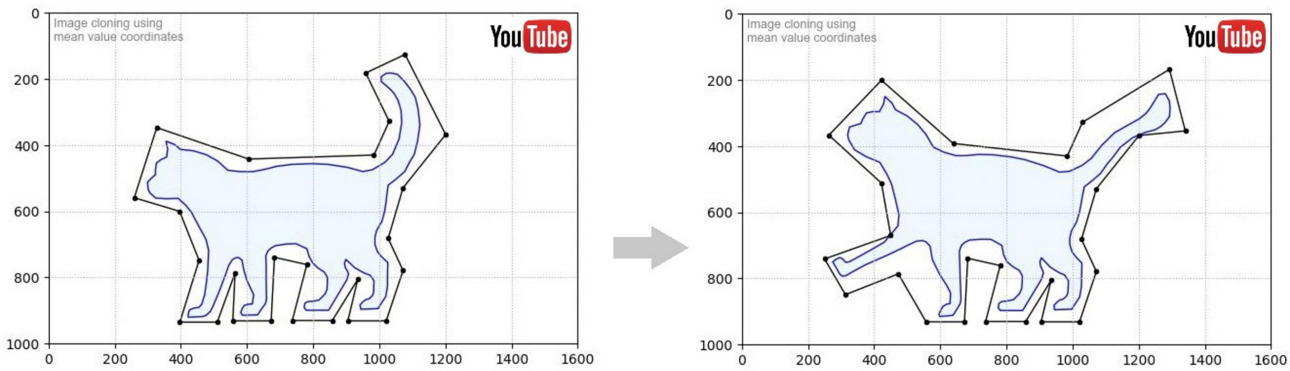
פרוייקט: שימושים של פונקציות הרמוניות באנימציה ממוחשבת

דניאל רבייב (danielr@technion.ac.il), סמי זעפרני (https://samyzaf.com)[1]

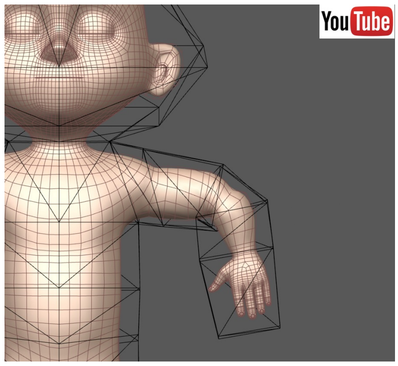


תוכן עניינים

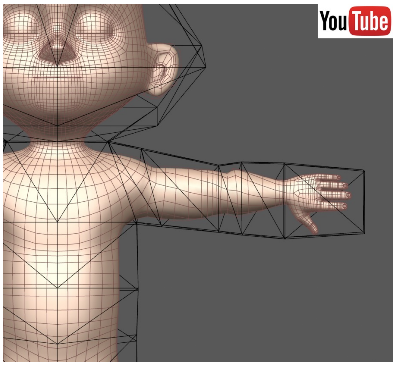
[1] תודה מיוחדת ליאיר זעפרני על עזרה ותמיכה בקוד *Python*, ותודה ללידיה פרס על תיקונים והגהות.

1. מבוא כללי

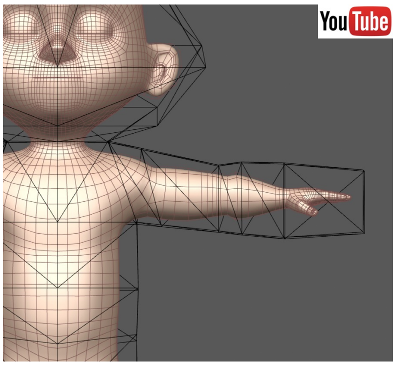
בפרוייקט זה נלמד על שיטה להזזת דמויות באנימציה ממוחשבת שמתבססת על פונקציות הרמוניות (שעליהן נלמד במסגרת הפרוייקט). לאחר בניית הדמות על כל חלקיה, אתגר מרכזי הוא להזיז את הדמות באופן שיראה לצופים טבעי ככל האפשר.



איור 4: קיפול יד שמאל כלפי מטה



איור 3: סיבוב כף יד שמאל ב־ 90°



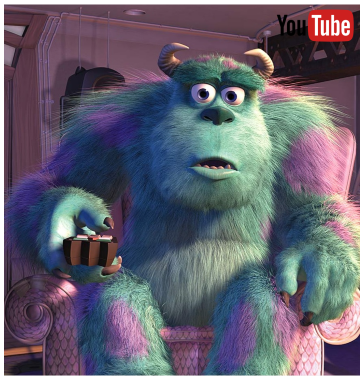
איור 2: הדמות Remy מתוך סרט אנימציה של חברת Pixar

לרובכם כנראה אין ילדים קטנים בבית אבל מי שכן נחשף לתוכניות ילדים "פשוטות" בוודאי שם לב לדמויות אנימציה אשר מתניידות באופן לא משכנע כלל. קושי מיוחד הוא לשקף רגשות בתווי הפנים של הדמויות תוך כדי תנועה. יש שיטות רבות להשיג מטרות אלו. אנחנו נציג שתי שיטות קלאסיות ונחקור לעומק שיטה חדשה שמתבססת על פונקציות הרמוניות שהוצגה במאמרים שבסוף החוברת.

דמות של אנימציה מיוצגת על ידי מבנה נתונים גאומטרי הכולל רשת ענקית של משולשים או מרובעים במרחב (בדרך כלל בין 5000 ל־9000 קודקודים ועשרות אלפי משולשים או מרובעים). בכדי להזיז את הדמות יש לנייד כל קודקוד וקודקוד באופן המתאים עבורו בכדי להשיג אפקט של תנועה טבעית שאינה מעוותת את הדמות באופן לא רצוי. זוהי כמובן משימה חישובית והנדסית מייגעת ומורכבת מאוד.

אחת השיטות להזזת דמות באנימציה היא ע"י חסימת הדמות בתוך "**כלוב**" **(cage)**, שמורכב מרשת קטנה של קודקודים (בדרך כלל 100 עד 150 קודקודים). כל נקודה על הדמות תתמפה לרשימת קואורדינטות שמתארות את המיקום שלה ביחס לקודקודי הכלוב. לאחר כל שינוי של הכלוב יש לשחזר מחדש את כל נקודות הדמות על ידי שימוש בקואורדינטות הללו ביחס לקודקודי הכלוב החדש. תהליך זה נקרא **שיבוט (image cloning)**. הרעיון כאן הוא שתזוזה של האובייקט מצריכה הזזה של כל הנקודות המרכיבות אותו, נשמע די מייגע וקשה לביצוע. עם זאת, אריזת האובייקט בתוך כלוב קטן בהרבה (או מספר כלובים חופפים) תאפשר שליטה מבוקרת על כל נקודות האובייקט, באמצעות קודקודי הכלוב בלבד. השליטה על הכלוב יכולה להתבצע באמצעות לבוש בעל חיישנים שמשדרים את הקואורדינטות שלהם בכל נקודת זמן ושחקן מיומן שמבצע את הפעולות הנדרשות מהדמות, או סימנים מובהקים שניתן לזהות ולעבד

באמצעות תוכנות ויזואליזציה. סקירה מרתקת של השיטות השונות וההיסטוריה של התחום ניתן לראות בסרטוני היוטיוב המקושרים לאיורים 5, 6.



איור 6: How Pixar's Animation Has Evolved Over 24 Years

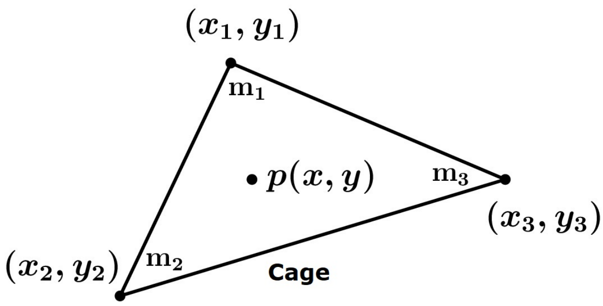
איור 5: YouTube video: Why motion capture is harder than it looks (Vox channel)

הטיפול במקרה התלת-מימדי חורג ממסגרת ורמת הקורס ולכן הפרוייקט שלנו יתמקד במקרה של אנימציה דו-מימדית בלבד. דוגמאות לכך ניתן לראות בסרטון הפתיחה או בעמוד 9.

נציג שלוש שיטות שונות לייצג דמות דו-מימדית באמצעות קואורדינטות כלוב במישור.

1.1 קואורדינטות בריצנטריות (Barycentric Coordinates)

בשנת 1678, מתמטיקאי איטלקי בשם Giovanni Ceva הוכיח את משפט Ceva: בהינתן משולש כלשהו (ראה איור 7), לכל נקודה p בתוך המשולש, קיימים גדלים של מסה m_1, m_2, m_3, שאם נניח אותם על קודקודי המשולש, **מרכז הכובד** שלהם יהיה בנקודה p.



איור 7: דמות של נקודה $p(x, y)$ בתוך כלוב משולש. הקואורדינטות m_1, m_2, m_3 של p הן גודלי מסה אשר עבורם p תהיה מרכז המסה.

המספרים (m_1, m_2, m_3) נקראים קואורדינטות בריצנטריות של הנקודה p, וזוהי למעשה מערכת הקואורדינטות הכי פשוטה שיש לה שימושים בגרפיקה ממוחשבת, ובשטחים נוספים (ראה תחילת מאמר [5]). מקור המונח bary-centric הוא בשפה היוונית ומשמעותו היא מרכז כובד. הפונקציות לחישוב הקואורדינטות האלה הן ליניאריות (ולכן קלות מאוד לחישוב). למרות מגבלת הכלוב המשולש (שאינה מאפשרת שליטה מיטבית על הדמות), מערכת זו חשובה בגלל שהיא מספקת דוגמה פשוטה לרעיון הכללי, ובנוסף לכך, מערכות יותר מתקדמות משתמשות

בה כרכיב בסיסי לשם הגדרה של קואורדינטות יותר מורכבות. אנו נציג הוכחה אלגברית למשפט Ceva שהיא למעשה הכללה שלו לכל המישור (כשמאפשרים מסות שליליות, ניתן לייצג גם נקודות מחוץ למשולש). דיון נוסף על קואורדינטות בריצנטריות מומלץ לקרוא בתחילת מאמר [5].

נסמן על ידי β את ההעתקה מהנקודה $p(x,y)$ לקואורדינטות שלה (m_1, m_2, m_3)

$$\beta(x,y) = (m_1, m_2, m_3)$$

מדובר בהעתקה ליניארית $\beta\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, וכעת נוכיח את קיומה. כל העתקה כזו ניתן לפרק לשלושת הרכיבים שלה $m_1 = \beta_1(x,y)$, $m_2 = \beta_2(x,y)$, $m_3 = \beta_3(x,y)$. מדרישת הליניאריות נובע כי הצורה הכללית של הרכיבים היא

$$\begin{aligned} m_1 &= \beta_1(x,y) = a_1x + b_1y + c_1 \\ m_2 &= \beta_2(x,y) = a_2x + b_2y + c_2 \\ m_3 &= \beta_3(x,y) = a_3x + b_3y + c_3 \end{aligned} \tag{1}$$

או בכתיב וקטורי

$$\beta(x,y) = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

הדרישה השניה מכל מערכת קואורדינטות מסוג זה היא שכל נקודה $p(x,y)$ ניתן "לשבט" (clone) מהקואורדינטות שלה וקודקודי הכלוב באמצעות הצירוף הליניארי הבא ("נוסחת השיבוט")

$$\begin{aligned} (x,y) &= (m_1, m_2, m_3) \cdot ((x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3)) \\ &= m_1 \cdot (x_1,y_1) + m_2 \cdot (x_2,y_2) + m_3 \cdot (x_3,y_3) \end{aligned} \tag{3}$$

כאמור, ניתן לפרש את הנוסחה הזו גם בצורה פיזיקאלית: (m_1, m_2, m_3) הן גודלי המסה שיש להניח על קודקודי הכלוב בכדי שהנקודה p תהיה מרכז המסה של הכלוב. אם נזיז את נקודות הכלוב אז ברור שהנקודה שתתקבל מהצירוף הזה כבר לא תהיה הנקודה (x,y) אלא **"השיבוט" (clone)** שלה בכלוב החדש.

שלושת המסות במשפט Ceva אינן יחידות. כל כפולה של שלושת המסות תקיים את התנאי. לכן, לשם נירמול מקובל להוסיף את האילוץ הבא[2]

$$m_1 + m_2 + m_3 = 1 \tag{4}$$

שמתקיים גם בכל מערכות הקואורדינטות מסוג זה. הביטוי שבאגף ימין של (3) נקרא גם צירוף ליניארי קמור (בתנאי ש-$m_1 + m_2 + m_3 = 1$). מדרישה זו נובע שהקואורדינטות של

[2] תודה ללידיה פרס על התוספת החשובה הזו.

