x^6}\,dx = \int_n^{\infty}x^{-6}\,dx = -\frac{x^{-5}}{5}\Big|_n^{\infty} = -\frac{1}{5x^5}\Big|_n^{\infty} = \frac{1}{5n^5} < \frac{1}{1000}$$

יש למצוא מספר טבעי n כך ש־$5n^5 > 1000$. המספר הטבעי הראשון שמקיים זאת הוא $n = 3$, לכן הסכום החלקי $\sum_{n=1}^{3}\frac{1}{n^6}$ יספיק בכדי לקבל הערכה מדויקת ברמה של שלוש ספרות לאחר הנקודה העשרונית

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6} \approx \frac{1}{1^6} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} = 1.017$$

שאלה 3: [12%]

תהי $f_n(x) = \frac{1}{n+x}$, $n = 1, 2, \ldots$, סדרת פונקציות בתחום $[0, \infty)$.

א. הוכח כי סדרה זו מתכנסת נקודתית לפונקציה גבולית $f(x)$ על כל התחום $[0, \infty)$, ומצא את הפונקציה הגבולית $f(x)$.

ב. האם הסדרה $f_n(x)$ מתכנסת לפונקציה $f(x)$ במידה שווה? נמק היטב את תשובתך.

פיתרון:

א. ברור כי לכל x בתחום $[0, \infty)$, ולכל $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$0 \le \frac{1}{n+x} \le \frac{1}{n} \tag{1}$$

ולכן על פי כלל הסנדביץ'

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+x} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

לכן קיבלנו שלכל x בתחום $[0,\infty)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+x} = 0$$

נגדיר $f(x) = 0$ לכל x בתחום $[0,\infty)$, אזי $f(x)$ היא הפונקציה הגבולית של סדרת הפונקציות $f_n(x)$ בתחום $[0,\infty)$.

ב. על סמך אי־השוויון (1)

$$\sup_{0\leq x<\infty} |f(x) - f_n(x)| = \sup_{0\leq x<\infty} \left|0 - \frac{1}{n+x}\right| = \frac{1}{n+x} \leq \frac{1}{n}$$

ולכן

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0\leq x<\infty} |f(x) - f_n(x)| = 0$$

ולכן על פי משפט 17 סדרת הפונקציות שלנו מתכנסת לפונקציה הגבולית $f(x)$ על כל התחום $[0,\infty)$.

שאלה 4: [12%]

נתון טור החזקות $\quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + (-3)^n}{5n} x^n$

א. חשב את רדיוס ההתכנסות של הטור

ב. מצא את תחום ההתכנסות (בדוק התכנסות בקצוות של התחום)

פיתרון:

א. נשתמש בנוסחת האדאמר (משפט 26)

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{5n}}{\sqrt[n]{4^n + (-3)^n}} \\ &= \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{4^n \left(1 + \frac{(-3)^n}{4^n}\right)}} \\ &= \frac{1}{4 \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + \left(\frac{-3}{4}\right)^n}} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

הגבול האחרון נובע מאחד ממשפטי הגבול שאומר שאם $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ אז $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$.

ברור שהסדרה $a_n = 1 + \left(\frac{-3}{4}\right)^n$ שואפת ל־ 1.

ב. קיבלנו שרדיוס ההתכנסות הוא $R = \frac{1}{4}$, ולכן יש לבדוק התכנסות בקצוות $x = -\frac{1}{4}$, $x = \frac{1}{4}$. נתחיל עם $x = -\frac{1}{4}$. נוסחת האיבר הכללי של הטור הוא

$$a_n = \frac{4^n + (-3)^n}{5n} \cdot \frac{(-1)^n}{4^n} = \frac{(-1)^n}{5n} + \frac{1}{5n} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5n}$ מתכנס על פי מבחן לייבניץ.

הטור החיובי $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n$ מתכנס על ידי השוואה עם הטור ההנדסי $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n$

$$\frac{1}{5n} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

לכן טור החזקות שלנו מתכנס בקצה $x = -\frac{1}{4}$.

נבדוק את הקצה השני $x = \frac{1}{4}$

$$a_n = \frac{4^n + (-3)^n}{5n} \cdot \frac{1}{4^n} = \frac{1}{5n} + \frac{1}{5n} \cdot \left(\frac{-3}{4}\right)^n$$

הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n}$ הוא טור הרמוני מתבדר.

הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n} \cdot \left(\frac{-3}{4}\right)^n$ מתכנס בהחלט על ידי השוואה עם הטור ההנדסי $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n$

$$\left|\frac{1}{5n} \cdot \left(\frac{-3}{4}\right)^n\right| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

לכן טור החזקות שלנו מתבדר בקצה $x = \frac{1}{4}$.
(כזכור ממהלך הקורס, סכום של טור מתבדר עם טור מתכנס נותן טור מתבדר)

לסיכום: **תחום ההתכנסות של טור החזקות שלנו הוא הקטע** $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$.

שאלה 5: [10%]

נתונים שני הוקטורים $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$.

א. מצא וקטור $\vec{w}$ כך ש־ $\vec{u} \parallel \vec{w}$, $\vec{w} \cdot \vec{v} = 2$.

ב. מצא וקטור $\vec{w}$ כך ש־ $\vec{u} \perp \vec{w}$, $\vec{v} \perp \vec{w}$, ובנוסף $\|w\| = 1$. האם הפיתרון יחיד?

פיתרון:

א. המשמעות של $\vec{u} \parallel \vec{w}$ ($\vec{w}$ מקביל לוקטור $\vec{u}$) היא שקיים סקלר a כך ש

$$\vec{w} = a\vec{u} = a\vec{i} + a\vec{j} - a\vec{k}$$

מהתנאי $\vec{w}\cdot\vec{v}=2$ נובע

$$\begin{aligned}\vec{w}\cdot\vec{v} &= (a\vec{i}+a\vec{j}-a\vec{k})\cdot(\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k})\\ &= a-a-2a=-2a=2\end{aligned}$$

לכן $a=-1$, ולכן $\vec{w}=-\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$.

ב. מהתנאים $\vec{w}\perp\vec{u}$, $\vec{w}\perp\vec{v}$ נובע כי $\vec{w}$ מקביל לוקטור $\vec{u}\times\vec{v}$

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 2\end{vmatrix}=\vec{i}-3\vec{j}-2\vec{k}$$

לכן קיים סקלר c כך ש־ $\vec{w}=c\vec{i}-3c\vec{j}-2c\vec{k}$, ולכן

$$\|w\|^2=c^2+9c^3+4c^2=14c^2=1$$

ולכן $c=\pm\frac{1}{\sqrt{14}}$. קיבלנו שני פיתרונות שונים

$$\begin{aligned}w &= \frac{1}{\sqrt{14}}\vec{i}-\frac{3}{\sqrt{14}}\vec{j}-\frac{2}{\sqrt{14}}\vec{k}\\ w &= -\frac{1}{\sqrt{14}}\vec{i}+\frac{3}{\sqrt{14}}\vec{j}+\frac{2}{\sqrt{14}}\vec{k}\end{aligned}$$

שאלה 6: [12%]

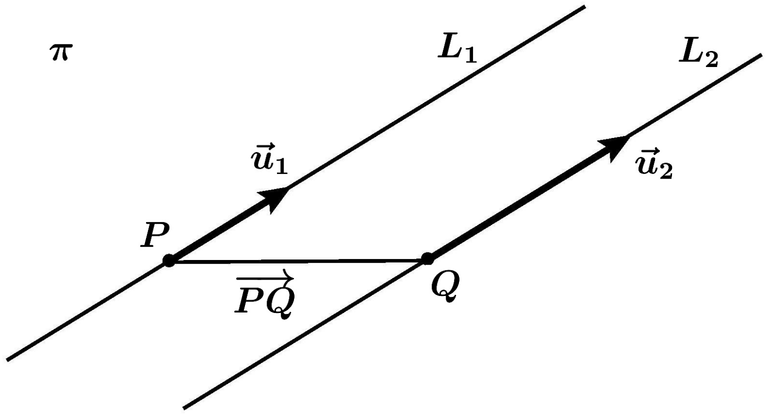
א. הוכח כי שני הישרים הבאים מקבילים אך אינם מתלכדים

$$L_1:\ \begin{cases}x=3+t\\ y=3t\\ z=1-2t\end{cases}\qquad L_2:\ \begin{cases}x=8+2t\\ y=-4+6t\\ z=3-4t\end{cases}$$

ב. האם קיים מישור π המכיל בתוכו את שני הישרים L_1, L_2? אם כן, מצא את משוואת המישור π, והסבר מדוע שני הישרים כלולים בתוכו. אם לא, נמק מדוע לא קיים מישור כזה?