קודקודי הכלוב חייבות לקיים

$$\begin{aligned}\beta(x_1,y_1) &= (1,0,0)\\ \beta(x_2,y_2) &= (0,1,0)\\ \beta(x_3,y_3) &= (0,0,1)\end{aligned} \tag{5}$$

משוויונים (2), (5), נקבל

$$\beta(x_1,y_1)=\begin{bmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ y_1\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\beta(x_2,y_2)=\begin{bmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_2\\ y_2\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$\beta(x_3,y_3)=\begin{bmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_3\\ y_3\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

את שלושת השוויונים האחרונים ניתן לדחוס לתוך שוויון יחיד של כפל מטריצות

$$\begin{bmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=I_3$$

כאשר I_3 היא כמובן מטריצת היחידה מסדר 3. אנו מניחים כי הכלוב שלנו הוא משולש לא מנוון, כלומר בעל שטח חיובי. שטח המשולש שווה למחצית הדטרמיננטה של המטריצה השנייה משמאל (בערך מוחלט), ולכן הדטרמיננטה לא מתאפסת, ולכן המטריצה השניה באגף שמאל הפיכה. לכן

$$\begin{bmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}^{-1}$$

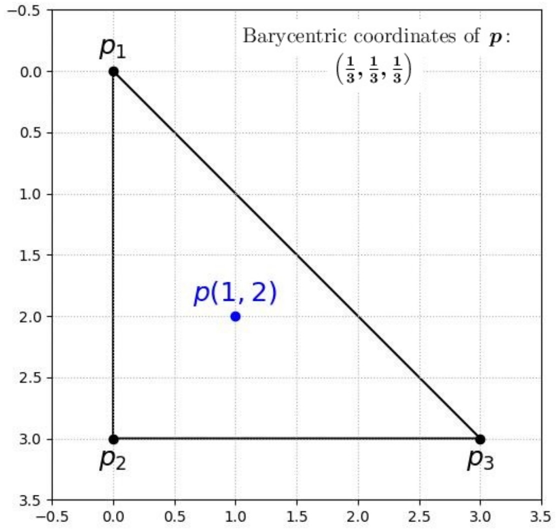
קיבלנו את **נוסחת ההעתקה הבריצנטרית**

$$\boxed{\beta(x,y)=\begin{bmatrix}m_1\\ m_2\\ m_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}x\\ y\\ 1\end{bmatrix}} \tag{6}$$

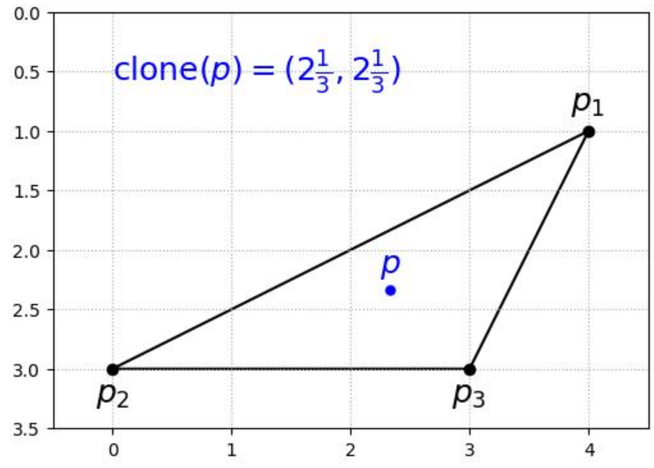
דוגמה 1: אם $p=(1,2)$ והכלוב שלנו הוא המשולש $\{(0,0),(0,3),(3,3)\}$ אז הקואורדינטות הבריצנטריות של p הן

$$\begin{bmatrix} m_1\\ m_2\\ m_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3\\ 0 & 3 & 3\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & 1\\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ \frac{1}{3} & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

ראה איור 8.



איור 8: דמות של נקודה $p(1,2)$ בתוך כלוב משולש $\text{cage1} = \{(0,0),(0,3),(3,3)\}$



איור 9: מה יקרה לנקודה p לאחר שינוי כלוב? $\text{cage2} = \{(4,1),(0,3),(3,3)\}$

אם נשנה את הכלוב כך שהקודקוד p_1 יעבור מהנקודה $(0,0)$ לנקודה $(4,1)$, אז מרכז הכובד שלו p ישתנה: נוכל לחשב את המיקום החדש של הנקודה p על ידי הפעלה פשוטה של נוסחת השיבוט:

$$\begin{aligned}\text{clone}((m_1,m_2,m_3),(p_1,p_2,p_3)) &= (\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3})\cdot((4,1),(0,3),(3,3))\\ &= \tfrac{1}{3}\cdot(4,1)+\tfrac{1}{3}\cdot(0,3)+\tfrac{1}{3}\cdot(3,3)\\ &= (\tfrac{4}{3},\tfrac{1}{3})+(0,1)+(1,1)\\ &= (2\tfrac{1}{3},2\tfrac{1}{3})\end{aligned}$$

ראה איור 9. שוב, רואים כאן כיצד הקואורדינטות (m_1,m_2,m_3) משמשות כמשקולות על קודקודי הכלוב בכדי לחשב את המיקום החדש של הנקודה שלנו.

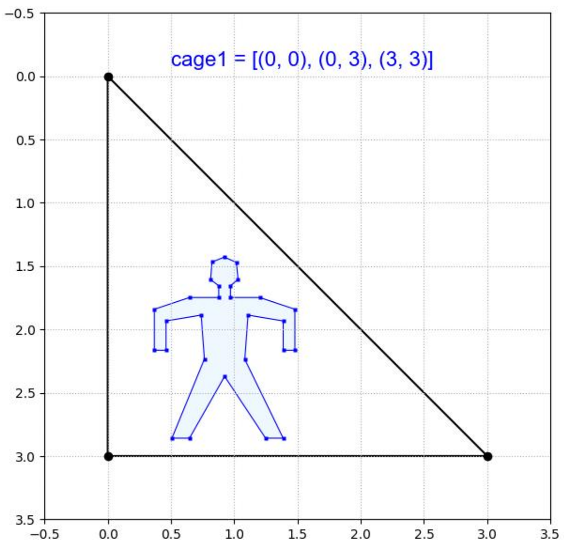
הערה: יש לשים לב לכך שבגרפיקה ממוחשבת כיוון ציר-y במערכת הצירים הפוך ממה שמקובל במתמטיקה!

יש לשים לב לכך שהקואורדינטות של p קבועות לאורך כל התהליך! הדבר היחיד שמשתנה הוא הכלוב. מאחר והקואורדינטות הן ביחס לכלוב, אז שינוי הכלוב גורר שינוי הדמות בהתאם.

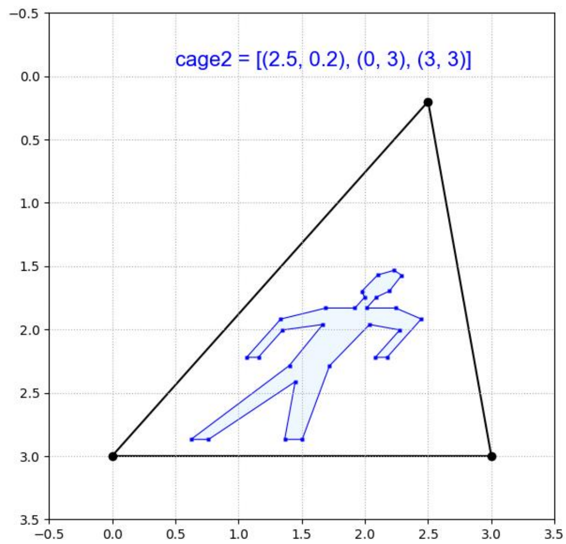
במידה ודמות האנימציה שלנו מורכבת ממספר גדול של נקודות, יש להפעיל את נוסחת השיבוט על כל אחת ואחת מהנקודות בכדי לקבל את הדמות המשובטת בכלוב החדש. ברוב המקרים

המעשיים מדובר בדמויות שניתן לייצג באמצעות פוליגון[3] (מצולע בעל מספר סופי של קודקודים) או רשת נקודות כלשהי. לכן פעולת השיבוט תתבצע באמצעות הפעלת לולאת קוד מחשב על קודקודי הפוליגון או הרשת בלבד[4].

הנה למשל דוגמה של דמות איש שמיוצגת על ידי פוליגון בעל 30 קודקודים, ארוזה בתוך הכלוב המשולש $\{(0,0),(0,3),(3,3)\}$. לאחר שינוי הכלוב רואים כיצד הדמות משתנה בהתאם. ראה איורים 10, 11.



איור 10: אריזה של דמות איש בכלוב 1



איור 11: שיבוט של דמות האיש בכלוב 2

כמובן, פעולה כזו מצריכה שימוש בתוכנה מתאימה. תלמידים בעלי רקע מתאים בשפת התיכנות ***Python*** שמעוניינים להעמיק ולהתנסות בהפעלת קוד כזה מוזמנים לקישור הבא

Using Harmonic Functions for Movie Animation Notebook

ניתן למצוא שם קובצי SVG עבור הפוליגונים של דמות האיש ודמויות נוספות.

1.2 קואורדינטות הערך הממוצע (Mean Value Coordinates)

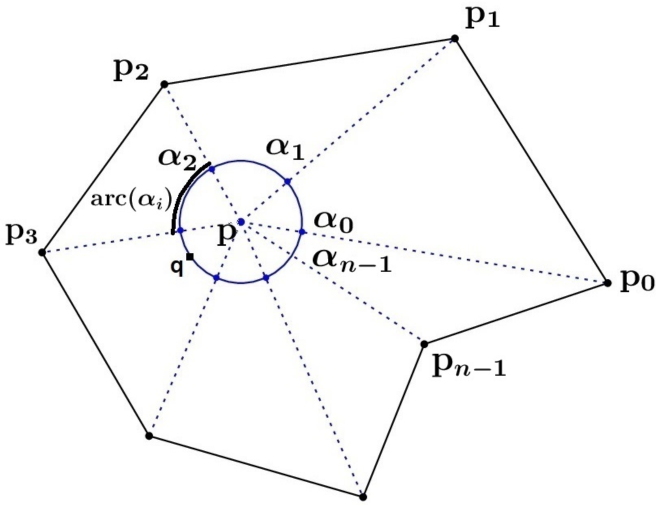
החיסרון הברור של שיטת הקואורדינטות הבריצנטריות הוא שהן תומכות בכלוב משולש בלבד. כמובן, לא ניתן לשלוט על דמויות אנימציה מורכבות ע"י כלוב משולש, ולכן יש להתקדם הלאה. **קואורדינטות ערך ממוצע** הן הכללות שונות של קואורדינטות בריצנטריות עבור כלוב פוליגונלי כלשהו. סקירה של כמה מהדוגמאות הבולטות ניתן למצוא במאמרים [4], [5], [3]. נציג את הרעיון הכללי של הכללה כזו, ונגדיר במדויק דוגמה סטנדרטית אחת של מערכת מסוג זה.

[3] במקרה התלת-מימדי מדובר בפוליהדרון (Polyhedron).

[4] יש כאן הנחה סמויה שקטעים ישרים (שמחברים בין קודקודי הפוליגון או הרשת) ישובטו לקטעים ישרים. זה לא נכון באופן כללי לכל שיטת קואורדינטות, אך אם הפוליגון מספיק מעודן אז זה די קרוב.

בניה של קואורדינטות ערך ממוצע הולכת בערך כך:

1. יהי $C = [p_0, p_1, \dots, p_{n-1}]$ כלוב פוליגונלי, ותהי $p(x,y)$ נקודה בתוך C. נחבר את הנקודה p לקודקודי הכלוב (ראה איור 12), ונסמן על ידי α_0, α_1, ..., α_{n-1} את הזוויות הנוצרות ביו הקטעים הללו.



איור 12: נקודה p בתוך כלוב פוליגונלי $C = [p_1, p_2, \dots, p_{n-1}]$

2. לכל $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ תהי β_i העתקת הקואורדינטות הבריצנטריות עבור המשולש $\triangle(\mathrm{p}, \mathrm{p}_i, \mathrm{p}_{i+1})$. לשם נוחות נגדיר $p_n = p_0$ (כדי שלמשולש עבור $i = n-1$ יהיה מובן).

3. נקח מעגל סביב הנקודה p הכלול בתוך הכלוב שלנו C. עבור כל i, תהי $\mathrm{arc}(\alpha_i)$ הקשת המתאימה לזווית α_i. קשת זו כלולה במשולש $\triangle(\mathrm{p}, \mathrm{p}_i, \mathrm{p}_{i+1})$, ולכן לכל נקודה q על הקשת הזו יש קואורדינטות בריצנטריות $\beta_i(q)$ במשולש הנ"ל.

4. קואורדינטת הערך הממוצע λ_i מוגדרת על ידי אינטגרל קווי מיוחד המחשב את **הממוצע** של פונקציה $f(\beta_i(q))$ לאורך הקשת $\mathrm{arc}(\alpha_i)$. קיים חופש רב בבחירת הפונקציה f, וכל אחת מהשיטות המוזכרות לעיל בוחרת בפונקציה f בהתאם למטרותיה.

$$\lambda_i(p) = \frac{w_i}{\sum_{j=0}^{n-1} w_j}, \quad w_i = \int_{\mathrm{arc}(\alpha_i)} f(\beta_i(x,y))\, ds, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1 \tag{7}$$

לכל נקודה $q = (x,y)$ על הקשת $\mathrm{arc}(\alpha_i)$ יש קואורדינטות בריצנטריות במשולש $\triangle(\mathrm{p}, \mathrm{p}_i, \mathrm{p}_{i+1})$, ולכן הביטוי $f(\beta_i(x,y))$ הוא פונקציה של הקואורדינטות הבריצנטריות של q. כלומר, האינטגרל הקווי הנ"ל מחשב **ערך ממוצע** של קומבינציה מסוימת של הקואורדינטות הבריצנטריות לאורך מעגל סביב p. כזכור, יש לנו n קודקודים בכלוב, ולכן יש n קואורדינטות כאלה.

הערות: בחירת המעגל בסעיף 3 אינה משנה כל עוד הוא כלול בשלמותו בתוך הכלוב. דוגמאות למערכות מסוג זה ניתן למצוא במאמר [4]. נוסחת השיבוט כמובן נשארת כמו קודם וחלה על כל מערכת קואורדינטות מסוג זה.

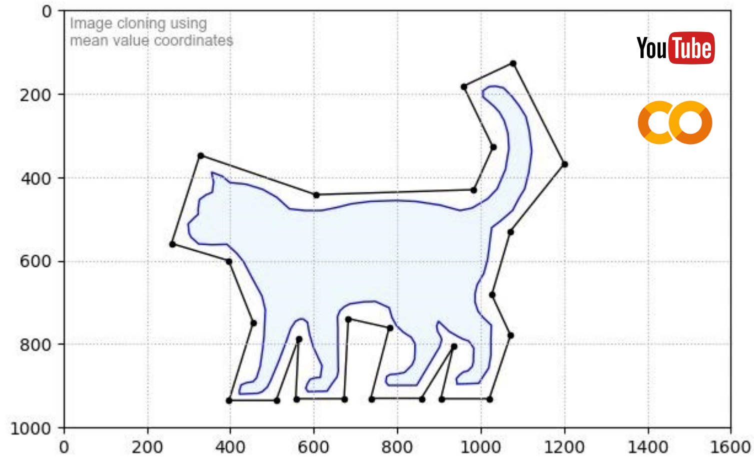
יוצא שהגדרת קואורדינטות הערך הממוצע מתבססות על הקואורדינטות הבריצנטריות:

מחלקים את הכלוב שלנו ל־n משולשים, ואז משתמשים בקואורדינטות בריצנטריות של המשולשים. מאחר וחישוב של אינטגרל קווי אינו פרקטי עבורנו, לא נתעכב על הפרטים, ובמקום זאת נשתמש במערכת שעבורה קיימת נוסחה פשוטה וקלה לחישוב[5], שמתוארת במאמרים [4], [3], [5]:

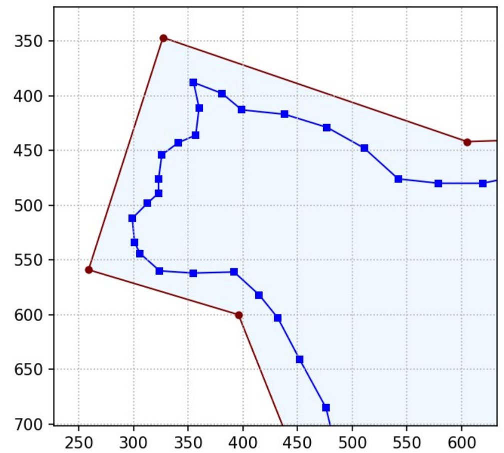
$$\lambda_i(p) = \frac{w_i}{\sum_{j=0}^{n-1} w_j}, \qquad w_i = \frac{\tan(\frac{\alpha_{i-1}}{2}) + \tan(\frac{\alpha_i}{2})}{\|p_i - p\|}, \qquad i = 0, \ldots, n-1 \tag{8}$$

בניגוד למצב של קואורדינטות הרמוניות שעבורן אין לנו נוסחה מפורשת מסוג זה (כפי שנווכח בחלק הבא), קיום נוסחה מתמטית מפורשת מסוג זה מצילה אותנו מהצורך להתעסק עם אלגוריתמים נומריים לחישוב הקואורדינטות (שלרוב לא נותנים מענה מספק).[6]

דוגמה 2: הפעם נטפל בדמות יותר מורכבת של חתול שמיוצג על ידי פוליגון בעל 152 קודקודים. את דמות החתול נחסום בכלוב בעל 25 קודקודים. כפי שניתן לראות באיור 13, הכלוב תוכנן במיוחד בכדי שנוכל לשלוט על תנועות הרגליים, הראש, והזנב.



איור 13: דמות חתול (פוליגון) בעל 152 קודקודים בתוך כלוב (פוליגון) בעל 25 קודקודים



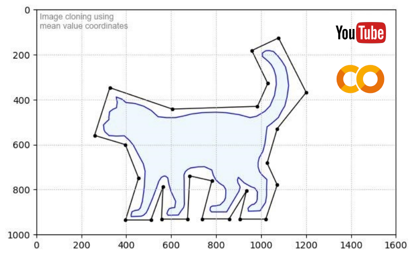
איור 14: כשמגדילים את התמונה משמאל רואים את הקודקודים וצלעות הפוליגון

את רשימת הקודקודים של החתול והכלוב בפורמט **SVG** ניתן לטעון מאתר הקורס על ידי לחיצה על קישור זה. לכל קודקוד של פוליגון החתול צריך לחשב 25 קואורדינטות ערך ממוצע, מאחר ויש לנו 152 קודקודים, נקבל מבנה נתונים שכולל 3800 מספרים ממשיים (152×25). מדובר במבנה נתונים די קליל שמאפשר לנו להניע את החתול באינספור אופנים ובמהירות גבוהה. בשלושת האיורים 15, 16, 17, רואים שלושה שיבוטים שונים של דמות החתול שהושגו באמצעות תוכנה שמשתמשת בקואורדינטות הערך הממוצע (8) (לחץ על האיור בכדי לצפות בסרטון יוטיוב).

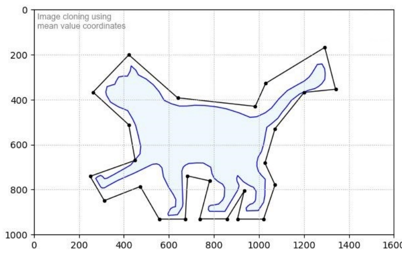
כל שיבוט של החתול מצריך אלפי פעולות אריתמטיות. בנוסף לכך, מאחר ומדובר בפעולות וקטוריות, ניתן לבצע אותן במקביל מעל כרטיסים גרפיים מתקדמים שהיום מסוגלים לבצע

[5] יש בעייה קטנה עם הביטוי α_{i-1} עבור $i=0$ שנפתרת ע"י כך שמגדירים $\alpha_{-1}=\alpha_{n-1}$

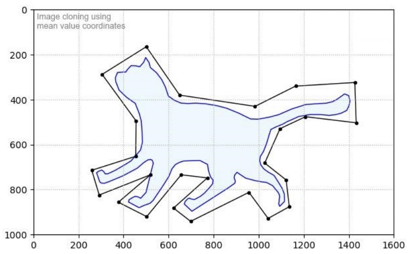
[6] גם במקרה זה קל לבדוק שסכום הקואורדינטות יוצא תמיד 1. המונח "שיבוט" שבו אנו משתמשים כאן, בהקשרים אחרים נקרא גם "צירוף ליניארי קמור" בגלל תכונה זו.



איור 15: הדמות הראשונית של החתול (פוליגון בעל 152 קודקודים). לכלוב 25 קודקודים.



איור 16: השפעה של שינוי בכלוב על דמות החתול. יש לשים לב לרגל קדמית וזנב.



איור 17: השפעה נוספת של שינוי בכלוב על מצב הדמות. הקואורדינטות הן של ערך ממוצע.

מיליארדי חישובים כאלה בשניה. לכן מדוגמה זו אנו למדים כיצד שימוש בתאוריה מתימטית יכול לסייע להאצת אלגוריתמים בגרפיקה ממוחשבת.

מנסיון ארוך בשימוש בקואורדינטות הערך הממוצע בתעשיית סרטי האנימציה מסתבר שבמצבים מסוימים נוצרים עיוותים לא רצויים של הדמות. דוגמה פשוטה לכך רואים באיור 17 שבו הרגל האחורית של החתול התכווצה מעבר לרצוי. לכן נעשו מאמצי מחקר נוספים למציאת מערכות קואורדינטות טובות יותר. אחת המערכות האלה שפותחה בחברת האנימציה PIXAR מתבססת על פונקציות הרמוניות שעליהן נלמד בקורס הנוכחי.

1.3 קואורדינטות הרמוניות (Harmonic Coordinates)

פונקציות **הרמוניות** הן פתרונות של משוואת לפלס

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \tag{9}$$

זוהי משוואה דיפרנציאלית חלקית מסדר 2, המוגדרת על המישור הממשי.[7] יש לה אינסוף פתרונות שונים על פני תחום נתון, אבל קיים משפט מתימטי שמבטיח קיום ויחידות של פתרון למשוואה זו בתחום מישורי עם תנאי שפה מתאימים (תנאי המשפט מורכבים ולא נפרט אותם כאן)[8]. בקורס הטכניוני **משוואות דיפרנציאליות חלקיות** לומדים לפתור את משוואת לפלס בתחומים מלבניים, עיגולים, וטבעות. במקרים כאלה ניתן לקבל פתרונות בצורת נוסחאות מפורשות וסגורות או בצורת טורי פורייה דו-מימדיים. כאשר התחום שלנו הוא פוליגון (הכלוב של דמות האנימציה שלנו), בדרך כלל אין פתרון אנליטי סגור אלא פתרון נומרי בדיד שניתן לממש באמצעות אלגוריתמים נומריים (שנפגוש בחלק השלישי של החוברת).

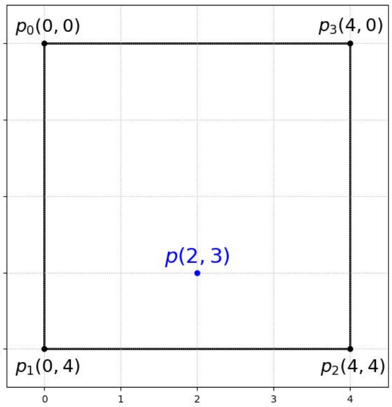
החומר התאורטי של פונקציות הרמוניות מובא בחלק השני. כרגע נביא סקירה סכמטית בלבד של מהן קואורדינטות הרמוניות. הגדרה מלאה עם דוגמאות מעשיות תובא בחלק השלישי.

דוגמה 3: נתאר את הרעיון הכללי על דוגמה של דמות בעלת נקודה אחת $p(2,3)$ בתוך כלוב מרובע $C = \{(0,0), (0,4), (4,4), (4,0)\}$. נסמן את קודקודי הכלוב על ידי

$$p_0 = (0,0), \quad p_1 = (0,4), \quad p_2 = (4,4), \quad p_3 = (4,0)$$

[7] היא מופיעה בפיזיקה למשל עבור בעיית פיזור החום על פני משטח.
[8] אפשר לעיין למשל בספר [9] עמוד 116, אך הדיון שם לא פשוט וחורג ממסגרת הקורס.

ראה איור 18. נציין שלשמות קודקודי הכלוב (Labels) יש משמעות קריטית מאחר והקודקודים שומרים על הזהות שלהם במהלך התנועה של הכלוב. בסרטון המקושר לאיור 5 מודגשת החשיבות של מעקב המצלמה אחרי התוויות המודבקות לבגדי הדוגמן שמגלם את תנועת הדמות בסרטי אנימציה.



איור 18: דמות של נקודה אחת $p(2,3)$ בתוך כלוב מרובע

כזכור, מספר הקואורדינטות זהה למספר קודקודי הכלוב, ולכן במקרה הנוכחי לנקודה p צריכות להיות ארבע קואורדינטות. נגדיר ארבע פונקציות הרמוניות שונות $h_0(x,y)$, $h_1(x,y)$, $h_2(x,y)$, $h_3(x,y)$, בהתאמה לתנאי שפה על קודקודי וצלעות הכלוב שלנו:

א. כל פונקציה הרמונית תקבל את הערך 1 על הקודקוד המתאים לה, אך תתאפס על יתר הקודקודים

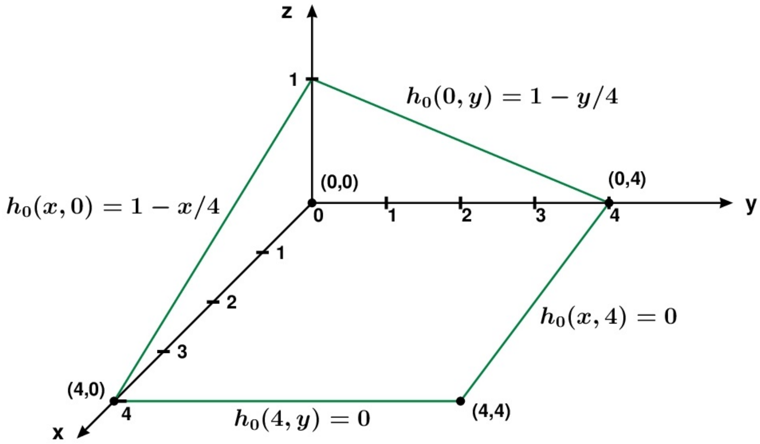
$$\begin{aligned}
h_0(p_0) &= 1, & h_0(p_1) &= 0, & h_0(p_2) &= 0, & h_0(p_3) &= 0\\
h_1(p_0) &= 0, & h_1(p_1) &= 1, & h_1(p_2) &= 0, & h_1(p_3) &= 0\\
h_2(p_0) &= 0, & h_2(p_1) &= 0, & h_2(p_2) &= 1, & h_2(p_3) &= 0\\
h_3(p_0) &= 0, & h_3(p_1) &= 0, & h_3(p_2) &= 0, & h_3(p_3) &= 1
\end{aligned}$$

בדומה למקרה של הקואורדינטות הבריצנטריות, גם כאן אנו מוצאים באופן מחשיד את מטריצת היחידה I_4 מתחבאת לה בתוך האילוץ הזה.