פיתרון:

א. וקטור הכיוון של הישר L_1 הוא $\vec{u}_1=\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k}$, וקטור הכיוון של הישר L_2 הוא $\vec{u}_2=2\vec{i}+6\vec{j}-4\vec{k}$. ברור כי $\vec{u}_2=2\vec{u}_1$ ולכן $\vec{u}_1\parallel\vec{u}_2$. כלומר שני הישרים מקבילים. בכדי להוכיח שהם אינם מתלכדים, יספיק למצוא נקודה אחת P ששייכת לישר L_1 אך אינה שייכת לישר L_2. קל לבדוק שהנקודה $P(3,0,1)$ שייכת ל־ L_1 ($t=0$), אבל אינה שייכת לישר L_2 (מערכת לא עקבית).



איור 1: הישרים L_1 , L_2 , במישור π

ב. מאחר והישרים מקבילים, קיים מישור π המכיל את שניהם. נחפש וקטור נורמל עבור המישור π. נציב $t=0$ בהצגה הפרמטרית של L_2 ונקבל כי $Q(8,-4,3)$ נקודה על L_2. הוקטורים $\vec{u}_1$, $\overrightarrow{PQ}$ כלולים במישור ולכן מכפלתם הוקטורית תיתן וקטור נורמל למישור π

$$\overrightarrow{N} = \vec{u}_1 \times \overrightarrow{PQ} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & -2 \\ 5 & -4 & 2 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - 12\vec{j} - 19\vec{k}$$

לשם נוחות נוכל לקחת

$$\overrightarrow{N} = 2\vec{i} + 12\vec{j} + 19\vec{k}$$

נשתמש בנקודה $P(3,0,1)$ כנקודת ייחוס, ולכן משוואת המישור π היא

$$2(x-3) + 12y + 19(z-1) = 0$$

או בצורה

$$2x + 12y + 19z = 25$$

בכדי להוכיח ששני הישרים L_1 , L_2, כלולים במישור π, יספיק לבדוק שההצגה הפרמטרית שלהם מקיימת את משוואת המישור. למשל עבור L_2 הבדיקה תיראה כך

$$\begin{aligned} 2x + 12y + 19z &= 2(8+2t) + 12(-4+6t) + 19(3-4t) \\ &= 16 + 4t - 48 + 72t + 57 - 76t \\ &= 25 \end{aligned}$$

שאלה 7: [12%]

על ידי שימוש בטור מקלורן חשב את הערך של $\int_0^{1/4} x^2 \arctan 2x$ ברמת דיוק של ארבעה ספרות אחרי הנקודה העשרונית (10^{-4}). יש להשתמש במספר מינימלי של איברי הטור שהמשפטים שנלמדו בקורס מאפשרים.

פיתרון:

נשתמש בנוסחת מקלורן של $\arctan x$ (שכלולה בסיכום הקורס בקבוצת נוסחאות 12)

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

אם נחליף את x ב־$2x$ נקבל

$$\arctan 2x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n+1}x^{2n+1}}{2n+1} = 2x - \frac{2^3x^3}{3} + \frac{2^5x^5}{5} - \frac{2^7x^7}{7} + \cdots$$

ולכן

$$x^2 \arctan 2x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n+1}x^{2n+3}}{2n+1} = 2x^3 - \frac{2^3x^5}{3} + \frac{2^5x^7}{5} - \frac{2^7x^9}{7} + \cdots$$

לבסוף נבצע אינטגרציה

$$\begin{aligned}\int x^2 \arctan 2x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n+1}x^{2n+4}}{(2n+1)(2n+4)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n}x^{2n+4}}{(2n+1)(n+2)} \\ &= \frac{x^4}{2} - \frac{2^2x^6}{3\cdot 3} + \frac{2^4x^8}{5\cdot 4} - \frac{2^6x^{10}}{7\cdot 5} + \cdots\end{aligned}$$

לכן

$$\int_0^{1/4} x^2 \arctan 2x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{2n+4}}{(2n+1)(n+2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(n+2)2^{2n+8}}$$