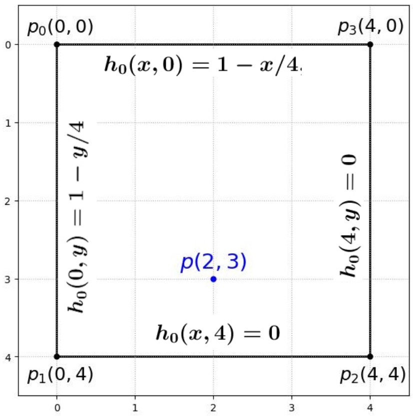
ב. אלה תנאי שפה חלקיים בלבד. בכדי להבטיח קיום ויחידות של פתרון למשוואת לפלס בתחום שלנו, יש להגדיר תנאי שפה מתאימים על כל צלעות הריבוע. הדרך הכי פשוטה היא לבצע **המשכה ליניארית** של התנאים על הקודקודים (ובכך לקבל רציפות וגזירות על שפת התחום, פרט אולי למספר סופי של נקודות): לכל קודקוד נתון, ההמשכה הליניארית תאפס את תנאי השפה על כל הצלעות הזרות לו, ותיצור זוג "מגלשות" מהקודקוד לזוג הקודקודים הסמוכים לו. למשל הפונקציה $h_0(x,y)$ תראה כך:

$$\begin{aligned}
h_0(x,0) &= 1 - x/4, & 0 \le x \le 4\\
h_0(0,y) &= 1 - y/4, & 0 \le y \le 4\\
h_0(x,4) &= 0, & 0 \le x \le 4\\
h_0(4,y) &= 0, & 0 \le y \le 4
\end{aligned}$$

ראה איורים 19, 20.



איור 20: הגדרת תנאי שפה עבור הפונקציה $h_0(x,y)$



איור 19: הגדרת תנאי שפה עבור הפונקציה $h_0(x,y)$

באופן דומה נגדיר תנאי שפה עבור יתר הפונקציות h_1, h_2, h_3, שנקרא להן **הפונקציות ההרמוניות היסודיות** של הכלוב C.

ג. תנאי השפה שלנו מתאימים למשפט הקיום והיחידות למשוואת לפלס[9], ולכן מובטח לנו קיום ויחידות של ארבעת הפונקציות ההרמוניות היסודיות עבור הריבוע שלנו $h_0(x,y)$, $h_1(x,y)$, $h_2(x,y)$, $h_3(x,y)$. בהמשך גם נתאר אלגוריתם נומרי לחישובן (בקירוב) מעל פוליגון כללי.

ד. עכשיו שיש בידינו את הפונקציות ההרמוניות היסודיות של הכלוב, ניגש להגדרת הקואורדינטות ההרמוניות של כל נקודה p בתוך הכלוב

$$m_0 = h_0(p), \quad m_1 = h_1(p), \quad m_2 = h_2(p), \quad m_3 = h_3(p)$$

כלומר, הקואורדינטות ההרמוניות הן ערכי הפונקציות ההרמוניות היסודיות בנקודה p!

ה. מסעיף ב' ועקרון המקסימום (שנפגוש בחלק הבא) אנו למדים על תכונה מהותית של קואורדינטות הרמוניות: כל הערכים שלהם תמיד שייכים לקטע היחידה $[0,1]$! תכונה זו משפרת את איכות השיבוט ומסייעת במניעת עיוותים. ראו איורים 39, 40 (בפרק 3).

נוסחת השיבוט – מקרה פרטי עבור כלוב מרובע

$$p = (m_0, m_1, m_2, m_3) \cdot C$$

כאשר C היא סדרת קודקודי הכלוב שלנו.

בניסוח שונה

$$p = m_0 \cdot (x_0, y_0) + m_1 \cdot (x_1, y_1) + m_2 \cdot (x_2, y_2) + m_3 \cdot (x_3, y_3)$$

[9] ראה למשל את הספר [9] עמוד 116.

זהו כמובן רק מקרה פרטי עבור מרובע. הטענה הכללית חלה על כל מצולע בעל n קודקודים, והיא תכיל סכום של n מכפלות

נוסחת השיבוט – המקרה הכללי

$$p = m_0 \cdot (x_0, y_0) + m_1 \cdot (x_1, y_1) + m_2 \cdot (x_2, y_2) + \cdots + m_{n-1} \cdot (x_{n-1}, y_{n-1})$$

כאשר $p = (x, y)$ היא נקודה כלשהי בתוך הכלוב, $(m_0, m_1, \ldots, m_{n-1})$ היא סדרת הקואורדינטות של p, ו־ $C = \{(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_{n-1}, y_{n-1})\}$ הם קודקודי הכלוב שלנו.

חברת האנימציה פיקסר (PIXAR) השתמשה בקואורדינטות הללו בסרטים שלה (אנימציה תלת-מימדית) וגילתה שהביצועים שלהם עולים על מערכות קואורדינטות שהיו בשימוש עד אז. נלמד קודם על התאוריה של הפונקציות ההרמוניות, ובחלק השלישי נחזור שוב לפרקטיקה.

2. פונקציות הרמוניות (תאוריה)

בקורס פונקציות מרוכבות רואים שהרכיב הממשי וגם הרכיב המדומה של פונקציה אנליטית הם פונקציות הרמוניות בתחום הממשי המתאים. קשר זה מצביע על תכונות רבות שפונקציות אנליטיות והרמוניות חולקות. עם זאת, לא נתמקד בזה בפרוייקט.

2.1 רקע טופולוגי

כל המושגים הטופולוגיים אנלוגיים למושגים שאנחנו מגדירים בקורס פונקציות מרוכבות. נציין כי למעט מושג הקשירות, את כל המושגים כבר ראיתם בקורס חדו"א. עם זאת, למען הסדר הטוב, נחזור על ההגדרות והסימונים.

1. **כדור פתוח** ברדיוס $0 < r$ סביב נקודה $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ מתואר על־ידי:

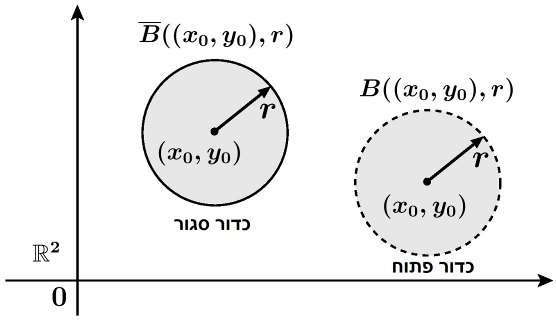
$$B((x_0, y_0), r) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r\right\}$$

2. תהא $S \subseteq \mathbb{R}^2$ ותהא $(x_0, y_0) \in S$ נאמר כי (x_0, y_0) היא **נקודה פנימית** של S אם קיים $0 < r$ כך שמתקיים $B((x_0, y_0), r) \subseteq S$. אוסף הנקודות הפנימיות מסומן ב־ $\text{int}(S)$.

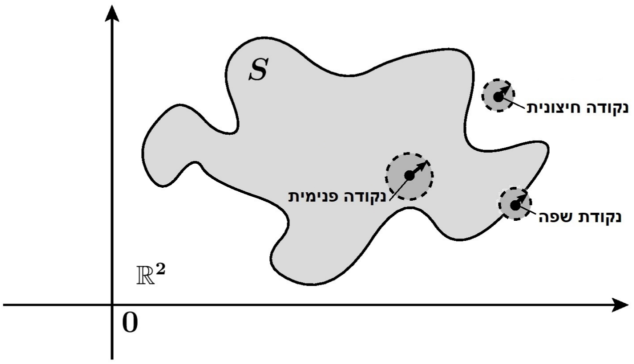
3. קבוצה $S \subseteq \mathbb{R}^2$ נקראת קבוצה **פתוחה** אם $S = \text{int}(S)$.

4. תהא $S \subseteq \mathbb{R}^2$ ותהא $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$. נאמר כי (x_1, y_1) היא **נקודה שפה** של S אם לכל $0 < r$, $B((x_1, y_1), r)$ מכיל לפחות נקודה אחת מ־ S ולפחות נקודה אחת מחוץ ל־S. אוסף נקודות השפה מסומן ב־ ∂S ומכונה **השפה** של S. הסגור של קבוצה S הוא $\overline{S} = S \cup \partial S$.

5. נאמר כי $S \subseteq \mathbb{R}^2$ היא קבוצה **סגורה** אם $S = \overline{S}$.



איור 22: כדור פתוח וכדור סגור



איור 21: נקודה פנימית, נקודה חיצונית, ונקודת שפה

.6 קבוצה $S \subseteq \mathbb{R}^2$ נקראת **קשירה** אם לא קיימות קבוצות זרות ופתוחות $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$ כך שמתקיים:

א. $S \subseteq A \cup B$.

ב. $A \cap S \neq \phi$.

ג. $B \cap S \neq \phi$.

.7 **סביבה** של נקודה היא קבוצה פתוחה וקשירה שמכילה את הנקודה. כמו כן, נתייחס ל**תחום** כקבוצה פתוחה וקשירה.

2.2 הגדרה ועקרון הממוצע

הגדרה 1: פונקציה $u(x,y)$ המוגדרת בתחום $D \subseteq \mathbb{R}^2$ נקראת **הרמונית** שם אם $u(x,y)$ שייכת למחלקה $\mathcal{C}^2(D)$ (כלומר גזירה פעמיים ברציפות בתחום D) ומקיימת:

$$\forall (x,y) \in D,\ \ \Delta u(x,y) = u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0$$

לביטוי $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$ קוראים **לפלסיאן (Laplacian)**.

הערה: במקרים רבים דורשים רציפות של הפונקציה ההרמונית ב־$\overline{D}$.

דוגמאות:

.1 כל פולינום ממעלה 1, $u(x,y) = ax + by + c$ הוא פונקציה הרמונית בכל המישור.

.2 פולינום ממעלה 2, $u(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$ הוא פונקציה הרמונית בכל המישור $\iff 2a + 2c = \Delta u = 0 \iff c = -a$.

3. הפונקציה $u(x,y)=\ln\left(x^2+y^2\right)$ הרמונית בכל תחום הגדרתה. אכן:

$$\begin{aligned} u_{xx}+u_{yy} &= \frac{\partial}{\partial_x}\left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right)+\frac{\partial}{\partial_y}\left(\frac{2y}{x^2+y^2}\right) \\ &= \frac{2\left(x^2+y^2\right)-4x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}+\frac{2\left(x^2+y^2\right)-4y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}=0 \end{aligned}$$

תרגיל 1: מצאו את כל הפולינומים $u(x,y)$ ההרמוניים ממעלה שלישית בכל המישור.

תכונה יסודית וחשובה מאוד של פונקציות הרמוניות היא **עקרון הממוצע:**

משפט 1: (עקרון הממוצע) תהא $u(x,y)$ פונקציה הרמונית בכדור $B=B((x_0,y_0),R)$ ורציפה ב־$\overline{B}$ אז:

$$u(x_0,y_0)=\frac{1}{2\pi R}\oint_{\partial B}u(x,y)\,ds$$

כלומר $u(x_0,y_0)$ שווה לממוצע ערכיה של u על שפת הכדור.

הערות

1. נסיק כי אם u הרמונית בתחום D אז לכל $(x_0,y_0)\in D$ ולכל $r>0$ עבורם $\overline{B}((x_0,y_0),r)\subseteq D$, מתקיים $u(x_0,y_0)=\frac{1}{2\pi r}\oint_{\partial B}u(x,y)\,ds$.

2. הוכחת המשפט מתבססת על מסקנה מ**משפט הדיברגנץ של גאוס**[10] במקרה הדו־מימדי: אם $\vec{F}(x,y)$ שדה גזיר ברציפות בתחום D ורציף על $\overline{D}$ אז

$$\iint_D\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\,dxdy=\oint_{\partial D}\vec{F}\cdot\hat{n}\,ds=\oint_{\partial D}\vec{F}\cdot d\vec{s}$$

כאשר $\hat{n}$ הוא נורמל חיצוני ל־D.