זהו טור לייבניץ ולכן לכל n, שארית הטור r_n תקיים $r_n < |a_{n+1}|$

$$|a_{n+1}| = \frac{1}{(2n+3)(n+3)2^{2n+10}}$$

אם נקח $n=1$ אז נקבל

$$|a_2| = \frac{1}{5\cdot 4\cdot 2^{12}} = \frac{1}{20\cdot 4096} = \frac{1}{81920} < \frac{1}{10000}$$

לכן יספיק למעשה לקחת את האיבר הראשון של הטור בכדי לקבל את הסכום ברמת דיוק של 10^{-4}:

$$S \approx \frac{1}{2^9} = 0.0019$$

שאלה 8: [16%]

נתון האליפסואיד $x^2+2y^2+z^2=25$.

א. מצא את משוואת המישור המשיק לאליפסואיד בנקודה $P(1,2,4)$

ב. מצא את משוואת הישר במרחב $\mathbb{R}^3$ הניצב לאליפסואיד בנקודה $P(1,2,4)$

ג. האם הישר שמצאת בסעיף הקודם חותך את האליפסואיד בנקודה נוספת Q? אם כן, מצא את Q. אם לא, נמק מדוע.

הדרכה: נסה להציג את z כפונקציה של המשתנים x, y.

פיתרון:

א. ניתן להציג את האליפסואיד על ידי הגרף של הפונקציה

$$z=\sqrt{25-x^2-2y^2}$$

זהו החצי העליון של האליפסואיד.

(החצי התחתון נתון על יד הגרף של $z=-\sqrt{25-x^2-2y^2}$)

נחשב נגזרות חלקיות

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-2x}{2\sqrt{25-x^2-2y^2}}=\frac{-x}{\sqrt{25-x^2-2y^2}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-4y}{2\sqrt{25-x^2-2y^2}}=\frac{-2y}{\sqrt{25-x^2-2y^2}}$$

נוסחת המישור המשיק לגרף של $z=f(x,y)$ בנקודה $P(x_0,y_0,z_0)$

$$z-z_0=\frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

במקרה הנוכחי

$$(x_0,y_0,z_0)=(1,2,4),\qquad \frac{\partial z}{\partial x}(1,2)=-\frac{1}{4},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}(1,2)=-1$$

לכן משוואת המישור היא

$$z-4=-\frac{1}{4}(x-1)-(y-2)$$

או בצורה נורמלית

$$x+4y+4z=25$$

ב. נוסחת הוקטור הנורמל למשטח בנקודה היא

$$\vec{N} = \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)\vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)\vec{j} - \vec{k}$$

במקרה של האליפסואיד שלנו

$$\vec{N} = -\frac{1}{4}\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$$

לשם נוחות נכפול את $\vec{N}$ בסקלר -4 (הוא כמובן ישאר נורמל לאליפסואיד)

$$\vec{N} = \vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}$$

לכן ההצגה הפרמטרית של הישר הניצב לאליפסואיד בנקודה $P(1,2,4)$ היא

$$L: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 4t \\ z = 4 + 4t \end{cases}$$

בכדי למצוא את נקודות החיתוך של הישר עם האליפסואיד, יש למצוא את ערכי t המקיימים

$$(1+t)^2 + 2(2+4t)^2 + (4+4t)^2 = 25$$

כלומר

$$1 + 2t + t^2 + 8 + 32t + 32t^2 + 16 + 32t + 16t^2 = 25$$

ולכן

$$49t^2 + 66t = 0$$

קיבלנו שני שורשים: $t = 0$ שנותן את הנקודה $P(1,2,4)$ שאיתה פתחנו את הבעייה, והשורש השני $t = -\frac{66}{49}$ שנותן את הנקודה

$$\begin{cases} x = 1 - \frac{66}{49} = -\frac{17}{49} \\ y = 2 - 4 \cdot \frac{66}{49} = -\frac{166}{49} \\ z = 4 - 4 \cdot \frac{66}{49} = -\frac{68}{49} \end{cases}$$

כלומר הישר L פוגש את האליפסואיד בנקודה נוספת

$$Q\left(-\frac{17}{49}, -\frac{166}{49}, -\frac{68}{49}\right)$$