3. מסקנה ממשפט גאוס היא **זהות גרין הראשונה:** יהא D תחום חסום ותהא $u(x,y)$ גזירה ברציפות פעמיים ב־D וגזירה ברציפות פעם אחת ב־$\overline{D}$, אז

$$\boxed{\iint_D\Delta u\,dxdy=\oint_{\partial D}\frac{\partial u}{\partial\hat{n}}\,ds} \qquad (10)$$

הוכחה: ראשית נציין כי

$$\begin{aligned} \Delta u &= u_{xx}+u_{yy}=\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath}+\frac{\partial}{\partial j}\hat{\jmath}\right)\cdot\left(u_x\hat{\imath}+u_u\hat{\jmath}\right) \\ &= \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}u \end{aligned}$$

[10] דיון מפורט במשפט הדיברגנץ של גאוס ובחומר הנוסף סביבו ניתן למצוא בפרק 7 של חוברת הקורס חדו"א 2.

כלומר הלפלסיאן Δu הוא למעשה הדיברגנץ של הגרדיאנט של u ($\vec{\nabla} u = u_x\,\hat{\imath} + u_u\,\hat{\jmath}$).
נציב במשפט גאוס את השדה $\vec{F} = \vec{\nabla} u = u_x\,\hat{\imath} + u_u\,\hat{\jmath}$ ונקבל:

$$\iint_D \Delta u \; dxdy = \iint_D \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} u \; dxdy = \oint_{\partial D} \vec{\nabla} u \cdot \hat{n} \, ds = \oint_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial \hat{n}} \, ds$$

כנדרש.

4. בהוכחה נכניס גבול לתוך אינטגרל מסוים עם פרמטר וכן נבצע גזירה ללא פירוט. מעבר זה דורש הצדקה של התכנסות במידה שווה של האינטגרל עם הפרמטר.

הוכחה: לכל $0 < r \leq R$ נגדיר $B_r = B((x_0, y_0), r)$ ונגדיר את הפונקציה

$$F(r) = \frac{1}{2\pi r} \oint_{\partial B_r} u \, ds$$

מספיק להוכיח שמתקיים $F(R) = u(x_0, y_0)$. ראשית נבחין כי $F(r)$ רציפה בקטע $(0, R]$. כמו כן:

$$\begin{aligned} F(r) &= \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} u(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta) \, r \, d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta) \, d\theta \quad \xrightarrow[r \to 0^+]{} \quad u(x_0, y_0) \end{aligned}$$

לפיכך אם נגדיר את $F(0) = u(x_0, y_0)$ נקבל כי $F(r)$ רציפה בקטע $[0, R]$. מכלל לייבניץ נובע כי $F(r)$ גזירה בקטע $(0, R)$. נחשב את הנגזרת שלה:

$$\begin{aligned} F'(r) &= \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta) d\theta\right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial r} u(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_x(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta)\cos\theta + u_y(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta)\sin\theta \, d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (u_x(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta), u_y(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta)) \cdot (\cos\theta, \sin\theta) \, d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \vec{\nabla} u(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta) \cdot \hat{n} \, d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi r} \oint_{\partial B_r} \frac{\partial u}{\partial \hat{n}} ds \end{aligned}$$

כלומר בקטע $(0, R)$ מתקיים $F'(r) = \frac{1}{2\pi r} \oint_{\partial B_r} \frac{\partial u}{\partial \hat{n}} ds$. לפי זהות גרין הראשונה (10) נקבל

$$F'(r) = \iint_D \Delta u \, dx \, dy$$

מניחים כי u הרמונית ולכן $F'(r) = \iint_D 0 \; dxdy = 0$. נסיק כי $F(r)$ קבועה בקטע $[0, R]$ ולכן $F(R) = F(0) = u(x_0, y_0)$ כנדרש. ∎

אפשר לנסח את עקרון הממוצע בכל הכדור ולא רק על השפה שלו:

משפט 2: תהא u הרמונית בכדור $B = B((x_0, y_0), R)$ ורציפה בקבוצה $\overline{B}$, אז:

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{\pi R^2} \iint_B u(x,y)\, dxdy$$

הערה: הביטוי πR^2 הוא שטח הכדור $B((x_0, y_0), R)$ (למעשה עיגול במקרה הדו-מימדי). לכן $\frac{1}{\pi R^2} \iint_B u(x,y)\, dxdy$ הוא **הערך הממוצע** של הפונקציה $u(x,y)$ מעל הכדור.

תרגיל 2: הוכיחו את עקרון הממוצע בכל הכדור (משפט 2).

למעשה עקרון הממוצע מאפיין פונקציות הרמוניות, כלומר:

משפט 3: יהא $D \subseteq \mathbb{R}^2$ תחום ותהא $u \in \mathcal{C}^2(D)$. אז: $u(x,y)$ הרמונית ב־D אם ורק אם u מקיימת את עקרון הממוצע בכל כדור המוכל ב־D.

הערה: האפיון הזה משחק תפקיד חשוב מאוד בהמשך. בקורס המקביל מד"ח לומדים שיטות לפתרון בעית לפלס בתחומים מלבניים וטבעתיים, וגם שם הפתרון הוא לא תמיד מפורש אלא בצורה של טור פורייה אינסופי. אנחנו נרצה למצוא פונקציות הרמוניות בתחומים מורכבים יותר (פוליגונים). במקרים כאלה הפתרונות היחידיים הם לרוב פתרונות נומריים בדידים (כלומר מוגדרים מעל רשת נקודות בדידות). הדרך לממש זאת היא למצוא "יצוג בדיד של פונקציה הרמונית. האלגוריתמים למציאת פתרונות הרמוניים בתחומים אלה מתבססים על לולאה שבה כל נקודה ברשת מקבלת את הערך הממוצע של ערכי הנקודות השכנות לה. בהתחלת החישוב, כל הנקודות הפנימיות של הרשת מקבלות ערך אפס. הנקודות על שפת התחום מקבלות את תנאי ההתחלה (שבשום שלב אינם משתנים!). הפונקציה מחושבת באופן בדידי ובקירוב ע"י מיצוע של הערכים מתנאי השפה "פנימה" לתוך התחום (במקרים המעניינים נדרשת לולאה של עשרות אלפי סיבובים). תאור יותר מפורט של האלגוריתם הבדיד מוצג בחלק השלישי של החוברת.

תרגיל 3: הוכיחו את האפיון (משפט 3).

הדרכה: הניחו בשלילה שהפונקציה לא הרמונית, הביטו בסביבת נקודה בה הלפלסיאן שונה מאפס והשתמשו בזהות גרין הראשונה (10).

מסקנה מעניינת מעקרון הממוצע: האפסים של פונקציה הרמונית הם אף פעם לא מבודדים. נזכיר כי האפסים של פונקציה הן הנקודות בתחום ההגדרה שלה שבהן היא מתאפסת. נרשום זאת בצורה יותר פורמלית.

מסקנה 4: אם $u(x,y)$ פונקציה הרמונית בתחום D ואם עבור $(x_0, y_0) \in D$ מתקיים $u(x_0, y_0) = 0$ אז לכל $0 < r$ קיימת נקודה

$$(x_1, y_1) \in D \cap [B((x_0, y_0), r) \setminus \{(x_0, y_0)\}]$$

עבורה $u(x_1, y_1) = 0$.

תרגיל 4: הוכיחו שהאפסים של פונקציה הרמונית הם אף פעם לא מבודדים (מסקנה 4).

2.3 עקרון המקסימום ומשפט ליוביל (Joseph Liouville 1809-1882)

מסקנה חשובה ושימושית מאוד מעקרון הממוצע היא **עקרון המקסימום**:

משפט 5: **(עקרון המקסימום)** תהא $u(x,y)$ פונקציה הרמונית בתחום D אז u מקבלת מקסימום בתחום D אם ורק אם u קבועה.

הערה: באופן אנלוגי מנסחים ומוכיחים את **עקרון המינימום**.

תרגיל 5: הוכיחו את עקרון המקסימום (משפט 5).

הדרכה: ההוכחה אנלוגית להוכחה של עקרון המקסימום בפונקציה מרוכבת כאשר משתמשים בעקרון הממוצע במקום משפט קושי-גורסה. נזכיר כי **תחום** הוא קבוצה פתוחה וקשירה.

בתחומים חסומים נסיק מעקרון המקסימום ומשפט ויירשטראס את **עקרון המקסימום החלש:**

טענה 6: אם $u(x,y)$ פונקציה הרמונית בתחום חסום D ורציפה ב־$\overline{D}$ אז u מקבלת מקסימום ב־$\overline{D}$ על השפה ∂D.

לבסוף ננסח את הגירסה האנלוגית של **משפט ליוביל** עבור פונקציות הרמוניות:

משפט 7: **(ליוביל)** פונקציה הרמונית וחסומה בכל המישור היא בהכרח קבועה.

תרגיל 6: הוכיחו את משפט ליוביל (משפט 7).

הדרכה: פונקציה u חסומה בתחום D אם קיים M כך ש־$|u(x,y)| \le M$ לכל נקודה (x,y) ב־D. קחו נקודה (x_0,y_0) כלשהי במישור, והשתמשו בעקרון הממוצע בכדור מלא ברדיוס r סביב הנקודות $(0,0)$, (x_0,y_0), על מנת לחסום את הביטוי $|u(x_0,y_0)-u(0,0)|$ על־ידי ביטוי התלוי ב־$r>0$ והשאיפו את r לאינסוף.

2.4 המקרה הבדיד – תשבצים הרמוניים

אחת הדרכים הפשוטות להמחשת מהי פונקציה הרמונית, וכיצד היא משתקפת במקרה הבדיד, היא באמצעות **סריג הרמוני** (או **תשבץ הרמוני**). **סריג הרמוני** הוא טבלה דו-מימדית של מספרים ממשיים המקיימת את **תכונת הממוצע** בכל נקודה פנימית. כלומר, כל ערך פנימי של הסריג הוא הממוצע של שכניו (על ערכי שפת הסריג לא חל שום אילוץ). באיור 23 רואים כמה דוגמאות של סריגים הרמוניים מהצורה 4×4.

1	0	0	0
0	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{90}$	0
0	$\frac{2}{90}$	$\frac{2}{90}$	0
0	0	0	0

1	0	0	1
0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	0
0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	0
1	0	0	1

1	$\frac{1}{2}$	0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{13}{45}$	$\frac{11}{90}$	0
0	$\frac{11}{90}$	$\frac{3}{45}$	0
0	0	0	0

איור 23: דוגמאות לסריגים הרמוניים מסדר 4×4

תשבץ הרמוני הוא סריג מספרים ממשיים שבו הערכים נתונים רק על שפת הסריג בלבד (תנאי שפה), ויש למצוא את כל הערכים הפנימיים בכדי לקבל סריג הרמוני מלא. בדומה למשפט הקיום והיחידות עבור פתרון של משוואת לפלס עם תנאי שפה, קיים גם משפט קיום ויחידות עבור פתרון של תשבץ הרמוני. כלומר לכל תנאי שפה אפשריים, יש פתרון יחיד! באיור הבא רואים דוגמא לתשבץ כזה ופתרונו:

Puzzle

1	1	0	0
1			0
0			0
0	0	0	0

Solution

1	1	0	0
1	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	0
0	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	0
0	0	0	0

איור 24: תשבץ הרמוני מהצורה 4×4 והפתרון היחיד שלו

ניתן באמצעות דוגמאות אלה ללמוד על תכונות הפונקציה ההרמונית באופן מוחשי, כגון עקרון המקסימום והמינימום (שחייב להתקבל על השפה), שטח מינימלי, וכדומה.

תרגיל 7: פתור את התשבץ ההרמוני שמוצג באיור 25.

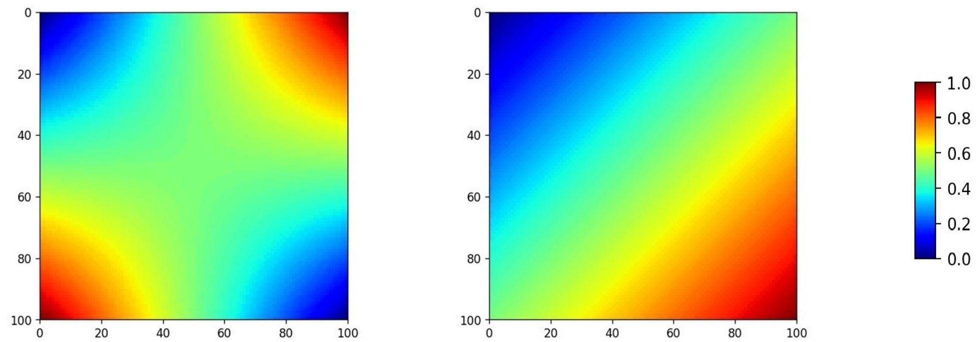
Puzzle

1	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0
1				0
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1

איור 25: תשבץ הרמוני מסדר 3×5

הדרכה: סמן את הערכים החסרים על ידי משתנים כגון x, y, z, ובנה מערכת משוואות מתאימה עבורם.

כשמדובר בסריגים הרמוניים גדולים מאוד, הייצוג המספרי אינו מעשי, והדרך המקובלת בתעשיה בכדי להתמודד עם מורכבויות מסוג זה היא באמצעות מפת חום (Heat Map). למשל, סריג הרמוני מסדר 100×100 יכיל 10,000 ערכים. אם נייצג כל ערך כזה באמצעות צבע מתאים (מפת צבעים), נוכל לקבל רושם כללי על הסריג ואף ללמוד על תכונותיו, כפי שרואים באיור 26.



איור 26: מפות חום של סריגים הרמוניים מסדר 100×100

זוג הריבועים משמאל הן מפות חום (או מפות תרמיות) והסרגל מימין הוא מפת הצבעים (או סרגל צבעים) עבורן. רואים למשל שהערכים הכי גבוהים או הכי נמוכים של הסריג מתקבלים על שפת הסריג (עקרון המקסימום). בפרק הבא נפגוש מפות חום מסוג זה באיורים 35, 36, רק ששם השתמשנו במפת צבעים שונה מהנוכחית (גוונים של כחול). לגמרי במקרה, פונקציית פיזור חום על פני משטח היא פונקציה הרמונית (במצב יציב), ולכן במקרה זה למונח "מפת חום" יש משמעות כפולה[11] 😎.

לסיום סעיף זה נבקש מהתלמידים לקבל טעימה קטנה מהוכחת קיום ויחידות של פתרון לגירסה הבדידה של משוואת לפלס עם תנאי התחלה על שפת הסריג. בכדי להקל, נסתפק במקרה פרטי של תשבץ הרמוני מסדר 4×4.

[11] המודל הפיזיקאלי של תופעת החום מתבסס על תכונת הממוצע: במצב יציב (steady state), בתנאי שפה מתאימים (Dirichlet), הטמפרטורה בכל נקודה פנימית של התחום שווה לממוצע של הטמפרטורות סביב לה.

תרגיל 8: הוכח את משפט הקיום והיחידות של פתרון עבור תשבץ הרמוני מסדר 4×4.

a_0	a_1	a_2	a_3
b_0			b_3
c_0			c_3
d_0	d_1	d_2	d_3

איור 27: תשבץ הרמוני כללי מסדר 4×4

הדרכה: סמן את הערכים החסרים בשמות משתנים ובנה מערכת משוואות מתאימה עבורם. עליך להוכיח שלמערכת שקיבלת יש פתרון אחד ויחיד עבור כל בחירה שרירותית של ערכי השפה a_0, a_1, a_2, a_3, b_0, b_3, c_0, c_3, d_0, d_1, d_2, d_3.

3. קואורדינטות הרמוניות

3.1 נוסחת השיבוט

נחזור שוב לדוגמה 3 של הריבוע מסוף חלק 1.

טענה 8: (נוסחת השיבוט – מקרה פרטי עבור כלוב מרובע)
תהי p נקודה בכלוב C, ויהיו (m_0, m_1, m_2, m_3) הקואורדינטות ההרמוניות של p ביחס לכלוב C. אזי

$$p = (m_0, m_1, m_2, m_3) \cdot C$$

כאשר C היא סדרת קודקודי הכלוב שלנו.

זהו כמובן רק מקרה פרטי של הנוסחה שנועד להמחיש אותה בפשטות. הנוסח הכללי מובא במשפט הבא שהוכחתו היא אחד האתגרים העיקריים של הפרוייקט שנציג בתרגיל 9.

משפט 9: (נוסחת השיבוט עבור קואורדינטות הרמוניות)

$$p = m_0 \cdot (x_0, y_0) + m_1 \cdot (x_1, y_1) + m_2 \cdot (x_2, y_2) + \cdots + m_{n-1} \cdot (x_{n-1}, y_{n-1}) \tag{11}$$

כאשר $p = (x, y)$ היא נקודה כלשהי בתוך הכלוב, $(m_0, m_1, \ldots, m_{n-1})$ היא סדרת הקואורדינטות ההרמוניות של p, ו־ $C = \{(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_{n-1}, y_{n-1})\}$ הם קודקודי הכלוב שלנו.

אם נסמן $\vec{m} = (m_0, m_1, \ldots, m_{n-1})$, $\vec{C} = ((x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_{n-1}, y_{n-1}))$, אז נוכל

לרשום את הנוסחה הזו בכתיב וקטורי קצר:

$$\boxed{p = \vec{m} \cdot \vec{C}} \tag{12}$$

תרגיל 9: יהי $C = \{p_0, p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}\}$, $p_i = (x_i, y_i)$, כלוב בעל n קודקודים, ויהיו $e_i = (p_i, p_{i+1})$ צלעות הכלוב כפי שמפורט באיור 29.

א. תן הגדרה פורמלית מלאה של הפונקציות ההרמוניות היסודיות עבור שפת הכלוב C.

ב. הוכח את **נוסחת השיבוט** הכללית עבור הכלוב C (משפט 9).

ג. נסמן ב־D את התחום הסגור של הכלוב שלנו (פנים ושפה ביחד). הוכח כי לכל נקודה $(x, y) \in D$, הסכום של הקואורדינטות ההרמוניות שלה הוא 1.

הדרכה: לשם כלליות, אחידות, ונוחות נסכים להשתמש בכללי הסימון הבאים

$$x_n = x_0, \quad y_n = y_0, \quad x_{-1} = x_{n-1}, \quad y_{-1} = y_{n-1},$$

$$p_n = p_0, \quad p_{-1} = p_{n-1}, \quad e_n = e_0, \quad e_{-1} = e_{n-1}$$

הסימון הזה מאפשר לנו למשל לכסות את הצלע האחרונה של הכלוב (שבין הקודקוד האחרון p_{n-1} לקודקוד הראשון p_0) באופן הנוח הבא: $e_{n-1} = (p_{n-1}, p_n) = (p_{n-1}, p_0)$ מבלי שנצטרך לדון בה בנפרד. דוגמא נוספת: הצלעות היוצאות מהקודקוד p_i הן e_i, e_{i-1}. עבור הקודקוד הראשון p_0 זה יוצא e_0, e_{-1}. אבל הסכמנו ש־$e_{-1} = e_{n-1}$.

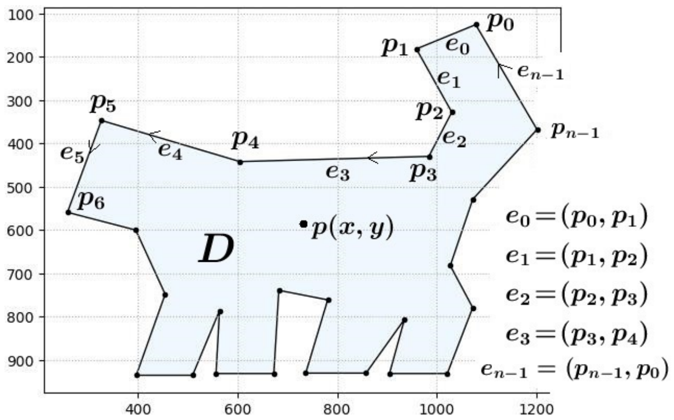
עיין שוב בדיון שבסוף חלק א' (בעמוד 11). כזכור, הפונקציה ההרמונית היסודית $h_i(x, y)$ מקבלת ערך 1 על הקודקוד p_i ואפס על כל שאר הקודקודים. על יתר נקודות שפת הכלוב היא פונקציה ליניארית. לכן יש להגדיר את הפונקציה היסודית $h_i(x, y)$ על זוג הצלעות e_{i-1}, e_i באופן דומה לזה שהגדרנו את h_0 בסעיף 1.3.ב (ראה גם איורים 19, 20), ולאפס אותה על כל שאר הצלעות e_j, $j \neq i - 1, i$. כלומר, יש להגדיר את $h_i(x, y)$ כך שתקבל את הערך 1 בקודקוד p_i ותגלוש באופן ליניארי לערך 0 בקודקודים השכנים p_{i-1}, p_{i+1}, ולאחר מכן תתאפס על יתר הצלעות. מומלץ להשתמש בפרמטריזציה הבאה של צלע e_i:

$$x = x_i + t\Delta x_i, \quad y = y_i + t\Delta y_i, \quad 0 \leq t \leq 1$$

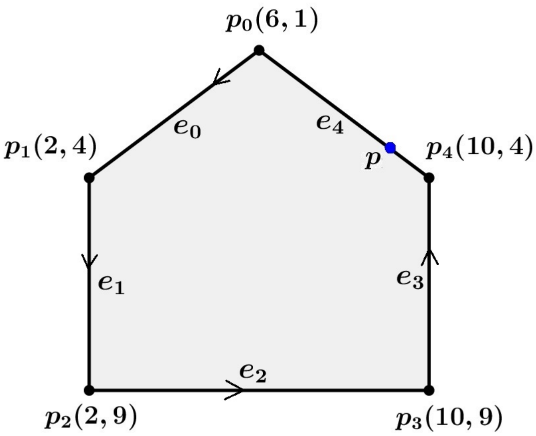
כאשר $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$.

חלק ג': חקור את הפונקציה $H(x, y) = \sum_{i=0}^{n-1} h_i(x, y)$ מעל הכלוב. העזר בהגדרה הפרמטרית של $h_i(x, y)$ שתארנו למעלה. כזכור, $m_i = h_i(x, y)$ הן הקואורדינטות ההרמוניות של הנקודה (x, y).

תרגיל 10: הבט בכלוב של איור 28. חשב את הפונקציה ההרמונית היסודית $h_4(x, y)$ עבור שפת הכלוב הזה. עליך לספק נוסחה מפורשת מלאה של $h_4(x, y)$ על שפת הכלוב בלבד. מה הוא הערך של $h_4(x, y)$ על הנקודה $p(8.8, 3.1)$?



איור 29: כלוב כללי בעל n קודקודים ו־ n צלעות



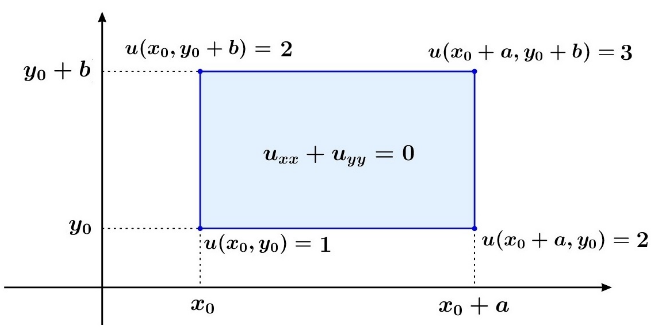
איור 28: איור עבור תרגיל 10

תרגיל 11: מצא פונקציה הרמונית $u(x,y)$ במישור המקיימת את תנאי ההתחלה הבאים במלבן $[x_0, x_0+a] \times [y_0, y_0+b]$

$$\begin{cases} u(x_0, y_0) & = & 1 \\ u(x_0+a, y_0) & = & 2 \\ u(x_0, y_0+b) & = & 2 \\ u(x_0+a, y_0+b) & = & 3 \end{cases}$$

ערכי הפונקציה $u(x,y)$ על שפת המלבן הן ההמשכה הליניארית של הערכים הנ"ל. ראה דוגמאות מתאימות באיורים 30, 31, 32.

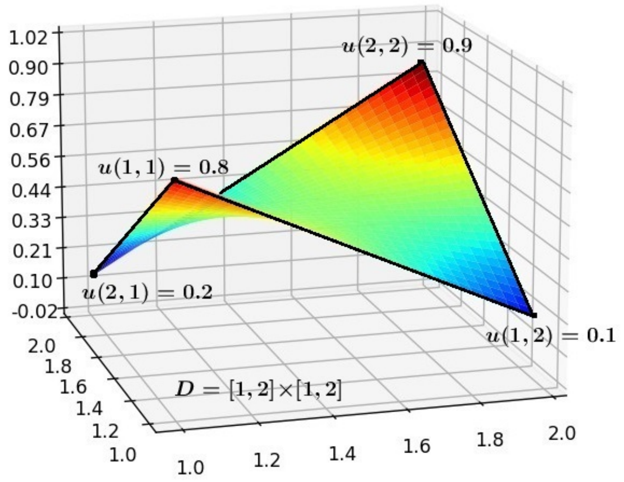
הדרכה: כמובן יש להניח כי $a > 0$, $b > 0$. נסה לשער מהו המשטח הכי פשוט שמחבר את ארבעת הקצוות $(x_0, y_0, 1)$, $(x_0+a, y_0, 2)$, $(x_0, y_0+b, 2)$, $(x_0+a, y_0+b, 3)$? הוכח כי הוא הרמוני ולכן חייב להיות הפתרון לבעייה.



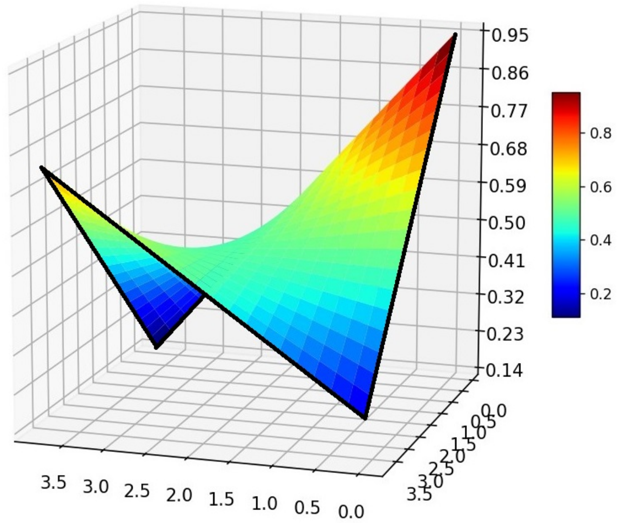
איור 30: משוואת לפלס מעל מלבן עם תנאי שפה ליניאריים

את ההמשכה הליניארית של תנאי הקודקוד לכל שפת הריבוע ניתן לראות בקווים השחורים סביב המשטחים באיורים 31, 32. באיורים אלה רואים גם כיצד נראה הפתרון ההרמוני למשוואת לפלס מעל מלבן. זהו **המשטח המינימלי (minimal surface)** שמכיל ארבע נקודות במרחב התלת-מימדי. במילים אחרות, כל משטח **חלק** אחר שמכיל את ארבע הנקודות יהיה בעל שטח יותר גדול. אחת הדרכים המקובלות להמחשת משטח מינימלי היא הצורה שבה בועת

סבון נמתחת סביב טבעת חוט תיל (או כיצד עור תוף נמתח סביב מסגרת נתונה)[12]. בתכונה הזו (מינימליות המשטח) טמון "סוד ההצלחה" של הקואורדינטות ההרמוניות בתחום האנימציה הגרפית.



איור 31: הפתרון לבעיית תנאי שפה לינאריים רציפים



איור 32: הפתרון לבעיית תנאי שפה לינאריים רציפים

הערה: הביטוי $[x_0, x_0 + a] \times [y_0, y_0 + b]$, כאשר a, b, הם מספרים חיוביים קטנים מאוד, הוא ייצוג טיפוסי של **פיקסל מלבני (pixel)** שעליו מתבססים **אלגוריתמים נומריים** לפתרון מקורב של משוואות דיפרנציאליות חלקיות. באלגוריתמים האלה, התחום שמעליו רוצים לפתור, מקורב על ידי סריג עדין של פיקסלים מלבניים מסוג זה. במקרה שלנו מדובר בכלוב פוליגונלי שרואים למשל באיור 33 שמטופל בסעיף הבא.

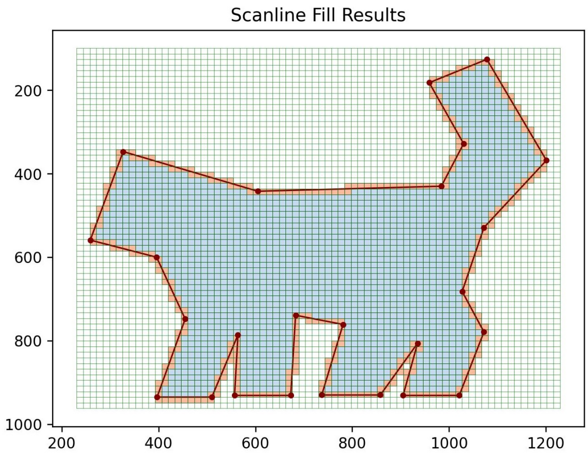
3.2 חישוב פונקציה הרמונית בתחום פוליגונלי

בניגוד לקואורדינטות הערך הממוצע, אשר עבורן היתה לנו נוסחה מפורשת פשוטה, עבור קואורדינטות הרמוניות לא קיימות נוסחאות מתמטיות מפורשות, חוץ אולי מתחומים פשוטים כגון מלבן או עיגול, אשר גם עבורם מדובר לרוב בטורי פורייה אינסופיים. כשמדובר בפוליגונים, דרכי הפעולה העיקריות הן שיטות קירוב נומריות, שלרוב מתבססות על אלגוריתמים לא פשוטים אשר צורכים זמן חישוב יקר וזיכרון רב בכדי לקבל רמת דיוק סבירה. כמה מהשיטות הללו מתוארות במאמרים [1], [2], [3], [6], שבסוף החוברת.

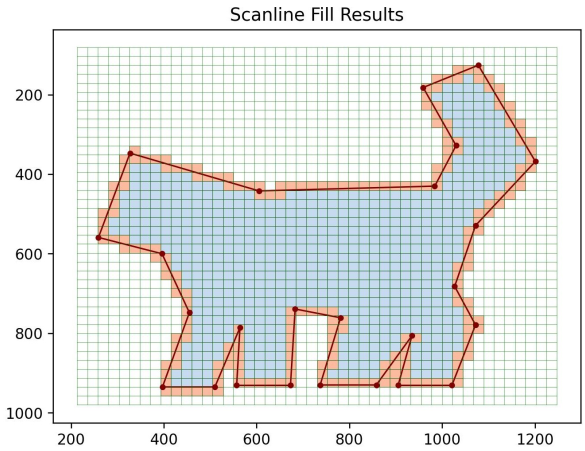
השלב הראשון ברוב השיטות הנומריות הוא כיסוי הכלוב ע"י רשת עדינה של **פיקסלים (pixels)** ריבועיים. ככל שהרשת עדינה יותר כך רמת הדיוק של הקירוב הנומרי תגדל. הקושי הראשון הוא מיון הפיקסלים לשלושה סוגים עיקריים:

- פיקסלים פנימיים שכלולים בשלמותם בתוך הכלוב (Internal pixels)
- פיקסלים חיצוניים שכלולים בשלמותם מחוץ לכלוב (External pixels)
- פיקסלים גבוליים שחלקם בפנים וחלקם בחוץ (Boundary pixels)

[12] דוגמה פיזיקלית נוספת היא פיזור חום על פני תחום מישורי בעל טמפרטורות קבועות על שפתו. הערנו כבר כי בתנאי פיזור אידיאליים הטמפרטורה בכל נקודה פנימית של התחום חייבת להיות הממוצע של הטמפרטורות בסביבתה, ולכן על פי משפט 3, פונקציית החום חייבת להיות פונקציה הרמונית.



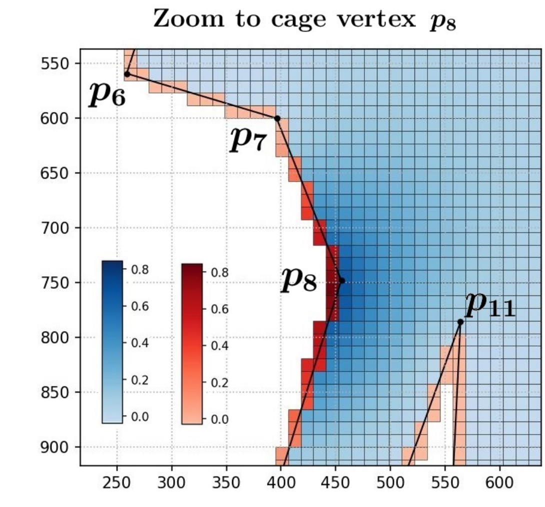
איור 34: כיסוי הכלוב על ידי רשת פיקסלים עדינה יותר



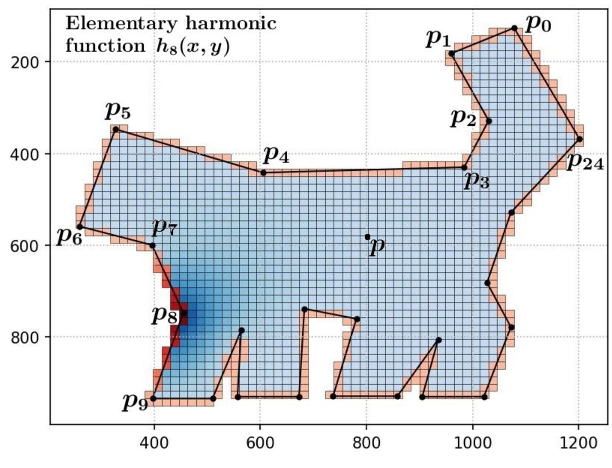
איור 33: כיסוי הכלוב על ידי רשת פיקסלים עדינה

האלגוריתם הסטנדרטי לביצוע משימה זו נקרא ScanLine Algorithm והוא נמצא בשימוש נרחב במערכות תוכנה לתיכנון שבבי VLSI וגרפיקה חישובית. הוא כמובן אינו כלול בקורס המתמטי שלנו, ולכן לא נרחיב עליו את הדיבור. התלמיד המעוניין יוכל להציץ במחברת גוגל הנלווית לחוברת זו, ולמצוא חומרים נוספים ברשת האינטרנט. נציין רק שאת קוד ה־ScanLine שלנו קיבלנו מתוכנת ChatGPT לאחר כעשרים איטרציות שבהן היא התבקשה לתקן את השגיאות בתשובות הקודמות שלה[13].

לאחר בניית הרשת המתאימה (שעשויה להכיל כמאה אלף פיקסלים בכדי לקבל דיוק[14] של 99.5%), יש לבנות מטריצת ערכים מהצורה $m \times n$, כאשר m הוא מספר עמודות, ו־n מספר שורות הרשת, עבור כל אחת מהפונקציות ההרמוניות היסודיות של הכלוב שלנו. במקרה של החתול יש לנו 25 פונקציות יסודיות $h_i(x,y)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, 24$, ולכן יש לבנות 25 מטריצות!



איור 36: זום על הפסגה של הפונקציה היסודית $h_8(x,y)$



איור 35: מפת חום של הפונקציה היסודית $h_8(x,y)$

באיורים 35, 36, רואים כיצד נראית מפת חום של המטריצה עבור הפונקציה היסודית $h_8(x,y)$. על פי רמת החוזק של הגוון הכחול רואים כי בקודקוד p_8 ערך המטריצה הוא 1, וככל שמתרחקים מנקודה p_8 הערכים הולכים וקטנים לכיוון אפס (כזכור, $h_8(x,y)$ מתאפסת על

[13] גירסה מסחרית. בגירסה הציבורית (3.5) התוצאות פחות מרשימות.
[14] רמת הדיוק נמדדת על פי המרחק שבין נקודה אקראית בתוך הכלוב ובין השיבוט של הקואורדינטות שלה באותו כלוב.

כל שאר קודקודי הכלוב). כמו כן, יש לשים לב לגווני הצבע האדום של הפיקסלים הגבוליים שמשקפים את הערכים של תנאי השפה על שפת הכלוב. ככל שמתקרבים לקודקוד p_8 רואים כי הגוון האדום מתקדם בקצב ליניארי לערך 1.

האלגוריתם לבניית המטריצות היסודיות הוא בעקרון מאוד פשוט[15]:

- תנאי השפה של הפונקציה $h_i(x,y)$ הוגדרו בסעיף 1.3 של החלק הראשון על צלעות הכלוב. כל פיקסל **גבולי** יקבל ערך המתאים לנקודה הכי קרובה לפיקסל על שפת הכלוב (באיורים 35, 36 תנאי השפה על הפיקסלים הגבוליים מיוצגים על ידי גוונים של צבע אדום).
- ערכי ההתחלה של כל הפיקסלים הפנימיים הם אפס.
- מריצים את הלולאה הבאה מספר רב של פעמים: עוברים על כל פיקסל פנימי ומשנים את הערך שלו להיות הממוצע של שכניו. השכנים הם הפיקסלים מימין ומשמאל, מלמטה ומלמעלה. ערכי הפיקסלים הגבוליים (תנאי שפה) לא משתנים! ההצדקה לכך היא **עקרון הממוצע** שפגשנו במשפט 1, ומשפט קיום ויחידות מתאים עבור משוואת לפלס בדידה (ראה את הדיון על סריגים ותשבצים הרמוניים ותרגיל 8 - קיים גם משפט קיום ויחידות עבור תשבץ הרמוני מעל סריג פוליגונלי שמבטיח התכנסות של תהליך הקירוב הזה).
- הלולאה נעצרת כאשר **ההפרש הממוצע** בין הערך החדש לערך הקודם קטן מסף מסוים ε. בקוד שלנו השתמשנו ב־$\varepsilon = 10^{-16}$.
- זוהי הצורה הפשטנית והלא יעילה של האלגוריתם. פרטים נוספים על האלגוריתם והדרכים השונות לייעל אותו ניתן למצוא במאמרים שבסוף המסמך.

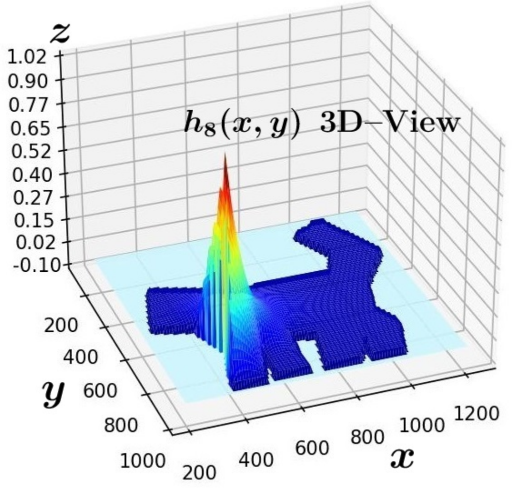
באיורים 37, 38, רואים את הגרף התלת-מימדי של הפונקציה היסודית $h_8(x,y)$ משתי זוויות שונות. נדגיש כי הפונקציות היסודיות $h_i(x,y)$ מוגדרות רק על הנקודות של הרשת שבנינו! ברוב המקרים הנקודות המרכיבות את דמות החתול אינן בהכרח על הרשת שלנו. אם q היא נקודה על החתול, בכדי לקבל את הקואורדינטות ההרמוניות של q, יש למצוא נקודה p על הרשת שהיא הכי קרובה לנקודה q, ולהחזיר את 25 הקואורדינטות של הנקודה p: $h_i(p)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, 24$. זהו כמובן קירוב לקואורדינטות האמיתיות של q, אך אם הרשת מספיק עדינה, זה עשוי להספיק למטרות פרקטיות.

3.3 החתול ההרמוני

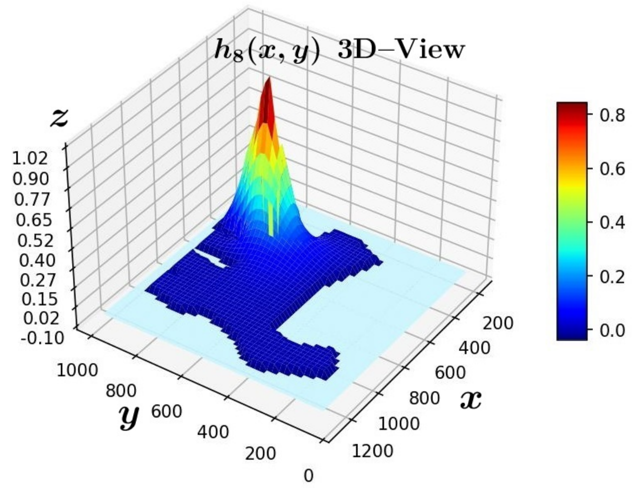
בדיון על קואורדינטות הערך הממוצע צפינו בכמה שיבוטים של דמות החתול על פי מספר מצבים של הכלוב, והערנו שם על כך שבאיור 40 יש עיוות של עובי הרגל – משום מה הרגל האחורית התכווצה לכדי חצי מגודלה המקורי.

שלושת המאמרים [1], [2], [6], הסוקרים את שיטות העבודה של חברת פיקסר (Pixar) הצביעו על בעייה דומה שהחברה נתקלה בה בעבודה עם אנימציה תלת-מימדית (ראה דוגמאות במאמרים [2], [6], ובסרטון של החברה) ולכן הוחלט לעבור לשימוש בקואורדינטות הרמוניות

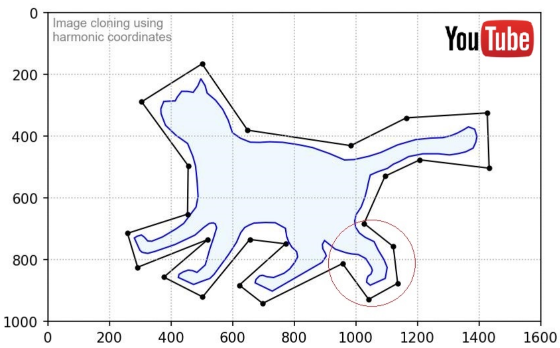
[15] במונחים של משוואת החום, מדובר בתהליך שבו החום שעל שפת התחום מתפשט לתוך התחום עד הגעה למצב יציב (steady state)



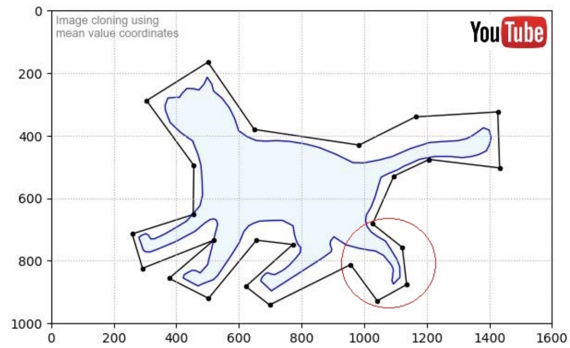
איור 37: גרף תלת-מימדי של הפונקציה היסודית $h_8(x,y)$



איור 38: גרף תלת-מימדי של הפונקציה היסודית $h_8(x,y)$ מזווית שונה



איור 39: החתול ההרמוני: הרגל האחורית הסתדרה!



איור 40: קואורדינטות ערך ממוצע: בעייה עם הרגל האחורית

שבהן בעייה זו נפתרת. באיור 39 רואים שהמעבר לקואורדינטות הרמוניות פותר את "בעיית ההתכווצות" גם במקרה הדו-מימדי[16].

3.4 תרגיל תכנותי

לסיום הפרוייקט התלמיד מתבקש לקבל טעימה קטנה של הפן התכנותי של הנושא. מאחר וזה קורס מתמטי אין צורך בהיכרות מעמיקה עם שפות תיכנות, אלא היכרות עם מספר קטן של פקודות תוכנה פשוטות וקלות להפעלה באמצעות מחברת יופיטר (Jupyter Notebook) אשר בגירסה של חברת Google היא נקראת גם Google Colab Notebook. מחברות יופיטר הן אמצעי הוראה טכנולוגי חדש שבשנים האחרונות הפך להיות חשוב ודומיננטי בהמון תחומי ידע (כולל מדעי חברה). אחת ממטרות פרוייקט הנוכחי היא להפגיש את התלמידים עם הכלי הזה. באיור 41 מוצגות הפקודות הבסיסיות שיש להכיר. הפקודות הפשוטות מסבירות את עצמן ואין צורך להוסיף הסברים נוספים גם עבור תלמידים שאין להם רקע בשפות תיכנות.

הפעלת הקוד הזה (בסביבת **Python** מתאימה) תייצר את שני האיורים 42, 43.

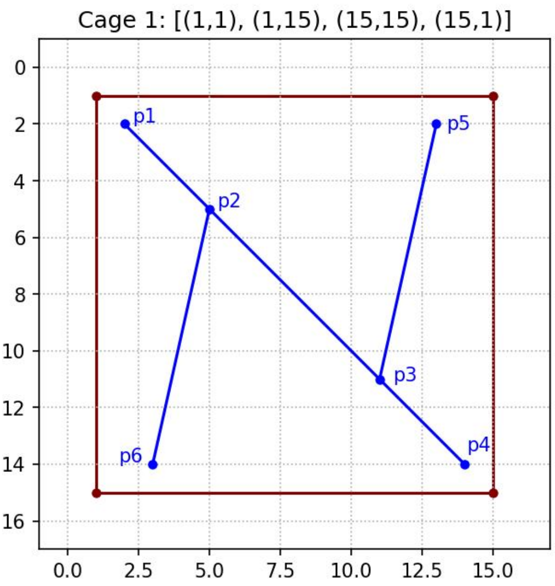
כיצד תיראה האות אלף אחרי שינוי הכלוב באיור 43? לשם ביצוע המשימה נדרשות שתי פקודות

[16] למעשה במקרה ההרמוני יש "התרחבות" קטנה של הרגל האחורית אבל זה לא בגלל השימוש בקואורדינטות ההרמוניות אלא בגלל בחירה לא מוצלחת של הכלוב (רחב מדי עבור הרגל).

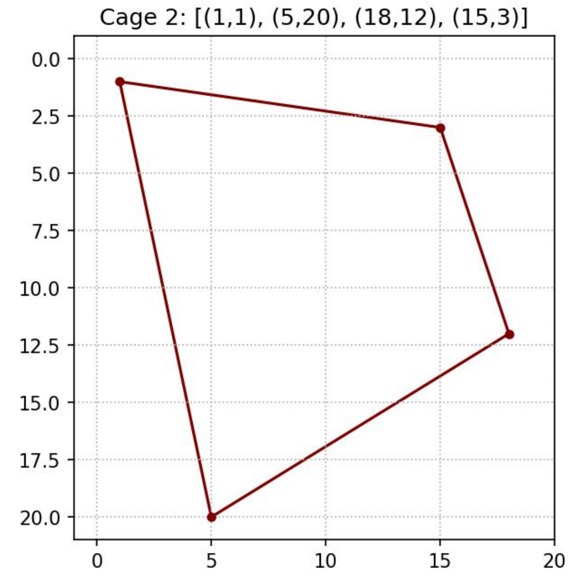
```python
cage1 = [(1,1), (1,15), (15,15), (15,1)]

p1 = (2,2)
p2 = (5,5)
p3 = (11,11)
p4 = (14,14)
p5 = (13,2)
p6 = (3,14)

draw_cage(cage1)

draw_line(p1,p2)
draw_line(p2,p3)
draw_line(p3,p4)
draw_line(p2,p6)
draw_line(p3,p5)
```

```python
draw_point(p1)
draw_point(p2)
draw_point(p3)
draw_point(p4)
draw_point(p5)
draw_point(p6)

show_plot()


cage2 = [(1,1), (5,20), (18,12), (15,3)]
draw_cage(cage2)
show_plot()
```

איור 41: קוד בשפת התיכנות ***Python*** לשם שרטוט כלוב 1, כלוב 2, והאות אלף



איור 42: איור סכימטי של האות אלף בתוך כלוב מרובע



איור 43: כלוב מטרה מספר 2: כיצד תראה האות אלף עכשיו?

נוספות. ראה איור 44.

```python
coords = harmonic_coordinates(p)
clone(coords, cage2)
```

איור 44: קוד בשפת התיכנות ***Python*** לשם חישוב קואורדינטות הרמוניות של נקודה ושיבוטה

לאחר הפעלת הפקודות המתאימות יש לשבט את דמות האות אלף בתוך הכלוב השני. על התלמיד לספק את רשימת הנקודות החדשות והקטעים החדשים של דמות האות אלף לאחר השיבוט.

תרגיל 12: רשום קוד בשפת הפקודות המתוארות באיור 41 אשר הפעלתו תשבט את האות אלף המתוארת באיור 42 בתוך הכלוב שתקבל במחברת הגוגל המקושרת לתרגיל זה. העבודה צריכה להתבצע על גבי עותק של המחברת גוגל הזו. פרטי ההגשה של המחברת ייקבעו בהמשך.

הדרכה: עליך לפתוח את הקישור הנ"ל, בדפדפן אינטרנט, להעתיקו לחשבון הגוגל דרייב שלך, לקרוא שם את ההוראות בעיון רב, ולבצע את המשימה על גבי העותק הפרטי. במידת האפשר ההגשה תתבצע באמצעות חשבון המוודל. פרטים מדויקים ייקבעו בהמשך.

סקיצה ראשונית של מחברת גוגל עבור תרגיל זה זמינה בקישור הבא:

Cloning the Hebrew Aleph Letter Exercise

ייתכנו שינויים בהמשך. הודעה על עידכון סופי תתפרסם במוודל.

4. ביבליוגרפיה

1. **Harmonic Coordinates.** *Tony DeRose, Mark Meyer.* Pixar Technical Memo #06-02, Pixar Animation Studios.
https://graphics.pixar.com/library/HarmonicCoordinates/paper.pdf

2. **Harmonic Coordinates for Character Articulation.** *Pushkar Joshi, Mark Meyer, Tony DeRose, Brian Green, Tom Sanocki.* Pixar Animation Studios.
https://www.cs.jhu.edu/~misha/Fall07/Papers/Joshi07.pdf

3. **Coordinates for Instant Image Cloning.** *Zeev Farbman, Gil Hoffer, Yaron Lipman, Daniel Cohen-Or, Dani Lischinski.* ACM Transactions on Graphics, Volume 28, Issue 3, Article No.: 67, pp 1–9.
https://www.cs.huji.ac.il/~danix/mvclone/files/mvc-final-opt.pdf

4. **Mean Value Coordinates.** *Michael S. Floater.* Computer Aided Geometry Design. Vol. 20, Issue 1, p. 19-27, March 2003.
https://cgvr.cs.uni-bremen.de/teaching/cg_literatur/barycentric_floater.pdf

5. **Mean Value Coordinates for Arbitrary Planar Polygons.** *Kai Hormann, Michael S. Floater.* ACM Transactions on Graphics, 25(4):1424–1441, October 2006.
https://www.inf.usi.ch/hormann/papers/Hormann.2006.MVC.pdf

6. **Moving Remy in Harmony: Pixar's Use of Harmonic Functions.** *David Austin, Grand Valley State University.* American Mathematical Society.
https://www.ams.org/publicoutreach/feature-column/fcarc-harmonic

7. **Why motion capture is harder than it looks.** Vox YouTube Channel.
https://www.youtube.com/watch?v=OOmLfzbmqcg

8. **How Pixar's Animation Has Evolved Over 24 Years, From 'Toy Story' To 'Toy Story 4'.** Movies Insider YouTube Channel.
https://www.youtube.com/watch?v=qTPKGVrFtQU

9. Partial Differential Equations (4th Edition). *Fritz John.* SPRINGER 1971, ISBN 10: 0387900217, ISBN 13: 9780387900216.

10. Complex Functions (Hebrew textbook). *Samy Zafrany.* PERSONAL WEB SITE.
https://samyzaf.com

11. Multivariate Calculus (Hebrew textbook). *Samy Zafrany.* PERSONAL WEB SITE.
https://samyzaf.com